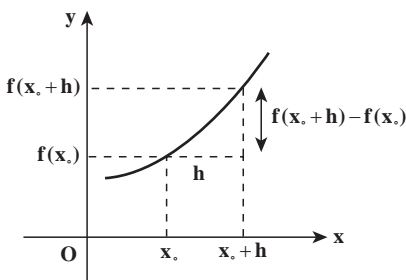


## مشتق توابع

### یادآوری و تکمیل



سال گذشته با مفهوم مشتق توابع آشنا شده‌اید. برای یک تابع مانند  $f$  با تغییر مقدارهای متغیر  $x$  مقدار  $f(x)$  نیز تغییراتی می‌کند. مشتق یک تابع، چگونگی تغییر مقدار تابع را نسبت به مقدار متغیر نشان می‌دهد. در یک نقطه  $x_0$  از دامنه  $f$  اگر به اندازه  $h$  واحد از  $x_0$  دور شویم، مقدار تابع از  $f(x_0)$  به  $f(x_0 + h)$  تغییر می‌کند.

میزان تغییرات  $f$  برابر  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  و میزان تغییرات  $x$  به اندازه  $h$  است.

کسر  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  نسبت این تغییرات را حساب می‌کند و حد آن در  $h = 0$  (در صورت وجود) مشتق  $f$  در  $x_0$  نامیده‌ایم و با  $f'(x_0)$  نشان داده‌ایم.

مثال: مشتق تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را در نقطه دلخواه  $x_0 \in (0, \infty)$  حساب کنید.

حل:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h) - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

سال گذشته دیدیم که  $f'(x_0)$  نشان‌دهنده ضریب زاویه (شیب) خط مماس بر نمودار  $f$  در نقطه

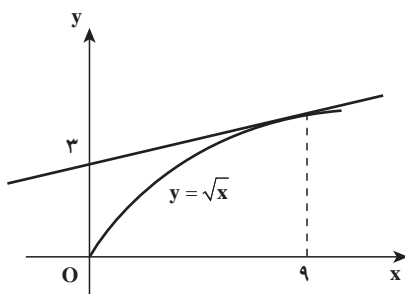
$(x_0, f(x_0))$  است. بنابراین معادله خط مماس بر نمودار  $f$  در نقطه  $(x_0, f(x_0))$  عبارت است از:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

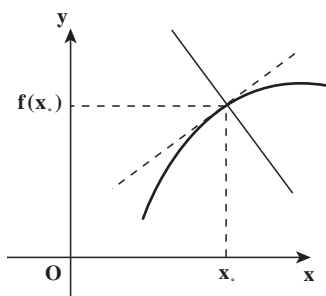
مثال: معادله خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را در نقطه  $(9, 3)$  بنویسید.

حل: داریم  $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$  پس معادله خط مماس عبارت است از:

$$y - 3 = \frac{1}{6}(x - 9)$$



اگر خطی نمودار تابعی مانند  $f$  را به گونه‌ای قطع کند که بر خط مماس بر نمودار  $f$  در آن نقطه عمود شود، گوییم خط بر نمودار تابع در آن نقطه عمود است.



اگر این نقطه  $(x_0, f(x_0))$  باشد، ضریب زاویه خط مماس  $f'(x_0)$  است، پس ضریب زاویه خط عمود، در حالت  $f'(x_0) \neq 0$  برابر  $-\frac{1}{f'(x_0)}$  است. پس معادله خط عمود بر نمودار تابع  $f$  در نقطه  $(x_0, f(x_0))$  عبارت است از:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

در حالتی که  $f'(x_0) = 0$ ، خط مماس بر نمودار  $f$  افقی است و عمود بر آن موازی محور  $y$ ها است و معادله آن  $x = x_0$  خواهد بود.

مثال: معادله خط عمود بر نمودار تابع  $y = \frac{1}{x}$  را در نقطه  $(2, \frac{1}{2})$  بنویسید.

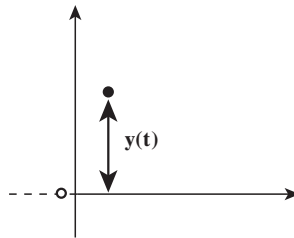
حل: داریم  $y' = -\frac{1}{x^2}$ ، پس  $y'(2) = -\frac{1}{4}$  و ضریب زاویه خط عمود ۴ خواهد بود.

$$y - \frac{1}{2} = 4(x - 2)$$

سال گذشته دیدیم که اگر متحرکی روی محور  $x$ ها در حال حرکت باشد و در هر لحظه  $t$  در مکان  $x(t)$  قرار داشته باشد، مشتق  $x(t)$  در هر لحظه نسبت تغییرات مکان به تغییرات زمان را می‌سنجد که در فیزیک آن را سرعت متحرک می‌نامند. پس سرعت این متحرک در لحظه  $t_0$  برابر است با  $x'(t_0)$ .



