حرکت‌شناسی در دو بعد

فصل ۱

حرکت‌شناسی در دو بعد

نگاهی به فصل : دربارهٔ حرکت‌هایی که در اطراف ما رخ می‌دهد، اغلب پرسش‌های زیادی برای ما مطرح می‌شود. پرسش‌هایی چون : سیاره‌ها در چه مسیرهایی به دور خورشید حرکت می‌کنند؟ چرا هنگامی که فنری را می‌کشیم و رها می‌کنیم نوسان می‌کند؟ ماهواره‌ها را چگونه در مدار زمین قرار می‌دهند؟ و… . پاسخ این پرسش‌ها را باید در علم مکانیک جست‌وجو کرد. علمی که در آن حرکت اجسام مورد بررسی قرار می‌گیرد. هنگامی که چگونگی حرکت را توصیف می‌کنیم، با بخشی از علم مکانیک سروکار داریم که **حرکت‌شناسی** نامیده می‌شود. بخش دیگری از علم مکانیک **دینامیک** است که به بررسی رابطهٔ بین حرکت و نیرو می‌پردازد.

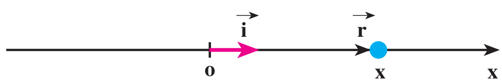
در فیزیک (۲) و آزمایشگاه تا اندازه‌ای حرکت‌شناسی در یک بُعد را مورد بررسی قرار دادیم، با کمیت‌های مکان، جابه‌جایی، سرعت متوسط و … آشنا شدیم و حرکت یکنواخت و حرکت با شتاب ثابت برروی یک خط راست را نیز بررسی کردیم. ما در زندگی روزمره بیشتر با حرکت‌هایی که در دو بعد و سه بعد انجام می‌شوند، سروکار داریم و بررسی آنها اهمیت زیادی دارد. از این رو، در این فصل، پس از یادآوری مطالبی که در کتاب فیزیک (۲) و آزمایشگاه خوانده‌اید، به بررسی حرکت در دو بعد می‌پردازیم.

۱ــ۱ــ حرکت در یک بعد

در شکل ۱ــ۱ جسمی بر روی محور x نمایش داده شده است. مکان جسم در این شکل با بردار $\vec{r}$ مشخص شده است. بردار $\vec{r}$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\vec{r} = x\,\vec{i} \qquad (۱ــ۱)$$

در این رابطه $\vec{i}$ بردارِ یکّه در جهت محور x است.



شکل ۱ــ۱

هنگامی که جسم روی محور x حرکت می‌کند، در هر لحظه بردار مکان آن تغییر می‌کند، برای توصیف حرکت جسم،یعنی برای مشخص کردن بردار مکان جسم در لحظهٔ t کافی است که x را به‌صورت تابعی از زمان داشته باشیم :

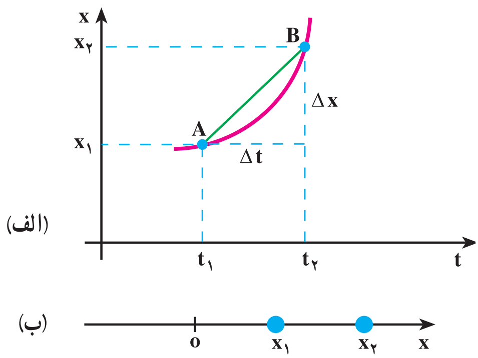
$$x = f(t) \qquad (۱\_۲)$$

این رابطه، **معادلهٔ حرکت** جسم نامیده می‌شود.

در کتاب فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم که حرکت جسم را می‌توان به صورت نموداری در دستگاه مختصات مکان ــ زمان نمایش داد. به عبارت دیگر، این نمودار با رسم تابع $x = f(t)$ در دستگاه مختصات $x - t$ به‌دست می‌آید.

تمرین ۱ــ۱

معادلهٔ حرکت جسمی در یک بعد در SI با رابطهٔ $x = -t^۲ + ۶t - ۸$ بیان شده است. الف) نمودار مکان ــ زمان آن را رسم کنید. ب) بردار مکان جسم را در زمان‌های $t = ۰$، ۱، ۳ (s) روی محور x نمایش دهید.



شکل ۱ــ۲

سرعت متوسط : نمودار مکان ــ زمان جسمی در شکل ۱ــ۲ــ الف نمایش داده شده است. همان‌طور که در شکل ۱ــ۲ــ ب نشان داده شده است، متحرک در لحظهٔ $t_۱$ در مکان $x_۱$ (نقطهٔ A) روی نمودار مکان ــ زمان و در لحظهٔ $t_۲$ در مکان $x_۲$ (نقطهٔ B) قرار دارد.

در این شکل، $\Delta x = x_۲ - x_۱$ مقدار جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_۲ - t_۱$، و نسبت $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ که شیب خط AB در دستگاه مکان ــ زمان است، سرعت متوسط متحرک نامیده می‌شود؛ این کمیت را با $\bar{v}_x$ نشان دادیم :

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (۱\_۳)$$

زیرنویس x مشخص می‌کند که حرکت در راستای محور x انجام می‌شود.

مثال ۱ـ۱

معادلهٔ حرکت جسمی در SI با رابطهٔ $x = ۲t^۲ + ۱$ بیان شده است. سرعت متوسط آن را در بازه‌های زمانی الف) ۱ تا ۲ ثانیه، ب) ۱ تا ۱/۱ ثانیه، پ) ۱ تا ۱/۰۱ ثانیه و ت) ۱ تا ۱/۰۰۱ ثانیه به دست آورید.

پاسخ : الف)

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\bar{v}_x = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۹ - ۳}{۲ - ۱} = ۶\, m/s$$

ب)

$$\bar{v}_x = \frac{۳/۴۲ - ۳}{۱/۱ - ۱} = ۴/۲\, m/s$$

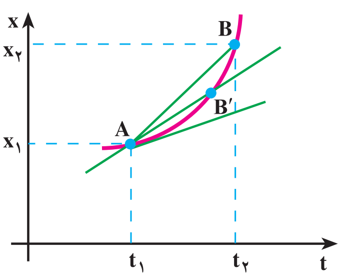
پ)

$$\bar{v}_x = \frac{۳/۰۴۰۲ - ۳}{۱/۰۱ - ۱} = ۴/۰۲\, m/s$$

ت)

$$\bar{v}_x = \frac{۳/۰۰۴۰۰۲ - ۳}{۱/۰۰۱ - ۱} = ۴/۰۰۲\, m/s$$

سرعت لحظه‌ای : در فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم که اگر بازهٔ زمانی Δt کوچک و کوچک‌تر شود، نقطهٔ B به نقطهٔ A نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود و سرانجام خط AB در نقطهٔ A بر نمودار مماس می‌گردد (شکل ۱ــ۳). شیب خط مماس را در این حالت، سرعت لحظه‌ای جسم در لحظهٔ $t_۱$ می‌نامیم.



