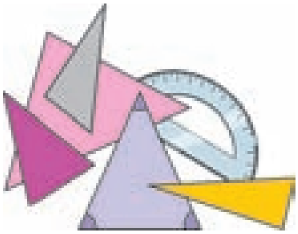
زاویه و مثلث

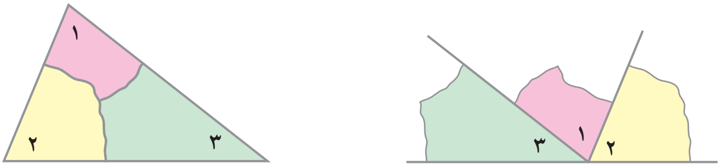


مجموع زاویه‌های مثلث

فعالیت

۱ــ ۳ مثلث به دلخواه رسم کنید. زاویه‌های هر مثلث را اندازه بگیرید.

۲ــ یک مثلث رسم کنید. سه زاویه‌ی آن را ببُرید و مانند شکل زیر کنار هم قرار دهید.



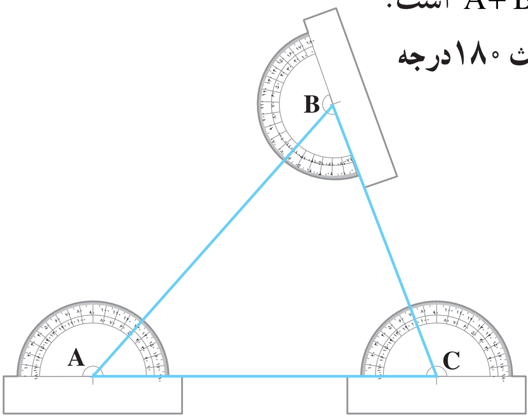
از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

شکل زیر نشان می‌دهد که $\hat{C}=۷۰^\circ$ ، $\hat{B}=۶۰^\circ$ ، $\hat{A}=۵۰^\circ$ است.

پس،

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۵۰^\circ+۶۰^\circ+۷۰^\circ=۱۸۰^\circ$ است.

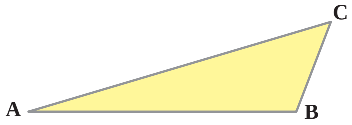
بنابراین، مجموع زاویه‌های یک مثلث ۱۸۰ درجه است.



۱ــ زاویه‌های مثلث ABC را اندازه بگیرید و تساوی‌ها را کامل کنید.

$\hat{A} =$ ..... ، $\hat{B} =$ ..... ، $\hat{C} =$ .....

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} =$ .....

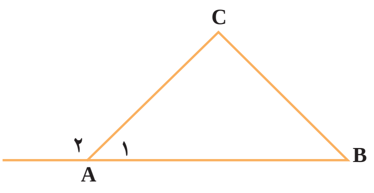


۲ــ مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۳ سانتی‌متر رسم کنید و زاویه‌های آن را اندازه بگیرید. سپس، مجموع زوایای آن را حساب کنید.

۳ــ مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کنید که هر ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن ۴ سانتی‌متر باشد. زاویه‌های آن را اندازه بگیرید. مجموع زاویه‌های این مثلث چند درجه است؟

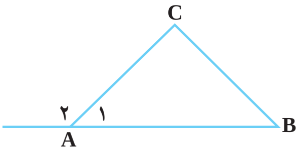
زاویه‌ی خارجی مثلث

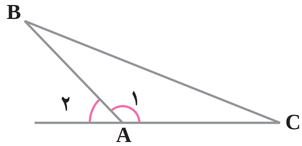
در مثلث ABC، ضلع AB امتداد داده شده است. امتداد این ضلع با ضلع AC، زاویه‌ی A_2 را تشکیل داده است. زاویه‌ی A_2 یک **زاویه‌ی خارجی** مثلث ABC است.



فعالیت

در شکل‌های زیر، زاویه‌های مثلث و زاویه‌ی خارجی $A_{۲}$ را اندازه بگیرید. بین این زاویه‌ها چه رابطه‌ای وجود دارد؟

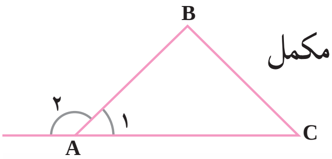




به‌طورکلی، در هر مثلث

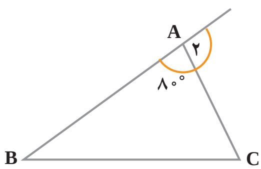
یک زاویه‌ی خارجی، با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن مساوی است.