مثال : سیمی را در لحظه  $t=0$  از زمین رو به بالا پرتاب می کنیم. معادله حرکت آن به صورت  $y(t) = -5t^2 + 30t$  است، که  $y$  بر حسب متر و  $t$  بر حسب ثانیه است. این حرکت چند ثانیه طول می کشد و سرعت حرکت سیم در لحظه آخر چقدر است؟



حل : داریم  $y(0) = 0$  و  $y(6) = 0$ ، یعنی سیم در لحظات  $t=0$  و  $t=6$  در سطح زمین است در لحظه  $t=0$  از سطح زمین رو به بالا حرکت کرده است و در لحظه  $t=6$  مجدداً به زمین برگشته است. سرعت حرکت سیم در لحظه آخر  $y'(6)$  است.

$$y'(t) = -10t + 30 \Rightarrow y'(6) = -60 + 30 = -30$$

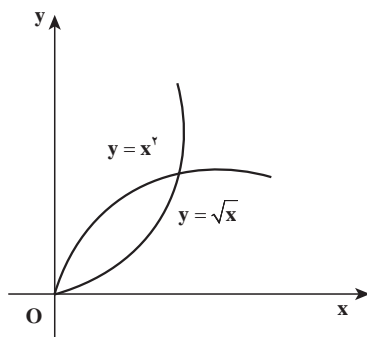
یعنی سیم با سرعت سی متر بر ثانیه به زمین برخورد می کند.

در مثال بالا دیدیم که مقدار مشتق منفی شده است، منفی شدن مقدار مشتق چه معنایی دارد؟ در مثال قبل اگر سرعت حرکت سیم را در لحظه  $t=0$  حساب کنیم داریم  $y'(0) = 30$  و در این لحظه مقدار مشتق مثبت است، اما در لحظه آخر مقدار مشتق منفی است. تفاوت این دو لحظه در آن است که در لحظه  $t=0$  سیم رو به بالا حرکت می کند و مقدارهای  $y(t)$  در حال افزایش هستند، اما در لحظه  $t=6$ ، سیم رو به پایین حرکت می کند و مقدارهای  $y(t)$  رو به کاهش هستند. علامت مشتق نشان دهنده آن است که تابع در اطراف آن نقطه در حال افزایش است یا کاهش.

اگر تابع  $f$  در یک بازه حول  $x_0$  صعودی باشد، کسر  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  نامنفی است و حد آن نیز نامنفی خواهد بود، یعنی  $f'(x_0) \geq 0$ . اما اگر تابع  $f$  در یک بازه حول  $x_0$  نزولی باشد این کسر نامثبت است و حد آن نیز نامثبت خواهد بود، یعنی  $f'(x_0) \leq 0$ .

بنابراین علامت مشتق تابع نشانگر وضعیت تابع از لحاظ صعودی بودن یا نزولی بودن است.

اندازه مشتق نیز نشان می دهد شدت صعود یا نزول تابع چقدر است. برای مثال توابع  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = x^2$  هر دو روی بازه  $(0, \infty)$  صعودی هستند و مشتق آن ها مثبت است.

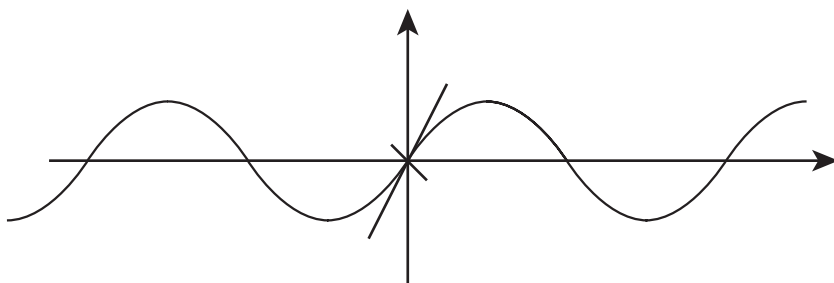


اما سرعت صعود  $f(x)$  مدام در حال کاهش است ولی سرعت صعود  $g(x)$  مدام در حال افزایش است. این مطلب در مشتق آن ها دیده می شود، داریم  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  و  $g'(x) = 2x$ .

با افزایش  $x$ ، مقدار  $f'(x)$  در حال کاهش ولی مقدار  $g'(x)$  در حال افزایش است. بنابراین اندازه مشتق نشان می دهد که مقادیر تابع با چه سرعتی در حال صعود یا نزول هستند.

مثال: سرعت صعود تابع  $y = \sin x$  در چه نقطه ای از همه بیشتر است؟

حل: باید ببینیم بیشترین مقدار  $y'$  در کجاست. داریم  $y' = \cos x$  و این تابع در  $x = 0^\circ$  مقدار ۱ را دارد که بیشترین مقدار  $\cos x$  است. پس در  $x = 0^\circ$ ، تابع  $y = \sin x$  بیشترین سرعت افزایش را دارد. البته در نقاط به صورت  $x = 2k\pi$  نیز همین وضعیت برقرار است.



