

# مختصات و جبر

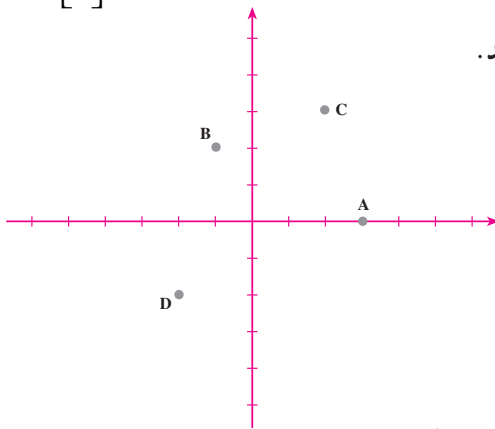


## بردار

### مختصات

در سال گذشته، دیدید که برای مشخص کردن نقاط صفحه، می‌توانیم دو محور عمود بر هم با مبدأ مشترک در صفحه رسم کنیم. این دو محور را دستگاه مختصات می‌نامیم. با وجود دستگاه مختصات،

هر نقطه با مختصاتش مشخص می‌شود. در شکل زیر، مختصات نقطه‌ی A به صورت زیر است:  $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$



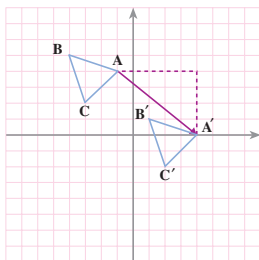
مختصات نقطه‌های B، C و D را بنویسید.

$$B = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

نقطه‌های  $E = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$  و  $F = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$  را در دستگاه مختصات بالا مشخص کنید.



در شکل روبه‌رو، مثلث ABC با بردار  $AA'$  انتقال داده شده است.

برای رسیدن از A به  $A'$ ، باید ۵ واحد در جهت مثبت محور

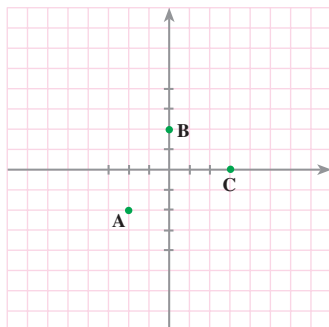
X ها و ۴ واحد در جهت منفی محور Y ها برویم؛ یعنی، طول نقطه‌ی A

را با (+۵) و عرض آن را با (-۴) جمع کنیم؛

پس، مختصات بردار  $AA'$  برابر است با:  $\vec{AA'} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

جمع متناظر با آن بردار عبارت است از:



۱- با استفاده از شکل روبه‌رو

الف- مختصات نقاط A، B و C را پیدا

کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

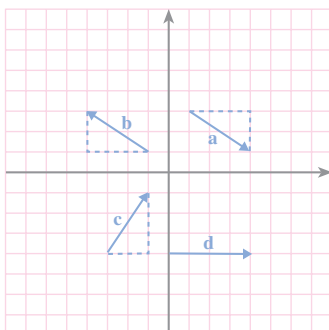
ب- نقاط با مختصات زیر را در شکل

مشخص کنید.

$$D = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

پ- بردارهای  $\vec{AB}$ ،  $\vec{BC}$  و  $\vec{AC}$  را رسم کرده و مختصات آن‌ها را پیدا کنید.

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



۲- مختصات هریک از بردارهای مقابل

را به‌دست آورید.

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۳- مختصات ابتدا و انتهای هریک از بردارهای تمرین ۲ را پیدا کنید و متناظر

با هر بردار، یک جمع بنویسید.

۴- در هریک از قسمت‌های زیر، مختصات نوشته نشده را بنویسید.

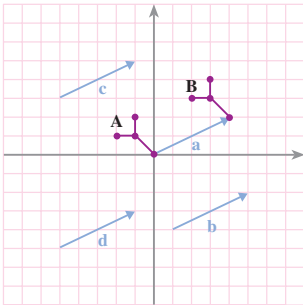
$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

## تساوی بردارها



به شکل روبه‌رو توجه کنید. شکل A با بردار a انتقال داده شده و شکل B به دست آمده است. شکل A را با هر کدام از بردارهای b, c و d نیز انتقال دهید.