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{A}_{۱}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ & \text{مجموع زاویه‌های مثلث} \\ \hat{A}_{۱}+\hat{A}_{۲}=۱۸۰^\circ & \text{زاویه‌های مکمل} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_{۲}=\hat{B}+\hat{C}$$



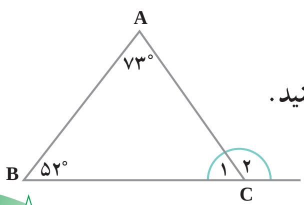
کار در کلاس

۱ــ مثلثی رسم کنید و آن‌را ABC بنامید. سپس، با امتداد دادن ضلع‌ها، زاویه‌ی خارجی مجاور به زاویه‌ی داخلی B و زاویه‌ی خارجی مجاور به زاویه‌ی داخلی C را مشخص کنید.



۲ــ با توجه به شکل مقابل، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$\hat{A}_{۲}=\cdots\cdots \quad \hat{B}+\hat{C}=\cdots\cdots$



۳ــ با توجه به شکل مقابل، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$\hat{C}_{۱}=\cdots\cdots \quad \hat{C}_{۲}=\cdots\cdots$

حل مسئله

بعضی از مسئله‌ها به ظاهر دشوار و پیچیده‌اند. برای درک بهتر این گونه مسائل، می‌توانیم آن‌ها را ساده کنیم. درک و حل مسئله‌ی ساده شده به ما کمک می‌کند که مسئله‌ی اصلی را بهتر بفهمیم و برای حل آن اقدام کنیم. در این راهبرد، اغلب برای برقراری ارتباط بین مسئله‌ی ساده و اصلی از راهبرد الگویابی استفاده می‌شود.

۱ــ رقم یکان $۳^{۳۰۱}$ را به‌دست آورید.

فهمیدن مسئله: ــ برای به‌دست‌آوردن عدد $۳^{۳۰۱}$ چه باید کرد؟

ــ آیا می‌توان حاصل $۳^{۳۰۱}$ را به‌دست آورد؟

ــ مسئله چه چیزی را از شما خواسته است؟

انتخاب راهبرد: برای پیدا کردن رقم یکان این عدد، می‌توانیم رقم یکان عددهای ساده‌تر را بررسی کنیم و به دنبال یک الگو بگردیم. پس، بهتر است مسئله را ساده کنیم.

حل مسئله: مقدار عددی عبارت‌های توان‌دار ساده‌تر مثل $۳^۱$، $۳^۲$، $۳^۳$، $۳^۴$، $۳^۵$، ... را پیدا می‌کنیم.

در رقم‌های یکان، چه الگویی دیده می‌شود؟

با توجه به الگویی که کشف کرده‌اید،

رقم یکان $۳^{۳۰۱}$ را تعیین کنید.

رقم یکان	حاصل عدد	عدد توان‌دار
۳	۳	$۳^۱$
۹	۹	$۳^۲$
۷	۲۷	$۳^۳$
		$۳^۴$
		$۳^۵$

بازگشت به عقب: راه حلّ خود را با یک عدد توان‌دار کوچک‌تر ــ مثل $۳^۷$ ــ بررسی کنید.

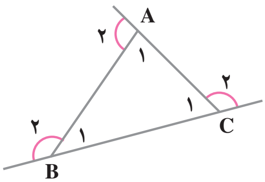
حل مسئله‌ی ساده‌تر

۲ــ مجموع زاویه‌های خارجی یک دوازده ضلعی را که همه‌ی زاویه‌های آن از ۱۸۰ درجه کم‌تر باشند، پیدا کنید.

فهمیدن مسئله: ــ آیا تعریف زاویه‌ی خارجی و دوازده ضلعی را می‌دانید؟
ــ مسئله چه چیزی را از شما خواسته است؟

انتخاب راهبرد: اگر به جای دوازده ضلعی، چندضلعی‌های ساده‌تر ــ مثل چهار ضلعی یا پنج ضلعی ــ را بررسی کنیم، شاید به رابطه یا الگویی برسیم که در تعیین زاویه‌های خارجی یک دوازده ضلعی به ما کمک کند.