شکل ۱ــ۳

به‌عبارت دیگر، هنگامی که $t_۲$ به $t_۱$ نزدیک می‌شود، یعنی وقتی Δt به سمت صفر میل می‌کند، نسبت $\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ سرعت لحظه‌ای جسم را در لحظهٔ $t_۱$ به دست می‌دهد. پس، **سرعت لحظه‌ای حدّ سرعت متوسط است هنگامی که Δt به سمت صفر میل می‌کند.** سرعت لحظه‌ای را با v_x نمایش می‌دهیم؛ در نتیجه داریم :

$$v_x = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (۱ــ۴)$$

در درس ریاضی دیده‌اید که این حد، برابر مشتق تابع x نسبت به زمان است که به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad (۱\_۵)$$

اگر $x = f(t)$ معلوم باشد، از رابطهٔ ۱ــ۵ می‌توان v_x را به‌صورت تابعی از زمان به دست آورد، این تابع، معادلهٔ سرعت نامیده می‌شود. در حالت حدی وقتی که Δt به سمت صفر میل می‌کند، وتر AB در نقطهٔ A بر نمودار مکان ــ زمان مماس می‌شود. این، همان تعبیر هندسی **مشتق** است که در درس ریاضی خوانده‌اید. از این به بعد، سرعت لحظه‌ای را برای اختصار سرعت می‌نامیم.

مثال ۱ــ۲

در مثال ۱ــ۱، معادلهٔ حرکت متحرک به صورت $x = ۲t^۲ + ۱$ است.

الف) معادلهٔ سرعت آن را به دست آورید.

ب) نمودار سرعت ــ زمان را برای آن رسم کنید.

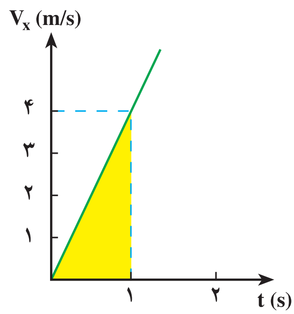
پ) سرعت متحرک را در لحظهٔ $t = ۱s$ به دست آورید.

پاسخ

الف) با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۵ داریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ۴t$$

ب) نمودار سرعت ــ زمان به صورت خط راستی است که از مبدأ دستگاه v - t می‌گذرد.



شکل ۱ــ۴

پ)

$$v_x = ۴t$$

$$t = ۱s \Rightarrow v_x = ۴\,m/s$$

این نتیجه را می‌توانستیم از مثال ۱ــ۱ حدس بزنیم؛ زیرا در آن مثال، با نزدیک شدن $t_۲$ به $t_۱$، سرعت متوسط جسم نیز به مقدار ۴ m/s (سرعت جسم در لحظهٔ $t = ۱s$) نزدیک می‌شود.

بردار سرعت متحرک را در حرکت یک بعدی می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\vec{v} = v_x \vec{i} \qquad (۱\_۶)$$

هنگامی که جسم در جهت محور x حرکت می‌کند، v_x مثبت است (چرا؟) و در نتیجه بردار سرعت جسم در جهت این محور قرار می‌گیرد. هنگامی که جسم در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، v_x منفی است و بردار سرعت در جهت عکس این محور قرار می‌گیرد.

مثال ۱ــ۳

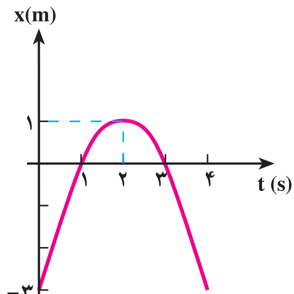
معادلهٔ حرکت جسمی در SI با رابطهٔ $x = -t^۲ + ۴t - ۳$ بیان شده است. الف) معادلهٔ سرعت آن را به دست آورید. ب) نمودارهای مکان ــ زمان و سرعت ــ زمان متحرک را در ۴ ثانیهٔ اول رسم کنید. پ) نمودار مسیر حرکت جسم را رسم و چگونگی حرکت را توصیف کنید.

پاسخ

الف) با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۵ داریم:

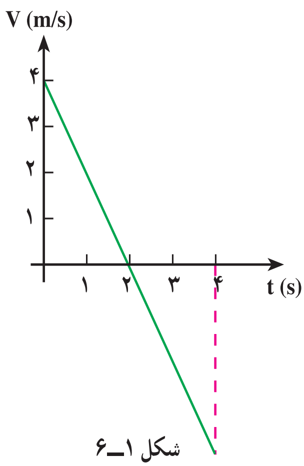
$$v_x = \frac{dx}{dt} = -۲t + ۴$$

ب) نمودار مکان ــ زمان متحرک به صورت یک سهمی (شکل ۱ــ۵) است که بیشینهٔ آن در لحظهٔ $t=۲s$ است (چرا؟) همچنین جسم در لحظه‌های $t=۱s$ و $t=۳s$ در مبدأ و در لحظهٔ $t=۰$، در نقطهٔ $x=-۳m$ قرار دارد.



شکل ۱ــ۵

نمودار سرعت ــ زمان متحرک به صورت یک خط راست است (شکل ۱ــ۶) که در بند (الف) معادلهٔ آن را به دست آوردیم.

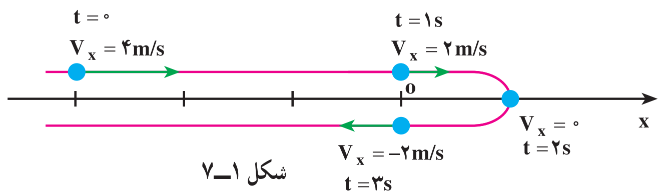


شکل ۱ــ۶

پ) با توجه به این نمودارها ملاحظه می‌شود که متحرک در لحظهٔ $t=۰$ در مکان $x=-۳m$ قرار دارد و با سرعت $۴m/s$ در جهت محور x حرکت می‌کند؛ سپس سرعت آن به‌تدریج، کاهش می‌یابد (شیب

مماس بر نمودار مکان ــ زمان در شکل ۱ــ۵ به‌تدریج ،کم می‌شود) تا در لحظهٔ $t = ۲s$ که سرعت آن صفر می‌شود. می‌توان گفت شیب مماس بر نمودار مکان ــ زمان در این لحظه صفر می‌شود.