تمرین

۱- متحرکی روی یک خط افقی حرکت می کند که قانون حرکت آن  $s = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 10$  است.

است، در چه بازه زمانی متحرک در جهت مثبت خط، حرکت می کند؟ در کدام بازه زمانی متحرک در جهت منفی خط حرکت می کند؟ در کدام لحظه ها متحرک تغییر جهت می دهد؟

۲- تویی را با سرعت اولیه  $78/4$  متر در ثانیه به طور قائم از زمین به بالا پرتاب می کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطه پرتاب به طرف بالا باشد، مطلوب است محاسبه

(الف) سرعت لحظه ای توپ در پایان یک ثانیه

(ب) سرعت لحظه ای در پایان ۴ ثانیه

(ج) مدت زمان لازم برای رسیدن توپ به بالاترین نقطه

(د) ارتفاعی که توپ بالا خواهد رفت

(ه) مدتی که طول می کشد تا توپ به زمین برسد.

(و) سرعت لحظه ای توپ وقتی که به زمین می رسد.

۳- منحنی به معادله  $y = x^2$  مفروض است. نقطه ای واقع بر این منحنی به دست آورید که خط قائم بر منحنی در آن نقطه از نقطه  $A(35, 22)$  بگذرد.

۴- دو منحنی به معادلات  $y = x^2 + \frac{1}{4}a^2$  و  $y = \frac{1}{4}x^2 + ax$  مفروضند که در آن  $a$  یک عدد ثابت است. ثابت کنید که این دو منحنی در نقطه  $A(a, \frac{3}{4}a^2)$  دارای خط مماس مشترک می باشند. اصطلاحاً می گویند این دو منحنی در نقطه  $A(a, \frac{3}{4}a^2)$  بر هم مماس هستند.

مشتق های یک طرفه : در محاسبه مشتق یک تابع  $f$  در نقطه  $x_0$  باید حد زیر را حساب کنیم.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

اگر در محاسبه این حد، ابتدا حدهای چپ و راست را حساب کنیم، حدهای به دست آمده را مشتق های چپ و راست  $f$  در  $x_0$  می نامند. مشتق های چپ و راست  $f$  در  $x_0$  را به شکل زیر نشان می دهند.

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

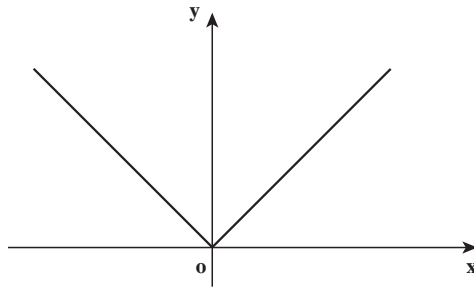
$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

در محاسبه مشتق های چپ و راست ممکن است به حالاتی برخورد کنیم که مشتق های چپ و راست مساوی نباشند که در این حالت گوئیم تابع مشتق پذیر نیست. در این حالت وضعیت نمودار تابع در سمت راست و چپ نقطه متفاوت است.

مثال : مشتق‌های چپ و راست تابع  $f(x)=|x|$  را در  $x=0$  حساب کنید.

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{حل :}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$



نمودار این تابع نیز نشان می‌دهد که در نقطه  $x=0$  در سمت چپ، نمودار تابع به صورت خط  $y=-x$  است و مماس بر آن دارای ضریب زاویه  $-1$  است ولی در سمت راست صفر نمودار تابع به صورت  $y=x$  است و ضریب زاویه خط مماس  $+1$  است.

مثال : مشتق‌های چپ و راست تابع  $f(x) = |\sin x|$  را در  $x=0$  بررسی کنید.

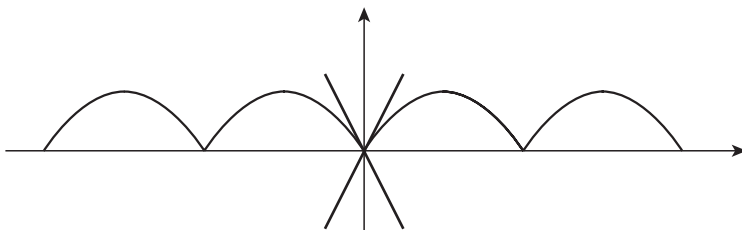
حل : برای  $x$ ‌های مثبت در بازه  $[0, \frac{\pi}{2}]$  مقدار  $\sin x$  نامنفی است و روی این بازه  $f(x) = \sin x$  پس مشتق راست  $f$  در صفر همان مشتق راست  $\sin x$  در صفر است. البته  $\sin x$  در صفر مشتق‌پذیر است و مشتق راست آن همان مشتق آن است. پس