حل مسئله: از مسئله‌ی ساده (مثلث) شروع می‌کنیم.



زاویه‌های داخلی $A_۱$ ، $B_۱$ و $C_۱$ هستند
که مجموعشان ۱۸۰ درجه است.
زاویه‌های خارجی $A_۲$ ، $B_۲$ و $C_۲$ هستند
که مجموعشان موردنظر است.
در شکل بالا، ۳ زاویه‌ی ۱۸۰ درجه داریم.

$$۳\times۱۸۰^\circ=\underbrace{(\hat{A}_۱+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱)}_{\text{مجموع زاویه‌های داخلی}}+\underbrace{(\hat{A}_۲+\hat{B}_۲+\hat{C}_۲)}_{\text{مجموع زاویه‌های خارجی متناظر}}\Rightarrow ۵۴۰^\circ-۱۸۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

مجموع زاویه‌های خارجی متناظر + مجموع زاویه‌های داخلی = $۳\times۱۸۰^\circ$

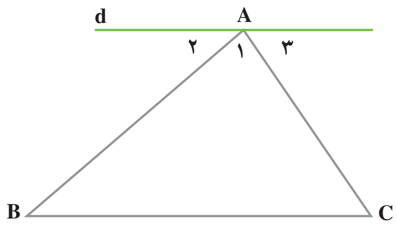
همین کار را برای یک چهارضلعی و پنج‌ضلعی انجام دهید.
چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

بازگشت به عقب: آیا نتیجه‌ای را که در مورد مثلث، چهار ضلعی و پنج ضلعی گرفته‌اید می‌توانید در مورد n ضلعی هم به کار ببرید؟

در بعضی از مسئله‌ها وجود عددهای کسری و کمی غیرمعمول ممکن است ما را از درک مسئله دور کند. با استفاده از این راهبرد، می‌توان مسئله را با عددهای ساده‌تر و معمول فهمید و حل کرد.

تمرین

۱ــ خط d با ضلع BC موازی است. با استفاده از خواص خطوط موازی، تساوی‌های زیر را کامل کنید.



$(d \| BC,$ مورب $AB) \Rightarrow \cdots = \cdots$

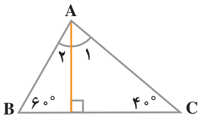
$(d \| BC,$ مورب $AC) \Rightarrow \cdots = \cdots$

$$\begin{array}{ccccc} \hat{A}_۱ & + & \hat{A}_۲ & + & \hat{A}_۳ = ۱۸۰^\circ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A}_۱ & + & \cdots & + & \cdots = ۱۸۰^\circ \end{array}$$

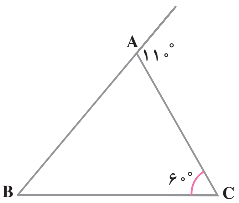
۲ــ اندازه‌های دو زاویه‌ی مثلثی ۳۵ درجه و ۷۲ درجه است. اندازه‌ی زاویه‌ی سوم آن‌را حساب کنید.

۳ــ اندازه‌ی یکی از زاویه‌های تند مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۴۰ درجه است. اندازه‌ی زاویه‌ی تند دیگر آن‌را حساب کنید.

۴ــ اندازه‌ی هریک از زاویه‌های $A_۱$ و $A_۲$ را حساب کنید.

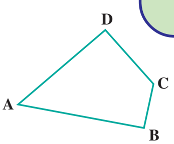


۵ــ در مثلث ABC زاویه‌ی B را حساب کنید.

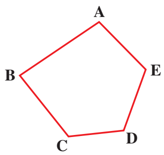


حل مسئله

- رسم شکل
- جدول نظام‌دار
- الگویابی
- حذف حالت‌های نامطلوب
- زیر مسئله
- حل مسئله‌ی ساده‌تر
- تشکیل معادله
- حدس و آزمایش



۱ــ مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD را حساب کنید.



۲ــ مجموع زاویه‌های داخلی پنج‌ضلعی ABCDE را حساب کنید.

۳ــ مجموع زاویه‌های خارجی یک مثلث را پیدا کنید.