از لحظهٔ $t = ۲s$ به بعد متحرک برمی‌گردد و در خلاف جهت محور x شروع به‌حرکت می‌کند و v_x منفی می‌شود. در برگشت، اندازهٔ سرعت افزایش می‌یابد و در لحظهٔ $t = ۳s$ دوباره از مبدأ می‌گذرد. در این لحظه سرعت آن $-۲\,m/s$ است. مسیر حرکت جسم در شکل ۱ــ۷ رسم شده و بردار سرعت آن نیز روی شکل نمایش داده شده است.



شکل ۱ــ۷

در شکل ۱ــ۷ باید مسیر روی محور x رسم شود، ولی ما برای اینکه مسیر را بهتر مشخص کنیم، آن را در بالا و پایین این محور رسم کرده‌ایم. ملاحظه می‌شود که در تمام مسیر رفت‌وبرگشت، معادلهٔ مکان و معادلهٔ سرعت جسم، به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x = -t^۲ + ۴t - ۳$$

$$v_x = -۲t + ۴$$

مثال ۱ــ۴

متحرکی با سرعت ثابت $۵\,m/s$ ، در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. این متحرک در لحظهٔ $t = ۰$ از نقطهٔ $x = ۱۰m$ می‌گذرد. الف) معادلهٔ حرکت را بنویسید. ب) تعیین کنید که متحرک پس از چه زمانی به مبدأ مختصات می‌رسد.

پاسخ

الف) در فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم که معادلهٔ حرکت یکنواخت یک جسم روی خط راست با رابطهٔ

$$x = v_x t + x_{۰} \qquad (۷ـ۱)$$

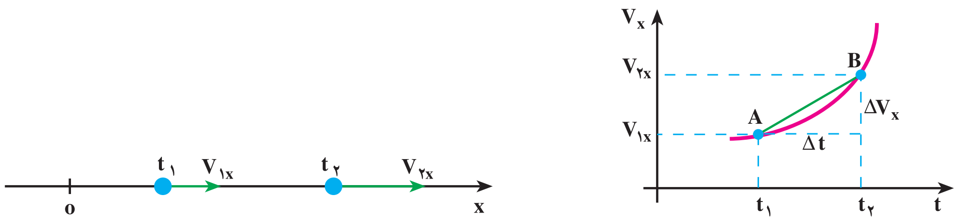
بیان می‌شود که در آن v_x سرعت (ثابت) جسم و $x_{۰}$ مکان جسم در لحظهٔ $t = ۰$ است.

در نتیجه، چون در این مثال، $x_{۰} = +۱۰\,m$ و $v_x = -۵\,m/s$ است، معادلهٔ حرکت جسم به‌صورت زیر خواهد بود.

ب) $x = -۵t + ۱۰$

$$x = ۰ \Rightarrow ۰ = -۵t + ۱۰ \Rightarrow t = ۲s$$

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای : می‌دانید هنگامی که سرعت جسم تغییر می‌کند، حرکت را **شتاب‌دار** می‌نامند. در شکل ۱ــ۸ــ الف نمودار سرعت ــ زمان یک حرکت شتاب‌دار و در شکل ۱ــ۸ــ ب بردار سرعت متحرک، در زمان‌های $t_۱$ و $t_۲$، نشان داده شده است.



(الف) (ب)

شکل ۱ــ۸

همچنین می‌دانید که $\Delta v_x = v_{۲x} - v_{۱x}$ را تغییر سرعت متحرک در بازهٔ زمانی Δt و نسبت $\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ را که شیب خط AB در نمودار سرعت ــ زمان است، شتاب متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی می‌نامند.

این کمیت را با نماد $\bar{a}$ نشان می‌دهیم؛ در نتیجه داریم :

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad (۸ـ۱)$$

در اینجا هم هنگامی که Δt بسیار کوچک و کوچک‌تر می‌شود، نقطهٔ B، در شکل ۱ــ۸ــ الف، به نقطهٔ A نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود و سرانجام خط AB در نقطهٔ A بر نمودار سرعت ــ زمان مماس می‌گردد. شیب خط مماس بر نمودار در نقطهٔ A را شتاب لحظه‌ای جسم در لحظهٔ $t_۱$ می‌نامیم.

اکنون می‌توان شتاب لحظه‌ای را، مانند سرعت لحظه‌ای، به‌طور دقیق تعریف کرد که : هنگامی که Δt به سمت صفر میل می‌کند، نسبت $\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ شتاب لحظه‌ای جسم را در لحظهٔ $t_۱$ به دست

می‌دهد. به عبارت دیگر، **شتاب لحظه‌ای حد شتاب متوسط است هنگامی که Δt به سمت صفر میل می‌کند**. شتاب لحظه‌ای را با a_x نمایش می‌دهیم. در نتیجه داریم :

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad (۹\text{ــ}۱)$$

به بیان ریاضی، شتاب لحظه‌ای مشتق سرعت نسبت به زمان است. از این به بعد برای اختصار شتاب لحظه‌ای را شتاب می‌نامیم. اکنون با استفاده از رابطه‌های ۱ــ۵ و ۱ــ۹ شتاب را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

مثال ۱ـ۵

معادلهٔ حرکت جسمی در SI به‌صورت $x = t^3 - 6t^2 + 9t$ بیان شده است.

الف) شتاب متوسط آن را در بازهٔ زمانی ۱ تا ۲ ثانیه به دست آورید. ب) شتاب آن را در لحظه‌های $t = 0$ و $t = 1$ ثانیه پیدا کنید.

پاسخ

الف) برای به دست آوردن شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی لازم است سرعت متحرک را در لحظه‌های $t = 1s$ و $t = 2s$ داشته باشیم. ابتدا معادلهٔ سرعت را به‌دست می‌آوریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

از این معادله در لحظه‌های $t = 1s$ و $t = 2s$ به ترتیب، مقادیر 0 (صفر) و $-3\ m/s$ برای سرعت به دست می‌آید. در نتیجه برای شتاب متوسط خواهیم داشت :

$$\bar{a}_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{-3 - 0}{2 - 1} = -3\ m/s^2$$

ب) ابتدا معادلهٔ شتاب متحرک را می‌نویسیم :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6t - 12$$

با استفاده از این رابطه، شتاب متحرک در لحظه‌های $t = 0s$ و $t = 1s$ چنین به دست می‌آید :

$$t = 0s \rightarrow a_x = -12\ m/s^2$$

$$t = 1s \rightarrow a_x = -6\ m/s^2$$

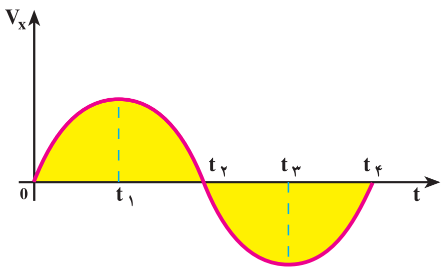
بردار شتاب را می‌توان به صورت زیر نمایش داد :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} \qquad (۱۰\_۱)$$

در رابطهٔ بالا اگر a_x مثبت باشد، $\vec{a}$ در جهت محور x و اگر منفی باشد در خلاف جهت محور x قرار می‌گیرد.