$$f'_+(0) = \cos 0 = 1$$

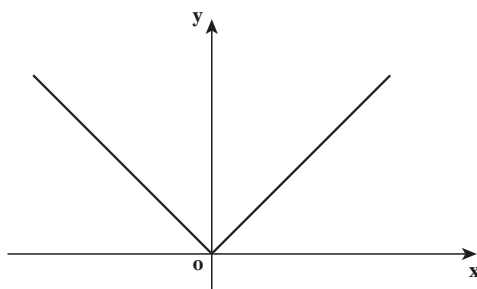
برای  $x$ ‌های منفی در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ ، مقادیر  $\sin x$  منفی است و تابع  $f(x)$  روی این بازه به صورت  $f(x) = -\sin x$  است. پس مشتق چپ  $f$  در صفر همان مشتق چپ  $-\sin x$  در صفر است. اما  $-\sin x$  تابعی مشتق‌پذیر است و مشتق چپ آن همان مشتق آن است. پس

$$f'_-(0) = -\cos 0 = -1$$

پس تابع  $f(x) = |\sin x|$  در صفر مشتق‌پذیر نیست و نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که مماس بر نمودار در سمت چپ و راست تابع با هم فرق دارند.



مشتق پذیری یک تابع خاصیتی قویتر از پیوستگی است. تابعی که در یک نقطه مشتق پذیر است، حتماً در آن نقطه پیوسته است. اما یک تابع می تواند در یک نقطه پیوسته باشد اما در آن نقطه مشتق پذیر نباشد. مثلاً تابع  $y = |x|$  در  $x = 0$  پیوسته است. اما در این نقطه مشتق پذیر نیست.



فرض کنید تابع  $f$  در اطراف نقطه  $x_0$  تعریف شده باشد و در این نقطه مشتق پذیر باشد، برای اثبات آن که  $f$  در  $x_0$  پیوسته است باید ثابت کنیم  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ، این شرط معادل با آن است که  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$  (چرا؟)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \times 0 = 0 \end{aligned}$$

### قضایای مشتق توابع

برای محاسبه مشتق توابع باید حد یک کسر را حساب کنیم و اگر تابع پیچیده باشد، محاسبه حد آن کسر مشکل خواهد شد. قضایایی در محاسبه مشتق توابع وجود دارد که کار محاسبه مشتق را آسانتر می کند. مثلاً سال گذشته دیدیم که برای دو تابع  $f$  و  $g$  که در اطراف نقطه ای مانند  $x_0$  تعریف

شده‌اند و در نقطه  $x_0$  مشتق‌پذیرند، تابع  $f+g$  نیز در  $x_0$  مشتق‌پذیر است و

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

درستی این قضیه به سادگی با محاسبه به دست می‌آید :

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0+h) - f(x_0)) + (g(x_0+h) - g(x_0))}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0)\end{aligned}$$

برای توابع  $f-g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  (که  $g(x_0) \neq 0$ ) نیز مشتق‌پذیری در  $x_0$  برقرار است و داریم :

$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

همچنین سال گذشته دیدیم برای ترکیب دو تابع  $f$  و  $g$  داریم :

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

اگر  $u(x)$  تابع مشتق‌پذیری باشد، مشتقات زیر برقرارند.

$$(u(x)^n)' = nu(x)^{n-1}u'(x)$$

$$(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \quad (0 < u(x))$$

$$(\sin(u(x)))' = \cos u(x) \cdot u'(x)$$

$$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = \frac{-u'(x)}{u(x)^2}$$

مثال : مشتق تابع  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$  را حساب کنید.

حل : اگر قرار دهیم  $g(x) = x^2+1$  و  $h(x) = \sqrt{x}$  داریم  $f(x) = h(g(x))$ . پس



$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

مثال: مشتق تابع  $f(x) = \sin^2 x$  را حساب کنید.

حل: اگر قرار دهیم  $g(x) = \sin x$ ,  $h(x) = x^2$  داریم  $f(x) = h(g(x))$ . پس

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 2(g(x)) \cdot g'(x) = 2 \sin^2 x \cos x$$

مثال: مشتق تابع  $f(x) = \sin x^2$  را حساب کنید.

حل: اگر توابع  $g$  و  $h$  مانند مثال پیش باشند داریم  $f(x) = g(h(x))$ . پس

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \cos h(x) \cdot h'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$$

## مسائل

۱- مشتق تابع  $y = x^3$  را از طریق تعریف در نقطه دلخواه  $x = a$  حساب کنید.

۲- معادله خط مماس بر نمودار تابع  $y = x + \frac{1}{x}$  را در نقطه به طول  $x = 1$  را بنویسید. معادله خط عمود بر نمودار این تابع را در نقطه به طول  $x = -1$  بنویسید.