مختصات بردارهای a, b, c و d را بنویسید.

$$a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در شکل بالا، بردارهای رسم شده موازی، هم‌اندازه و هم‌جهت هستند. این بردارها همه یک انتقال را نشان می‌دهند؛ پس، با هم مساوی‌اند.

$$a = b = c = d$$

## کار در کلاس

۱- جمع متناظر با هریک از بردارهای بالا را بنویسید.

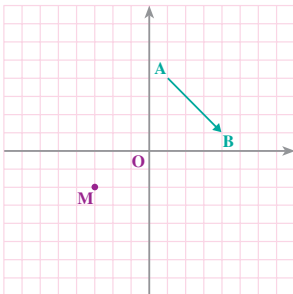
۲- مختصات بردار انتقال  $\vec{AB}$  را به دست آورید.

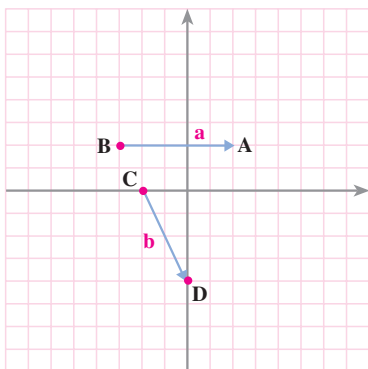
$$\vec{AB} =$$

۳- از نقطه‌ی O، بردار  $\vec{OC}$  را مساوی  $\vec{AB}$  رسم کرده و تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\vec{OC} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

۴- از نقطه‌ی M بردار  $\vec{MN}$  را مساوی  $\vec{AB}$  رسم کنید و با توجه به این بردار، یک تساوی جمع بنویسید.





۱- با استفاده از شکل روبه‌رو

الف - مختصات نقاط داده شده را بنویسید.

ب - مختصات بردارهای رسم شده را

بنویسید.

پ - متناظر با هر بردار و با استفاده از

مختصات ابتدا و انتهای آن، یک جمع بنویسید.

۲- محورهای مختصات را رسم کرده و نقاط زیر را روی آن مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

حالا بردارهای  $\vec{AB}$  و  $\vec{CD}$  را رسم کنید و مختصات آن‌ها را به دست آورید.

آیا این دو بردار مساوی‌اند؟ چهارضلعی ACDB چه نوع چهارضلعی‌ای است؟

۳- یک دستگاه محورهای مختصات رسم کرده و نقاط  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$

را مشخص کنید؛ سپس، بردارهای  $\vec{AB}$  و  $\vec{BC}$  را رسم کنید و مختصاتشان را به دست آورید.

متناظر با هریک از بردارهای  $\vec{AB}$  و  $\vec{BC}$ ، یک جمع بنویسید.

۴- حاصل جمع‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

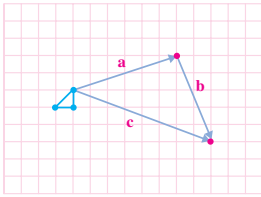
$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} =$$



## جمع بردارها



- ۱- در شکل مقابل، مثلث آبی رنگ را ابتدا با بردار  $a$  و سپس، با بردار  $b$  منتقل کنید.
- ۲- مثلث آبی رنگ را در یک مرحله با بردار  $c$  منتقل کنید.

۳- پاسخ‌های دو قسمت بالا را با هم مقایسه کنید.