تمرین ۱ـ۲

نمودار سرعت ــ زمان متحرکی در شکل ۱ــ۹ نشان داده شده است. تعیین کنید در چه بازهٔ زمانی بردار شتاب در جهت محورx و درکدام بازهٔ زمانی در خلاف جهت محور x است.



شکل ۱ــ۹

هنگامی که اندازهٔ سرعت متحرکی زیاد می‌شود حرکت را **تندشونده** و هنگامی که اندازهٔ سرعت متحرکی کاهش می‌یابد، حرکت را **کندشونده** می‌نامند.

فعالیت ۱ـ۱

در تمرین ۱ــ۲، سرعت متحرک در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۱$ مثبت است. a_x نیز مثبت است؛ زیرا شیب مماس بر نمودار در این بازهٔ زمانی مثبت است و حرکت تندشونده است. حاصل‌ضرب a_xv_x نیز مثبت است. اکنون جاهای خالی را در گزاره‌های زیر پرکنید.

الف) در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ سرعت متحرک ...... است. a_x ...... است. حرکت ...... است. حاصل‌ضرب a_xv_x ...... است.

ب) در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۳$ سرعت متحرک ...... است. a_x ...... است. حرکت ...... است. حاصل‌ضرب a_xv_x ...... است.

پ) در زمان‌های بزرگ‌تر از $t_۳$، سرعت متحرک ...... است. a_x ...... است. حرکت ...... است. حاصل‌ضرب a_xv_x ...... است.

در فعالیت قبل ملاحظه می‌کنید که وقتی $a_x v_x > 0$ باشد حرکت تندشونده و وقتی $a_x v_x < 0$ باشد، حرکت کندشونده است.

مثال ۱ـ۶

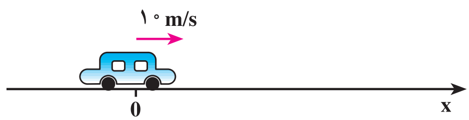
خودرویی با سرعت $10\,m/s$ در حال حرکت است. راننده ترمز می‌کند و سرعت خودرو با شتاب $2\,m/s^2$ کاهش می‌یابد. الف) چه زمانی طول می‌کشد تا خودرو متوقف شود؟ ب) در این بازهٔ زمانی خودرو چه مسافتی را می‌پیماید؟

پاسخ

الف) در کتاب فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم که در حرکت با شتاب ثابت معادلهٔ سرعت به‌صورت زیر است :

$$v_x = a_x t + v_{0x} \qquad (۱۱ـ۱)$$

که در آن a_x شتاب (ثابت) جسم و v_{0x} سرعت جسم در لحظهٔ $t = 0$ است. در شکل ۱ـ۱۰ حرکت خودرو را در جهت محور x در نظر گرفته‌ایم.



شکل ۱ـ۱۰

بنابراین $v_{0x} = +10\,m/s$ و چون حرکت کندشونده است، علامت a_x مخالف علامت v_{0x} است؛ در نتیجه $a_x = -2\,m/s^2$. با استفاده از معادلهٔ سرعت داریم :

$$v_x = -2t + 10$$

هنگامی که خودرو متوقف می‌شود $v_x = 0$ است؛ در نتیجه :

$$0 = -2t + 10 \Longrightarrow t = 5s$$

ب) می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت معادلهٔ حرکت به صورت زیر است :

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t \qquad (۱۲ـ۱)$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}(-2)(5)^2 + 10(5) + 0 = 25m$$

این نتیجه را می‌توانستیم از رابطهٔ مستقل از زمان زیر نیز به دست آوریم :

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x (x - x_0) \qquad (۱۳ـ۱)$$

$$0 - (10)^2 = 2(-2)(\Delta x) \Longrightarrow \Delta x = 25m$$

حرکت سقوط آزاد : در فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم که سقوط آزاد اجسام در نزدیکی سطح زمین یکی از نمونه‌های مهم حرکت با شتاب ثابت بر روی مسیر مستقیم است. شتاب این حرکت در خلأ برابر شتاب گرانش (g) و جهت آن، رو به پایین است.

مثال ۱ـ۷

سنگی را از بالای ساختمان بلندی به ارتفاع ۴۵m رها می‌کنیم، الف) سنگ پس از چه زمانی به زمین می‌رسد؟ ب) سرعت آن،هنگام رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه و چند کیلومتر بر ساعت است؟ ($g=10\,m/s^2$)

پاسخ

الف) برای بررسی حرکت سقوط آزاد اجسام، محور y را در راستای قائم و رو به بالا و مبدأ آن را نقطهٔ رها کردن جسم در نظر می‌گیریم. در این صورت، معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت ۱ـ۱۲ به صورت زیر به دست می‌آید :

$$y=-\frac{1}{2}gt^2$$

$$-45=-\frac{1}{2}(10)t^2 \Rightarrow t=3s$$

ب) با استفاده از معادلهٔ سرعت ۱ـ۱۱ داریم :

$$v=-gt$$

$$v=-10\times 3=-30\,m/s=-108\,km/h$$

فعالیت ۱ـ۲

از دوست خود بخواهید، مطابق شکل ۱ـ۱۱، خط‌کش مدرّج بلندی را بین انگشتان شما نگه دارد و در یک لحظه آن را رها کند. چگونه می‌توانید زمان واکنش خود را (یعنی زمانی که طول می‌کشد تا پس از مشاهدهٔ رها شدن خط‌کش، آن را بگیرید) اندازه‌گیری کنید؟

شکل ۱ـ۱۱

اکنون، مسئلهٔ پرتاب جسمی را در راستای قائم به طرف بالا بررسی می‌کنیم. جهت محور y را به طرف بالا در نظر می‌گیریم. معادله‌های حرکت و سرعت با رابطه‌های زیر بیان می‌شود :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \qquad (1\text{–}14)$$

$$v_y = -gt + v_{0y} \qquad (1\text{–}15)$$

و معادلهٔ مستقل از زمان آن به صورت زیر است :

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0) \qquad (1\text{–}16)$$

مثال ۱ــ۸

سنگی را با سرعت $20 m/s$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. الف) چه زمانی طول می‌کشد تا سنگ به بالاترین ارتفاع برسد؟ ب) سنگ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ پ) چه زمانی طول می‌کشد تا سنگ به نقطهٔ پرتاب برگردد؟ ت) سرعت سنگ در این نقطه چقدر است؟ ($g = 10 m/s^2$)