۳- آیا می‌توان خطی از نقطه  $(3, 0)$  گذراند که بر سهمی  $y = x^2$  عمود شود؟ چند خط با این ویژگی وجود دارد؟

۴- ماشینی با سرعت ثابت در حال حرکت است و ناگهان ترمز می‌کند تا بایستد. معادله حرکت این ماشین روی محوری که بر خیابان منطبق است به صورت  $x(t) = -\frac{t^2}{4} + 3t$  است.  $t$  زمان بر حسب ثانیه است که از لحظه شروع ترمز اندازه‌گیری شده است و  $x(t)$  بر حسب متر است.

الف) ماشین پس از طی چند متر می‌ایستد؟

ب) ماشین پس از ترمز کردن چند ثانیه طول می‌کشد که بایستد؟

ج) سرعت ماشین در لحظه ترمز کردن چقدر بوده است؟

د) پس از چند ثانیه سرعت ماشین به ۲ متر بر ثانیه می‌رسد؟

۵- منحنی نمودار تابع  $y = \sin x$  با چه زاویه‌هایی محور  $x$ ها را قطع می‌کند؟ (زاویه خط مماس بر نمودار تابع با محور  $x$ ها)

۶- ثابت کنید خط‌های  $y = 2$  و  $y = -2$  بر نمودار تابع  $y = x + \frac{1}{x}$  مماس هستند.

۷- تابع  $y = x^3 - x^2 - x$  را در نظر بگیرید.

الف) این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

(ب) این تابع در چند نقطه محور  $x$  ها را قطع می کند و با چه زاویه ای محور  $x$  ها را قطع می کند؟  
 (ج) بیشترین سرعت نزول تابع در چه نقطه ای رخ می دهد و مقدار سرعت نزول در این نقطه چقدر است؟

(د) در چه نقاطی سرعت صعود تابع  $v$  است؟

۸- برای هر عدد ثابت  $c$  و تابع مشتق پذیر  $f$ ، با استفاده از تعریف مشتق ثابت کنید :

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

۹- برای سه تابع مشتق پذیر  $f, g, h$  ثابت کنید :

$$(f + g + h)'(x) = f'(x) + g'(x) + h'(x)$$

$$(f \cdot g \cdot h)'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

۱۰- با استفاده از مشتق حاصل ضرب توابع، مشتق توابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  را حساب کنید.

برای مشتق تابع  $y = x^n$  چه حدسی می زنید؟ حدس خود را برای  $y = x^4$  و  $y = x^5$  ثابت کنید.

۱۱- مشتق توابع زیر را حساب کنید.

(الف)  $y = \sin(1+x^2)$  (ب)  $y = \sin^2(x+1)$

(ج)  $y = \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}}$  (د)  $y = \sin(\sin x)$

۱۲- فرض می کنیم  $f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & \text{اگر } x \leq 2 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{اگر } x > 2 \end{cases}$  مطلوب است محاسبه  $f'_-(2)$  و  $f'_+(2)$

$f'_+(2)$ ، آیا این تابع در  $x=2$  مشتق پذیر است؟

۱۳- فرض می کنیم  $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{اگر } x \leq 3 \\ 3x + 2 & \text{اگر } x > 3 \end{cases}$  مطلوب است محاسبه  $f'_-(3)$  و  $f'_+(3)$

$f'_+(3)$ ، آیا این تابع در  $x=3$  مشتق پذیر است؟

۱۴- تابع  $y = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 2 \\ x^3, & x < 2 \end{cases}$  مفروض است. اگر این تابع در نقطه  $x=2$  مشتق پذیر

باشد اعداد ثابت  $a$  و  $b$  را به دست آورید.

## مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

در فصل قبل با عدد نپر آشنا شدیم. عدد نپر را که با  $e$  نشان دادیم حد دنباله  $(1 + \frac{1}{n})^n$  می باشد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

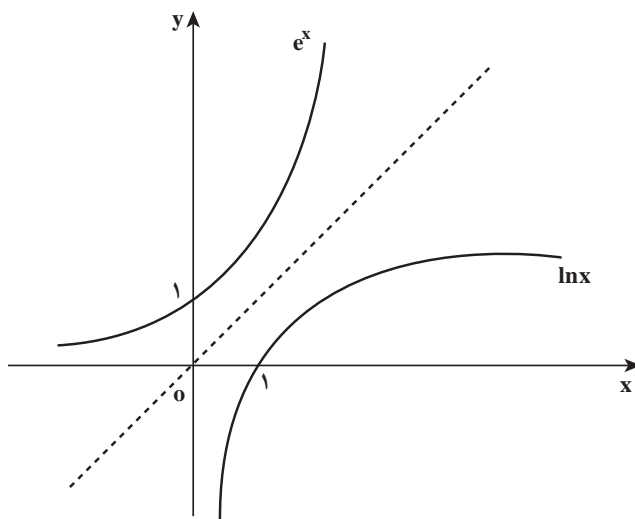
این عدد خصوصیت‌های قابل توجهی دارد که باعث می شود در ریاضیات به آن توجه شود. در حدگیری بالا اگر به جای عدد طبیعی  $n$ ، متغیر حقیقی  $x \in (0, \infty)$  نیز به کار برده شود، تساوی همچنان برقرار است، یعنی  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ . با در نظر گیری  $x = \frac{1}{t}$  شرط بزرگ شدن  $x$ ، معادل آن است که  $t$  به صفر نزدیک شود، پس:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$$