۴- مختصات بردارهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  را بنویسید.  $a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$   $b = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$   $c = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

۵- بین  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، چه رابطه‌ای وجود دارد؟

۶- از این فعالیت، چه نتیجه‌ای برای جمع بردارها می‌گیرید؟

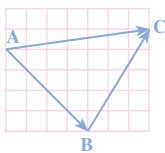
در شکل بالا، نتیجه‌ی دو انتقال  $a$  و  $b$  با انتقال بردار  $c$  یکی است؛ بنابراین:

$$a + b = c$$

## کار در کلاس

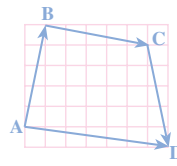
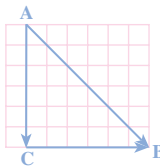


- ۱- با توجه به هریک از شکل‌های زیر، ابتدا یک تساوی جمع برداری بنویسید؛ سپس با به‌دست آوردن مختصات بردارها، تساوی متناظر را برای مختصاتشان بنویسید.



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



۲- حاصل جمع‌های زیر را به‌دست آورید.

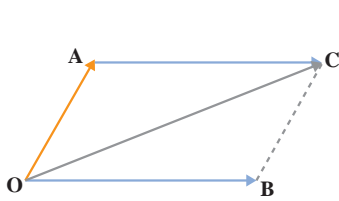
$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} =$$





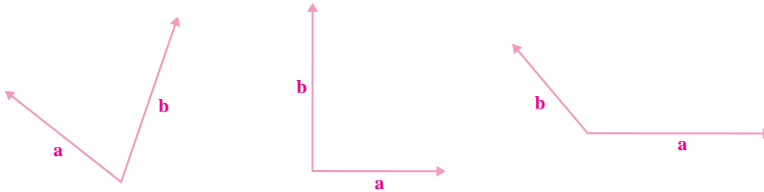
برای به دست آوردن حاصل جمع دو بردار  $\vec{OA}$  و  $\vec{OB}$ ، ابتدا از نقطه‌ی A برداری مساوی  $\vec{OB}$  رسم می‌کنیم و آن را  $\vec{AC}$  می‌نامیم. اینک حاصل جمع دو بردار  $\vec{OA}$  و  $\vec{OB}$  با حاصل جمع دو بردار  $\vec{OA}$  و  $\vec{AC}$  یکی است.

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$$

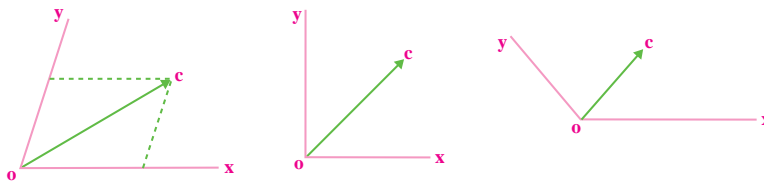
چهارضلعی OACB یک متوازی الاضلاع است (چرا؟)؛ بنابراین، برای به دست آوردن حاصل جمع دو بردار با ابتدای مشترک، می‌توانیم قطر متوازی الاضلعی را که دو بردار روی آن رسم می‌شود، به دست آوریم؛ این قاعده، **روش متوازی الاضلاع** نامیده می‌شود.

## کار در کلاس

۱- در هر یک از حالت‌های زیر، بردار حاصل جمع دو بردار a و b را رسم کنید و یک تساوی جمع برداری بنویسید. بردار حاصل جمع را c بنامید.



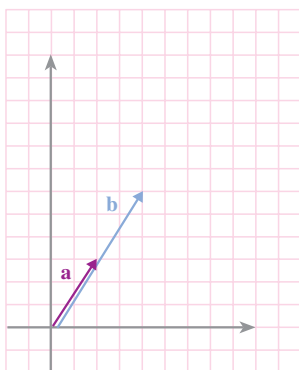
۲- در هر شکل، روی نیم خط‌های OX و OY دو بردار OA و OB را طوری مشخص کنید که حاصل جمع آن‌ها مساوی بردار OC شود.



۳- دو نفر برای کشیدن قایق در رودخانه از دو طناب استفاده کرده‌اند (به شکل روبه‌رو نگاه کنید). نیرویی که آن‌ها به قایق وارد می‌کنند، با دو بردار نشان داده شده است. با توجه به شکل، مسیر حرکت قایق را مشخص کنید.