پاسخ

الف) محور y را روبه بالا و مبدأ آن را در نقطهٔ پرتاب فرض می‌کنیم. درنتیجه، در لحظهٔ پرتاب داریم $v_{0y} = +20 m/s$ و $y_0 = 0$. در شروع حرکت، جسم در جهت محور y حرکت می‌کند، با استفاده از رابطه‌های ۱ــ۱۴ و ۱ــ۱۵ داریم :

$$y = -5t^2 + 20t$$

$$v_y = -10t + 20$$

در بالاترین نقطه، $v_y = 0 \ m/s$ ، در نتیجه :

$$0 = -10t + 20 \Rightarrow t = 2s$$

$$t = 2s$$

ب) بالاترین ارتفاعی که سنگ به آن می‌رسد از معادلهٔ حرکت به دست می‌آید :

$$y = -5(2)^2 + 20(2) = 20m$$

پ) در بازگشت سنگ به نقطهٔ پرتاب، داریم $y = 0$، در نتیجه :

$$-5t^2 + 20t = 0$$

و یا

$$t(-5t + 20) = 0$$

جواب‌های این معادله $t = ۰$ و $t = ۴s$ است. $t = ۰$ مربوط به لحظهٔ پرتاب است و $t = ۴s$ زمانی است که طول می‌کشد تا سنگ به نقطهٔ پرتاب برگردد.

ت) سرعت متحرک در این لحظه از معادلهٔ سرعت به‌دست می‌آید :

$$v_y = -۱۰(۴) + ۲۰ = -۲۰ m/s$$

علامت منفی نشان می‌دهد که در هنگام بازگشت سنگ به نقطهٔ پرتاب، سوی سرعت آن، رو به پایین است. ملاحظه می‌شود که با معادله‌های حرکت و سرعت، می‌توان چگونگی حرکت سنگ را در هر لحظه از رفت و برگشت، توصیف کرد.

مثال ۱ــ۹

از بالای ساختمانی به ارتفاع $۵۰m$ سنگی را در راستای قائم با سرعت $۱۵m/s$، به بالا پرتاب می‌کنیم. چه مدت زمانی طول می‌کشد تا سنگ به زمین برسد؟

پاسخ

محور مختصات را رو به بالا و مبدأ آن را در بالای ساختمان در نظر می‌گیریم. در نتیجه، معادلهٔ حرکت سنگ به صورت زیر است :

$$y = -۵t^۲ + ۱۵t$$

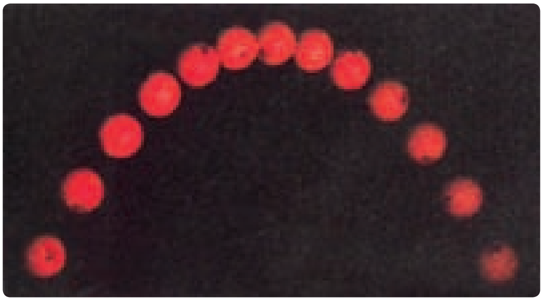
در پایین ساختمان $y = -۵۰m$، در نتیجه :

$$-۵۰ = -۵t^۲ + ۱۵t$$

با حل این معادله، دو مقدار $t = -۲s$ و $t = ۵s$ به دست می‌آید؛چون حرکت از لحظهٔ $t = ۰$ شروع شده است، جواب اول قابل قبول نیست؛ در نتیجه زمان رسیدن سنگ به زمین $۵s$ است.

۱ــ۲ــ حرکت در دو بُعد یا حرکت در صفحه

در بخش ۱ــ۱ حرکت در یک بعد را مرور کردیم. در این بخش به بررسی حرکت در صفحه که آن را حرکت دو بُعدی نیز می‌نامیم، می‌پردازیم. حرکت گلولهٔ توپی که شلیک می‌شود و یا حرکت یک سیاره به دور خورشید و یا حرکت اتومبیل در پیچ جاده و ... مثال‌هایی از حرکت دو بعدی هستند.



شکل ۱ــ۱۲ــ مسیر توپ گلف

در فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم که مکان جسم در یک صفحه، با بردار $\vec{r}$ نمایش داده می‌شود. این بردار را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \qquad (۱۷ـ۱)$$

که در آن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به ترتیب بردارهای یکّه در جهت‌های x و y هستند.

چون هنگام حرکت جسم،در هر لحظه بردار مکان آن تغییر می‌کند، برای مشخص کردن مکان جسم در حین حرکت، کافی است که مؤلفه‌های x و y را به صورت تابع‌هایی از زمان داشته باشیم :

$$x = f(t) \text{ و } y = g(t) \qquad (۱۸ـ۱)$$

رابطه‌های ۱ــ۱۸ معادله‌های حرکت یک جسم را در دو بُعد نشان می‌دهند. واضح است که در حرکت دو بعدی، بردار مکان نیز تابعی از زمان است :

$$\vec{r} = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j} \qquad (۱۹ـ۱)$$

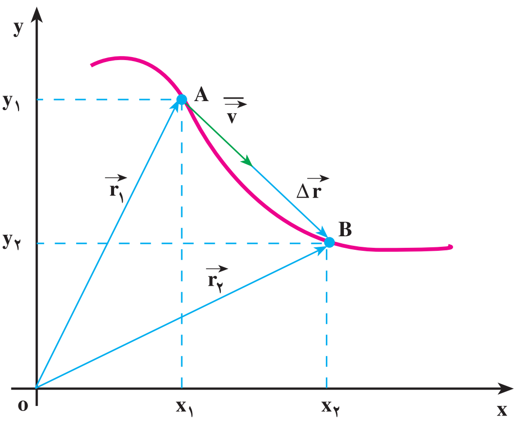
جابه‌جایی و سرعت متوسط : برای بررسی حرکت جسم روی مسیری مطابق شکل ۱ــ۱۳، فرض کنید متحرکی در لحظهٔ t_1 در نقطهٔ A (مکان $\vec{r}_1$) و در لحظهٔ t_2 در نقطهٔ B (مکان $\vec{r}_2$) باشد. برداری که از A به B رسم می‌شود جابه‌جایی (تغییر مکان) جسم را در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ نمایش می‌دهد. این بردار که در شکل ۱ــ۱۳ رسم شده است از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (۲۰ـ۱)$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j}) - (x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j})$$

$$\Delta\vec{r} = (\Delta x)\,\vec{i} + (\Delta y)\,\vec{j} \qquad (۲۱ـ۱)$$

در رابطهٔ ۱ــ۲۱، $\Delta x = x_۲ - x_۱$ و $\Delta y = y_۲ - y_۱$ است.