لگاریتم بر پایه عدد نپر را با  $\ln$  نشان می دهند و آن را لگاریتم طبیعی می نامند.

$$\ln a = b \Leftrightarrow e^b = a$$

توابع نمایی و لگاریتمی همگی توابعی پیوسته اند. از آن جا که  $1 < e$ ، توابع  $e^x$  (با دامنه  $\mathbb{R}$ ) و  $\ln x$  (با دامنه  $(0, \infty)$ ) صعودی و پیوسته می باشند.



از آنجا که  $\ln x$  تابعی پیوسته است از  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  می توان نتیجه گرفت

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

بنابراین :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

تساوی بالا نشان می دهد تابع  $\ln x$  در  $x=1$  مشتق پذیر است و مشتق آن در  $x=1$  برابر ۱ است.

زیرا

$$\ln'(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

در سایر نقاط  $x \in (0, \infty)$  نیز تابع  $\ln x$  مشتق پذیر است و  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  زیرا

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{\frac{x+h}{x} - \frac{x}{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \times \frac{x}{x} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+k)}{k} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \quad \left(k = \frac{h}{x}\right)$$

از آن جا که  $e^x$  وارون تابع  $\ln x$  است مشتق آن به شکل زیر به دست می آید.

$$\ln(e^x) = x \Rightarrow \ln'(e^x) \cdot (e^x)' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^x} \cdot (e^x)' = 1 \Rightarrow (e^x)' = e^x$$

بنابراین  $e^x$  تابعی است که مشتق آن با خودش مساوی است. این از ویژگی های برجسته عدد نپر است و برای سایر اعداد این ویژگی برقرار نیست.

حال، برای عدد مثبت دلخواه  $a$  می توانیم مشتق تابع نمایی  $y=a^x$  را حساب کنیم. ابتدا مشاهده می کنیم  $\ln y = x \ln a$ ، بنابراین

$$y = e^{\ln y} = e^{x \ln a}$$

با استفاده از قاعده مشتق تابع مرکب، اگر قرار دهیم  $u(x) = x \ln a$  داریم

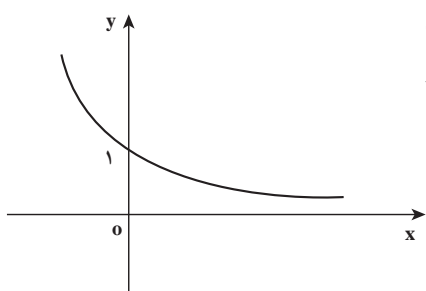
$$y = e^{u(x)} \Rightarrow y' = e^{u(x)} \cdot u'(x) = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

بنابراین

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

دیده می شود که فقط به ازای  $a = e$  مشتق  $a^x$  برابر خودش می شود.

اگر  $0 < a < 1$ ، مشتق  $a^x$  منفی است و این تابع نزولی است که قبلاً مشاهده کرده بودیم. در این حالت نمودار تابع  $y = a^x$  به شکل مقابل است.



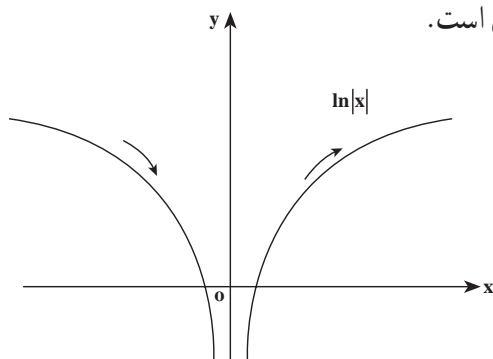
مثال: تابع  $\ln|x|$  روی  $\mathbb{R} - \{0\}$  قابل تعریف است. این تابع مشتق پذیر است و

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

برای مقادیر مثبت  $x$  درستی تساوی را دیده ایم و برای مقادیر منفی  $x$  داریم

$$\begin{aligned} (\ln|x|)' &= (\ln(-x))' = \ln'(-x) \times (-x)' \\ &= \frac{1}{-x} \times (-1) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

مشتق این تابع در  $x$  های منفی، منفی است و تابع در اعداد منفی نزولی است و مشتق این تابع در  $x$  های مثبت، مثبت و تابع در اعداد مثبت صعودی است.