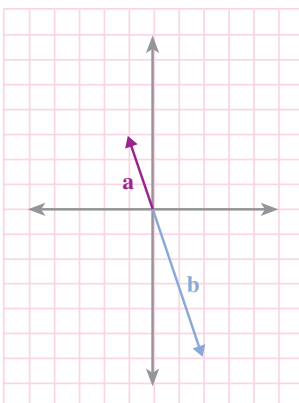
## ضرب یک عدد در یک بردار



بردارهای  $a$  و  $b$  در یک امتداد و هم جهت اند.  
مختصات آن‌ها را بنویسید.

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

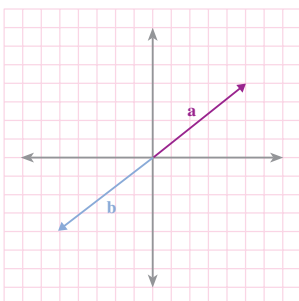
بین این دو بردار چه رابطه‌ای وجود دارد؟  
رابطه‌ی بین مختصات آن‌ها را با یک تساوی  
مختصاتی نشان دهید.



در شکل روبه‌رو، بردار  $b$  در امتداد بردار  $a$   
ولی در خلاف جهت آن است. با توجه به شکل،  
مختصات آن‌ها را بنویسید.

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

تساوی برداری و تساوی مختصاتی آن‌ها را  
بنویسید.



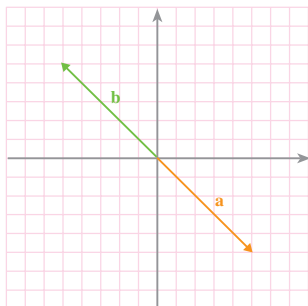
در شکل روبه‌رو، بردار  $b$  قرینه‌ی  $a$  است؛  
یعنی:

$$b = -a$$

مختصات بردارها را بنویسید و تساوی  
مختصاتی را نتیجه بگیرید.

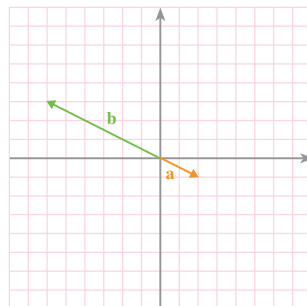
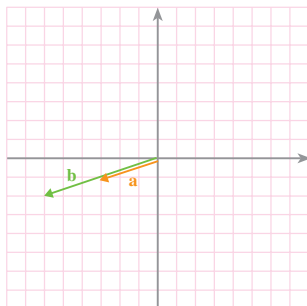
$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۱- با توجه به هر شکل، ابتدا یک تساوی برداری بنویسید؛ سپس، به جای هر بردار، مختصاتش را قرار دهید و تساوی متناظر مختصاتی را بنویسید.

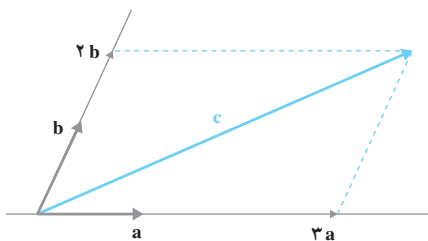


$$b = -a$$

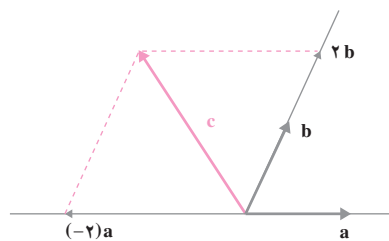
$$\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} =$$



۲- در هر یک از شکل های زیر، بردار c را بر حسب بردارهای a و b بنویسید.