شکل ۱ــ۱۳ــ بردار سرعت متوسط و بردار تغییر مکان هم‌جهت‌اند.

سرعت متوسط جسم در یک بازهٔ زمانی معین، همانند حالت یک بعدی، به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \tag{۱ــ۲۲}$$

با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۲۱ داریم :

$$\vec{\bar{v}} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\vec{i} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\vec{j} \tag{۱ــ۲۳}$$

اگر $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ را با $\bar{v}_x$ و $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ را با $\bar{v}_y$ نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$\vec{\bar{v}} = (\bar{v}_x)\,\vec{i} + (\bar{v}_y)\,\vec{j} \tag{۱ــ۲۴}$$

پرسش ۱ـ۱

رابطهٔ ۱ــ۲۲ نشان می‌دهد که سرعت متوسط، کمیتی برداری است و $\vec{\bar{v}}$ با $\Delta\vec{r}$ هم‌جهت است؛ چرا؟

مثال ۱ـ۱

معادله‌های حرکت جسمی در دو بُعد، در SI به صورت زیر است :

$x = ۲t$ و $y = -t^۲ + ۴t$

الف) بردار مکان جسم را در لحظه‌های $t_۱ = ۱s$ و $t_۲ = ۲s$ به دست آورید.

ب) سرعت متوسط آن را در بازهٔ زمانی ۱ تا ۲ ثانیه تعیین و بزرگی آن را حساب کنید.

پاسخ

الف) در $t_۱ = ۱s$:

$x_۱ = ۲m$ و $y_۱ = +۳m$

$\vec{r}_۱ = ۲\vec{i} + ۳\vec{j}$

به همین ترتیب در $t_۲ = ۲s$:

$x_۲ = ۴m$ و $y_۲ = ۴m$

$\vec{r}_۲ = ۴\vec{i} + ۴\vec{j}$

ب) در بازهٔ زمانی ۱ تا ۲ ثانیه :

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = ۴ - ۲ = ۲m$$

$$\Delta y = y_۲ - y_۱ = ۴ - ۳ = ۱m$$

$$\overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲}{۱} = ۲\,m/s$$

$$\overline{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{۱}{۱} = ۱\,m/s \qquad \vec{v} = ۲\vec{i} + \vec{j}$$

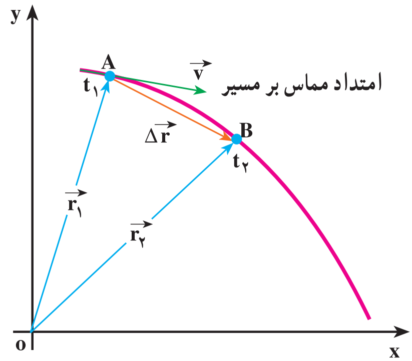
$$(\overline{v})^۲ = (\overline{v}_x)^۲ + (\overline{v}_y)^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۵$$

$$\overline{v} = \sqrt{۵} \simeq ۲/۲۳\,m/s$$

سرعت لحظه‌ای : در شکل ۱ـ۱۴ نمودار حرکت جسمی روی یک مسیر خمیده در صفحهٔ xoy نشان داده شده است. مکان جسم در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$، مشخص شده است. پیش‌تر گفتیم که بردار سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی معین، با بردار جابه‌جایی مربوط به آن، هم‌جهت است. همچنین می‌دانید هنگامی که بازهٔ زمانی Δt، کوچک و کوچک‌تر شود، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای

نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؛ یعنی، بردار سرعت لحظه‌ای حدّ بردار سرعت متوسط است وقتی Δt به سمت صفر، میل می‌کند :

$$\vec{v} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{حد}} (\overline{\vec{v}}) = \underset{\Delta t \to 0}{\text{حد}} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (۲۵\text{ـ}۱)$$



شکل ۱ــ۱۴ــ سرعت لحظه‌ای در امتداد مماس بر مسیر حرکت است.

به عبارت دیگر می‌توان گفت که «سرعت لحظه‌ای، مشتق بردار مکان جسم، نسبت به زمان است» :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (۲۶\text{ـ}۱)$$

در حدّی که Δt به سمت صفر میل کند، با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۲۱ می‌توان سرعت لحظه‌ای جسم را برحسب مؤلفه‌های آن در دو امتداد x و y به‌دست آورد :

$$\vec{v} = (\frac{dx}{dt})\vec{i} + (\frac{dy}{dt})\vec{j}$$

$$\vec{v} = (v_x)\vec{i} + (v_y)\vec{j} \qquad (۲۷\text{ـ}۱)$$

در شکل ۱ــ۱۴می‌بینید که وقتی t_2 به سمت t_1 میل کند، راستای بردار جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ ، به سمت راستای مماس بر منحنی مسیر، در نقطهٔ A میل خواهد کرد. بنابراین، چون بردار سرعت متوسط همواره هم‌جهت با جابه‌جایی است، در حدّی که Δt به سمت صفر میل می‌کند، بردار سرعت لحظه‌ای بر مسیر حرکت در نقطهٔ A مماس خواهد شد. بدین‌ترتیب می‌توان گفت هنگامی که جسم روی یک مسیر خمیده حرکت می‌کند، جهت بردار سرعت آن که همواره بر مسیر حرکت مماس است، در هر لحظه تغییر می‌کند. از این پس، برای اختصار، بردار سرعت لحظه‌ای را سرعت می‌نامیم.

مثال ۱ــ۱۱

خودرویی در یک صفحهٔ افقی که آن را در این‌جا صفحهٔ xoy می‌نامیم، حرکت می‌کند. معادله‌های حرکت آن در SI به‌صورت زیر است :

$$x = ۶t + ۵ \quad \text{و} \quad y = ۴t^{۲}$$

بزرگی سرعت خودرو را در $t = ۱s$ به‌دست آورید.

پاسخ

با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۲۷ مؤلفه‌های سرعت به‌دست می‌آید :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ۶\,m/s$$

ملاحظه می‌شود که مؤلفهٔ افقی سرعت مقدار ثابتی دارد و تابع زمان نیست. به‌همین ترتیب برای مؤلفهٔ قائم سرعت داریم :

$$v_y = \frac{dy}{dt} = ۸t$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود این مؤلفه، تابع زمان است و بزرگی آن در $t = ۱s$ برابر است با :

$$v_y = ۸\,m/s$$

پس بزرگی سرعت در $t = ۱s$ برابر است با :

$$v = \sqrt{{v_x}^{۲} + {v_y}^{۲}} = \sqrt{۶^{۲} + ۸^{۲}} = ۱۰\,m/s$$

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

می‌دانید وقتی که سرعت جسم در حال حرکت تغییر می‌کند، حرکت را شتاب‌دار می‌گویند. البته این تغییر سرعت می‌تواند به‌معنای تغییر در بزرگیِ سرعت،تغییر در جهتِ سرعت و یا هر دو باشد. دیدیم که وقتی مسیر حرکت جسم خمیده است، جهت سرعت آن الزاماً تغییر می‌کند. بنابراین، حرکت بر روی مسیر منحنی، حرکتی شتاب‌دار است. حتّی اگر بزرگی سرعت هم تغییر نکند.