اگر  $u(x)$  تابع مشتق پذیری باشد که همواره ناصفر است می توانیم تابع  $\ln|u(x)|$  را تشکیل دهیم که تابعی مشتق پذیر است. طبق قاعده مشتق تابع مرکب داریم

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

همچنین اگر  $u(x)$  تابع مشتق پذیر دلخواهی باشد، می توانیم تابع  $e^{u(x)}$  را تشکیل دهیم که تابعی مشتق پذیر است. طبق قاعده مشتق تابع مرکب داریم

$$(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

یکی از جاهایی که توابع نمایی رخ می دهند در رشد یا زوال کمیت ها است. برای مثال افزایش جمعیت انسان ها به گونه ای است که هر ساله با ضریب ثابتی از جمعیت سال قبل به جمعیت اضافه می شود. این ضریب را نرخ رشد جمعیت می نامند. اگر این ضریب را با  $k$  نشان دهیم و جمعیت در سال  $n$  ام را با  $y_n$  نشان دهیم، داریم

$$y_{n+1} = y_n + ky_n$$

اگر  $n$  را به صورت یک متغیر پیوسته از زمان در نظر بگیریم و به جای سال بعد یک لحظه جلوتر به اندازه  $h$  واحد را در نظر بگیریم می توانیم بنویسیم

$$y(x+h) \approx y(x) + h(ky(x))$$

یعنی

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx ky(x)$$

این رابطه نشان می دهد که در حد وقتی  $h$  به صفر نزدیک می شود، داریم

$$y'(x) = ky(x)$$

یعنی مشتق  $y$  مضربی از خود  $y$  است. این ویژگی فقط در توابع نمایی برقرار است و باید داشته باشیم  $y(x) = Ae^{Bx}$ . از آن جا که  $y'(x) = Ae^{Bx} \times B$  باید  $A, B = k$  نیز  $y(0)$  است و میزان جمعیت در لحظه ابتدایی است، پس

$$y(x) = Ae^{kx}$$

اگر  $k$  مثبت باشد این تابع صعودی است ولی  $k$  می تواند منفی هم باشد که نشان دهنده زوال یا کاهش  $y$  است. در مواردی مانند فروپاشی هسته های رادیواکتیو، میزان رادیواکتیو بودن مواد در حال کاهش است و مقدار  $k$  منفی خواهد بود.

۱- مشتق توابع زیر را حساب کنید.

(الف)  $y = e^{2x} + e^{-x} + 2$  (ب)  $y = xe^{x^2-1}$

(ج)  $y = \ln(1 + \cos^2 x)$  (د)  $y = \sin x e^{\cos x}$

۲- تابع  $y = xe^x$  را در نظر بگیرید که روی IR تعریف شده است.

(الف) این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

(ب) نمودار این تابع در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

(ج) زاویه برخورد نمودار تابع با محور x ها چقدر است؟

(د) نمودار این تابع چه شکلی می‌تواند باشد؟

۳- توابع زیر در چه نقاطی تعریف شده‌اند و مشتق آن‌ها در این نقاط چیست؟

(الف)  $\ln(\sin x)$  (ب)  $\ln|\cos x|$

(ج)  $\ln(x^2 - x)$  (د)  $\ln(|\ln x|)$

۴- هر ماده رادیواکتیو نیمه عمری دارد که با T نشان می‌دهیم. اگر  $f(t)$  مقدار ماده رادیواکتیو

در زمان t باشد، نیمه عمر T به معنای آن است که پس از گذشت T واحد زمانی مقدار ماده رادیواکتیو

نصف می‌شود، یعنی برای هر t داریم

$$f(t+T) = \frac{1}{2}f(t)$$

تابع  $f(t)$  به صورت  $f(t) = Ae^{kt}$  است که A مقدار ماده رادیواکتیو در لحظه ابتدایی  $t=0$  است.

مقدار k را بر حسب T تعیین کنید.

۵- برای یک عدد حقیقی b تابع  $y(x) = x^b$  را در نظر بگیرید و با نوشتن آن به صورت  $y(x) = e^{b \ln x}$

ثابت کنید.

$$(x^b)' = bx^{b-1}$$

مشتق ضمنی: اگر معادله‌ای بر حسب دو متغیر x و y داشته باشیم، ممکن است بتوان از آن

معادله y را بر حسب x حل کرد و یک تابع بر حسب x به دست آورد.

مثال: در معادله  $2x - 3y = 1$  می‌توانیم y را بر حسب x حل کنیم که نتیجه می‌شود

$$y = \frac{1}{3}(1 - 2x)$$

در اینجا گوییم معادله  $2x+3y=1$  به طور ضمنی تابع  $y=\frac{1}{3}(1-2x)$  را تعریف کرده است.  
 مثال: در معادله  $2x^2+3y^2=1$  می‌توانیم  $y$  را برحسب  $x$  حل کنیم، ولی فقط یک جواب به دست نمی‌آید و حداقل دو جواب به شکل زیر قابل محاسبه است.

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{3}(1-2x^2)}$$

هر کدام از این جواب‌ها توابعی هستند که به طور ضمنی توسط معادله  $2x^2+3y^2=1$  تعریف شده‌اند.