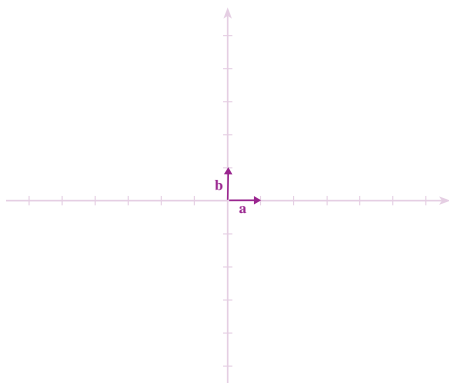


$$C =$$



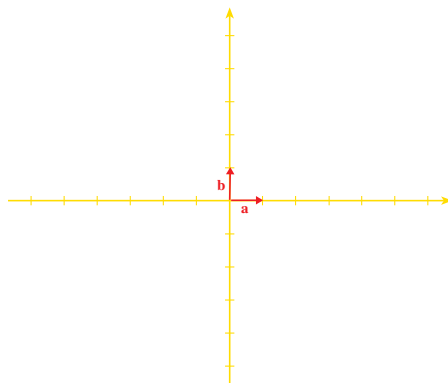
$$C =$$

۳- با توجه به تمرین ۲ در هر قسمت، بردارهای داده شده را رسم کنید.



$$c = 3a + 2b$$

$$d = (-2)a + 3b$$



$$c = 4a + (-2)b$$

$$d = (-4)a + b$$



۱- حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

$$(-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (-2) \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(-2) \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

۲- در هریک از موارد زیر، مختصات بردار b و بردار a + b را حساب کنید.

الف -  $a = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$  ,  $b = 4a$       ب -  $a = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$  ,  $b = (-4)a$

پ -  $a = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  ,  $b = 8a$       ت -  $a = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}$  ,  $b = a$

۳- در هریک از قسمت‌های زیر، بردارهای a, b, c و d را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و مختصات بردار c را حساب کنید.

الف -  $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  ,  $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  ,  $c = a + b$

ب -  $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  ,  $e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  ,  $c = 5d + 4e$

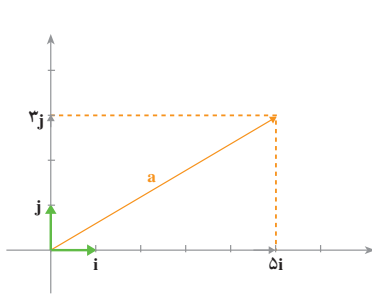
پ -  $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  ,  $e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  ,  $c = (-6)d + 2e$

۴- در هریک از معادله‌های زیر، مختصات بردار x را تعیین کنید.

الف -  $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$       ب -  $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$

پ -  $4x = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$       ت -  $(-3)x = \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \end{bmatrix}$

## بردارهای واحد مختصات



بردارهای  $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  را بردارهای واحد

مختصات می‌نامیم.

هر برداری از صفحه را می‌توانیم برحسب این بردارها

به‌دست آوریم؛

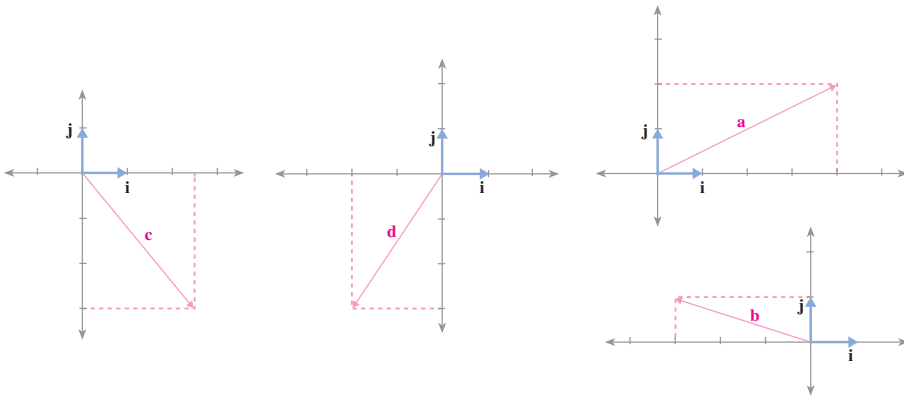
مثلاً در شکل روبه‌رو:  $a = 5i + 3j$

با استفاده از مختصات نیز می‌توان این رابطه را به‌دست آورد.

$$a = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5i + 3j$$

### کار در کلاس

۱- در هر قسمت، بردار داده شده را برحسب بردارهای واحد  $i$  و  $j$  بنویسید.