فعالیت ۱ـ۳

دو حرکت شتاب‌دار مثال بزنید که در آنها، بزرگی سرعت تغییر نکند.

در شکل ۱ــ۱۵ــ الف بردارهای سرعت در دو لحظهٔ t_1 و t_2 روی مسیر نشان داده شده است. برای محاسبهٔ تغییر سرعت در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ از نقطهٔ O' بردارهای مساوی با $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ رسم می‌کنیم و $\Delta\vec{v}$ را به‌دست می‌آوریم (شکل ۱ــ۱۵ــ ب). در اینجا نیز، مشابه حرکت یک بعدی، بردار شتاب متوسط را در بازهٔ زمانی Δt به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

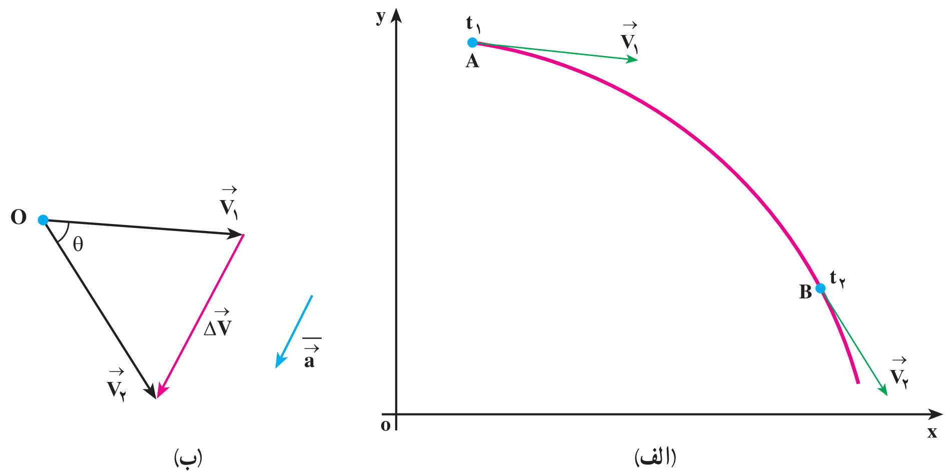
$$\overline{\vec{a}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (۱ـ۲۸)$$

با استفاده از رابطهٔ ۱ــ۲۷ داریم :

$$\overline{\vec{a}} = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)\vec{i} + \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)\vec{j}$$

که آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\overline{\vec{a}} = (\overline{a}_x)\vec{i} + (\overline{a}_y)\vec{j} \qquad (۱ـ۲۹)$$



شکل ۱ــ۱۵ــ بردار شتاب متوسط با $\Delta\vec{v}$ هم‌جهت است.

شتاب لحظه‌ای در لحظهٔ t_1 را نیز می‌توان به‌صورت حدّ شتاب متوسط، هنگامی که Δt به‌سمت صفر میل می‌کند، تعریف کرد؛ یعنی :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} (\bar{\vec{a}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad (۱ـ۳۰)$$

با توجه به مفهوم مشتق، رابطهٔ ۱ـ۳۰ به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (۱ـ۳۱)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2(\vec{r})}{dt^2} \qquad (۱ـ۳۲)$$

به کمک رابطهٔ ۱ـ۲۹ می‌توانیم بنویسیم :

$$\vec{a} = \left(\frac{dv_x}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)\vec{j} \qquad (۱ـ۳۳)$$

که در آن $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ و $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ مؤلفه‌های شتاب لحظه‌ای هستند.

درنتیجه می‌توان نوشت :

$$\vec{a} = (a_x)\vec{i} + (a_y)\vec{j} \qquad (۱ـ۳۴)$$

رابطهٔ ۱ـ۲۸ نشان می‌دهد که $\bar{\vec{a}}$ و $\Delta\vec{v}$ هم‌جهت‌اند، ولی همان‌طورکه در شکل ۱ـ۱۵ـب نشان داده شده است، در حرکت روی مسیر خمیده، معمولاً بردار شتاب متوسط $\bar{\vec{a}}$، با بردارهای سرعت، ($\vec{v}_1$ یا $\vec{v}_2$) هم‌جهت نیست؛ درحالتی هم که Δt به سمت صفر میل می‌کند و بردار $\vec{v}_2$ به‌بردار $\vec{v}_1$ بسیار نزدیک می‌شود، شتاب لحظه‌ای با سرعت لحظه‌ای نیز معمولاً هم‌جهت نخواهد بود، ولی به کمک رابطهٔ ۱ـ۳۳ و با داشتن معادلهٔ سرعت، جهت بردار شتاب لحظه‌ای را که از این پس آن را به اختصار **شتاب** خواهیم نامید، می‌توان به‌دست آورد.

مثال ۱ـ۱۲

معادلهٔ حرکت دو بعدی جسمی در SI به‌صورت زیر است :

$$\begin{cases} x = 20t^2 \\ y = -5t^3 \end{cases}$$

بردارهای سرعت و شتاب این جسم را در لحظهٔ $t = 1\,s$ به‌دست آورید. آیا این دو بردار هم‌جهت‌اند؟

پاسخ

برای تعیین بردار سرعت، ابتدا مؤلفه‌های v_x و v_y را در $t = ۱s$ به‌دست می‌آوریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ۴۰t \overset{t=۱s}{\Rightarrow} v_x = ۴۰\,m/s$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -۱۵t^۲ \overset{t=۱s}{\Rightarrow} v_y = -۱۵\,m/s$$

بنابراین بردار سرعت لحظه‌ای در $t = ۱s$ چنین خواهد بود :

$$\vec{v} = ۴۰\,\vec{i} - ۱۵\,\vec{j}$$

برای تعیین بردار شتاب نیز ابتدا مؤلفه‌های شتاب، یعنی a_x و a_y، را به‌دست می‌آوریم. مؤلفهٔ افقی شتاب، ثابت است :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = ۴۰\,m/s^۲$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -۳۰t$$

a_y تابع زمان است و در $t = ۱s$ برابر است با :

$$a_y = -۳۰\,m/s^۲$$

با توجه به مقدارهای a_x و a_y در لحظهٔ فوق، بردار شتاب در $t = ۱s$ نیز نوشته می‌شود :

$$\vec{a} = ۴۰\,\vec{i} - ۳۰\,\vec{j}$$

زاویه‌ای که بردارهای سرعت و شتاب در لحظهٔ $t = ۱s$ با محور افقی می‌سازند به‌ترتیب برابرند با :