توابعی که به طور ضمنی توسط یک معادله تعریف می‌شوند، را توابع ضمنی می‌نامند. گاهی اوقات محاسبه صریح تابع ضمنی امکان‌ناپذیر است، اگر چه می‌دانیم چنین تابعی وجود دارد. اگر معادله تعریف کننده تابع ضمنی نسبت به متغیرهای  $x$  و  $y$  مشتق‌پذیری داشته باشد، تابع ضمنی نیز مشتق‌پذیر می‌شود و می‌توانیم مشتق آن را به طور ضمنی حساب کنیم.

مثال: فرض  $y(x)$  تابعی باشد که به طور ضمنی توسط معادله  $2x^2+3y^2=1$  تعریف شده است، یعنی  $2x^2+3y(x)^2=1$  طرفین توابع مشتق‌پذیری از  $x$  هستند و طرف دوم تابع ثابت است. با مشتق‌گیری از طرفین نتیجه می‌شود.

$$4x+6y(x)y'(x)=0$$

$$\Rightarrow y'(x) = -\frac{2x}{3y(x)}$$

$$y(x) = -\sqrt{\frac{1}{3}(1-2x^2)} \quad \text{یا} \quad y(x) = \sqrt{\frac{1}{3}(1-2x^2)}$$

اگر مشتق  $y$  را مستقیماً نیز حساب کنیم می‌بینیم تساوی  $y'(x) = -\frac{2x}{3y(x)}$  برقرار است.  
 در این مثال دیده می‌شود که برای محاسبه  $y'(x)$  تقسیم بر  $y(x)$  پیش می‌آید و لازم است  $y(x)$  ناصفر باشد بنابراین مشتق‌پذیری تابع ضمنی این مثال فقط در جاهایی است که  $y(x)$  ناصفر باشد. فرمول صریح  $y(x)$  نیز نشان می‌دهد که این تابع در  $x$ هایی که  $y(x)$  صفر است مشتق‌پذیری ندارد.  
 مثال: در معادله  $x^2+xy+y^2=3$ ،  $x=1$  و  $y=1$  یک جواب آن است و این معادله تعریف کننده یک تابع ضمنی  $y(x)$  است به گونه‌ای که  $y(1)=1$ . مشتق این تابع را در  $x=1$  بیابید.



حل : داریم  $x^2 + xy(x) + y(x)^2 = 3$  با مشتق گیری نسبت به  $x$  داریم

$$2x + y(x) + xy'(x) + 2y(x)y'(x) = 0$$

$$\Rightarrow y'(x) = -\frac{2x + y(x)}{x + 2y(x)}$$

$$\Rightarrow y'(1) = -\frac{2 \times 1 + y(1)}{1 + 2y(1)} = -\frac{2+1}{1+2} = -1$$

مثال : معادله  $x \sin y + x + y = 0$  دارای یک جواب  $x = \pi$  و  $y = -\pi$  است. و این معادله یک تابع

ضمنی  $y = f(x)$  تعریف می کند که  $f(\pi) = -\pi$  را حساب کنید.

حل : داریم  $x \sin f(x) + x + f(x) = 0$  با مشتق گیری داریم

$$\sin f(x) + x \cos f(x) \cdot f'(x) + 1 + f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1 + \sin f(x)}{x \cos f(x) + 1}$$

$$\Rightarrow f'(\pi) = -\frac{1 + \sin f(\pi)}{\pi \cos f(\pi) + 1} = \frac{1 + \sin(-\pi)}{\pi \cos(-\pi) + 1}$$

$$= \frac{1}{1 - \pi}$$

۱- نشان دهید که نقطه  $A(1,1)$  روی نمودار معادله  $x^4 + y^4 + x^2 y^2 - 3 = 0$  قرار دارد. اگر  $y(x)$  تابعی باشد که توسط این معادله تعریف شده است و  $y(1) = 1$ ، معادله خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطه  $A$  بنویسید.

۲- در تمرین‌های زیر با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی مشتق  $y$  نسبت به  $x$  را محاسبه کنید.

الف)  $x \sin y + y \cos x = 1$

ب)  $y = \cos(x - y)$

ج)  $x^2 y^2 = x^2 + y^2$

۳- معادله خط مماس بر منحنی به معادله  $x^4 + y^4 + x^2 y^2 - 3 = 0$  در نقطه  $A(1,1)$  را به دست آورید.

۴- معادله خط مماس بر منحنی به معادله  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$  در نقطه  $A(4,4)$  را به دست آورید.

۵- در چه نقطه‌ای از منحنی به معادله  $x + \sqrt{xy} + y = 1$  خط مماس بر منحنی موازی با محور  $x$  ها است؟

۶- اگر  $8y^2 - 2xy^3 = -16$  آهنگ تغییر لحظه‌ای  $y$  نسبت به  $x$  در نقطه  $A(3,2)$  را به دست آورید.