۲- بردارهای زیر را برحسب بردارهای واحد  $i$  و  $j$  بیان کنید.

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}}$$

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}}$$

$$d = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}}$$

۳- با مراجعه به سؤال ۱، مختصات هریک از بردارهای  $a, b, c$  و  $d$  را به دست آورید.

---



---

۴- مختصات هریک از بردارهای زیر را به دست آورید.

$$u = 5i + 2j = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$y = 3i - 2j = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$v = (-3i) + 4j = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$z = 8i - 9j = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$



۱- دو محور عمود بر هم رسم کرده و بردارهای واحد مختصات را روی آن‌ها مشخص کنید. اکنون، بردارهای زیر را رسم کرده و هر بردار را برحسب  $i$  و  $j$  بیان کنید.

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

۲- مختصات بردارهای زیر را به دست آورید و آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$u = 3i + 2j$$

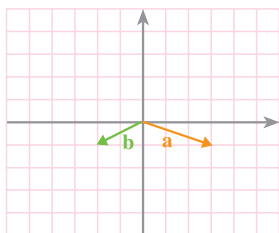
$$v = 7i - 2j$$

$$x = 3i + j$$

۳- فرض کنیم  $a = 3i + (-2)j$  و  $b = 2i + j$ . ابتدا مختصات بردارهای  $a$  و  $b$  و سپس مختصات بردارهای  $x$  و  $y$  را حساب کنید.

$$x = 5a + 3b$$

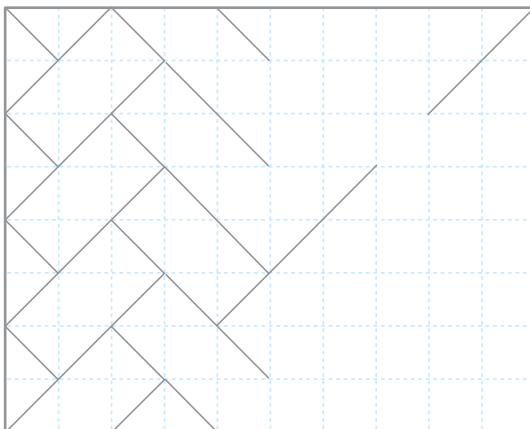
$$y = 3a + 5b$$



۴- با توجه به شکل روبه‌رو، بردار  $c$  را رسم کنید و مختصات آن را به دست آورید.

$$c = 2a + 3b$$

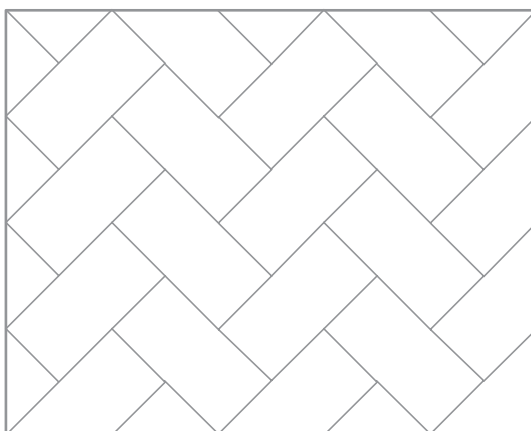
الف - شکل را مانند قسمت انجام شده کامل کنید.



ب -

- ۱- مستطیلی به طول  $20$  سانتی متر و عرض  $16$  سانتی متر بکشید (کادر رسم).
- ۲- مستطیل را با مربع هایی به ضلع  $2$  سانتی متر خانه بندی کنید (نقطه چین های شکل).
- ۳- با استفاده از شکل، ابتدا مستطیل های داخل کادر را بکشید.
- ۴- خط های اضافی را پاک کنید تا شکل نهایی به دست آید.

پ - شکل نهایی



ت - تمیز بودن رسم، یک دست بودن خطوط و در امتداد هم بودن خط های مایل، از نکات

مهم این رسم است.