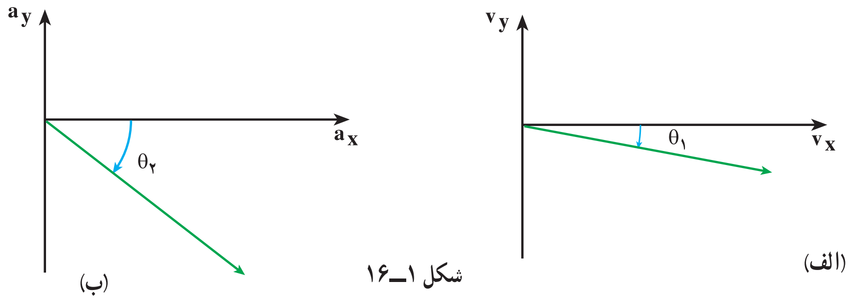
$$\tan\theta_۱ = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-۱۵}{۴۰}$$

$$\theta_۱ = \tan^{-۱}\frac{-۳}{۸} \simeq -۷^\circ$$

$$\tan\theta_۲ = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{۳۰}{۴۰}$$

$$\theta_۲ = \tan^{-۱}\frac{-۳}{۴} \simeq -۳۷^\circ$$

با مقایسهٔ زاویه‌های θ_1 و θ_2 در شکل ۱ــ۱۶ می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای سرعت و شتاب در این لحظه هم‌جهت نیستند.



شکل ۱ــ۱۶

تمرین‌های فصل اول

۱ــ معادلهٔ حرکت جسمی در SI به‌صورت $x = t^3 - 3t^2$ است. مطلوب است :

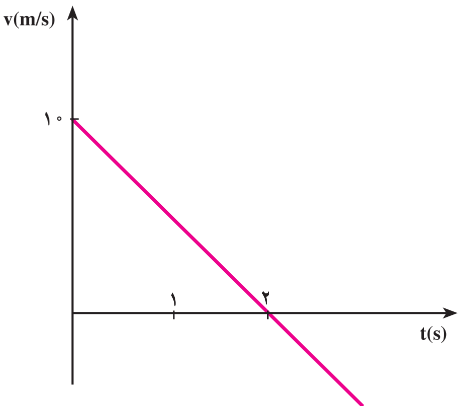
الف) بزرگی سرعت متوسط جسم در بازهٔ زمانی ۱ تا ۲ ثانیه

ب) بزرگی سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 4s$

۲ــ جسمی با سرعت ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند. جسم در لحظهٔ $t = 2s$ در مبدأ مختصات و ۲ ثانیه بعد در $x = -6m$ است.

الف) معادلهٔ حرکت جسم را بنویسید.

ب) مکان جسم را در لحظهٔ $t = 3s$ به‌دست آورید.



شکل ۱ــ۱۷

۳ــ نمودار سرعت ــ زمان متحرکی در شکل ۱ــ۱۷ داده شده است. اگر متحرک در لحظهٔ $t = 0s$، در $x = 2m$ باشد، معادلهٔ حرکت آن را به‌دست آورید.

۴ــ معادلهٔ حرکت متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به‌صورت : $x = 2t^3 + 4t$ است.

الف) شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۱ تا ۲ ثانیه

ب) شتاب متحرک در لحظهٔ $t = 3s$ را به‌دست آورید.

۵ــ خودرویی در پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبز شدن چراغ، خودرو با شتاب $۲m/s^۲$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه کامیونی با سرعت ثابت $۳۶km/h$ از کنار آن می‌گذرد.

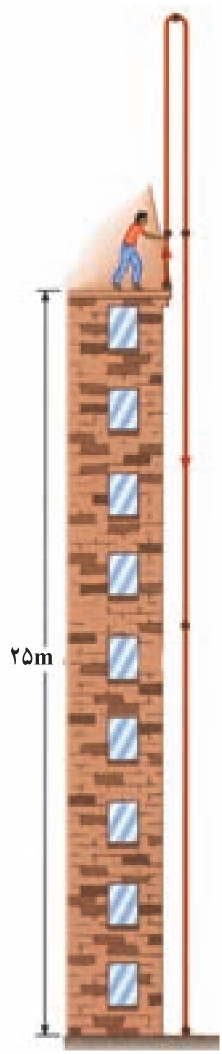
الف) نمودارهای مکان ــ زمان و سرعت ــ زمان را برای خودرو و کامیون رسم کنید.

ب) پس از چه مدتی، خودرو به کامیون می‌رسد؟

۶ــ در شکل ۱ــ۱۸ توپی در راستای قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. توپ پس از ۴ ثانیه به محلّ پرتاب برمی‌گردد. توپ

الف) با چه سرعتی پرتاب شده است؟ ب) تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

پ) با چه سرعتی به زمین می‌رسد؟ ت) بعد از چند ثانیه به زمین می‌رسد؟ $(g=۱۰m/s^۲)$



شکل ۱ــ۱۸

۷ ــ مثالی ذکر کنید که در آن سرعت یک جسم در یک لحظه، صفر ولی جسم در آن لحظه دارای شتاب باشد.

۸ــ کانگورو می‌تواند از مانعی به ارتفاع ۲/۵ متر بپرد.

الف) سرعت آن را هنگام بلند شدن از زمین حساب کنید.

ب) سرعت آن را به هنگام بازگشت به زمین محاسبه کنید.

فرض کنید حرکت کانگورو در راستای قائم است.

۹ــ بردارهای مکان ذرهٔ متحرکی در لحظه‌های $t_۱ = ۵s$ و $t_۲ = ۲۵s$ به‌ترتیب $\vec{r}_۱ = ۲\vec{i} + ۱۴\vec{j}$ و $\vec{r}_۲ = ۸\vec{i} + ۶\vec{j}$ است. بزرگی سرعت متوسط این ذره را بین دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ به‌دست آورید. با رسم یک نمودار جهت $\overline{\vec{v}}$ را نشان دهید.

۱۰ــ معادلهٔ حرکت جسمی با دو رابطهٔ زیر، در SI داده شده است :

$$y = ۲t^۲ + ۱ \ , x = ۶t$$

الف) معادلهٔ سرعت جسم را بنویسید و بزرگی سرعت را در $t = ۲s$ محاسبه کنید.

ب) بردار سرعت متوسط جسم را بین لحظه‌های $t = ۱$ و $t = ۲$ ثانیه برحسب بردارهای یکّهٔ $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.