

بردار و نیرو

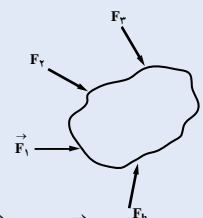
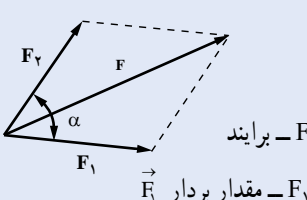
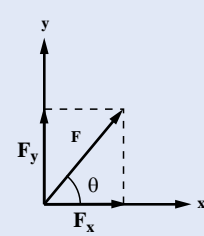
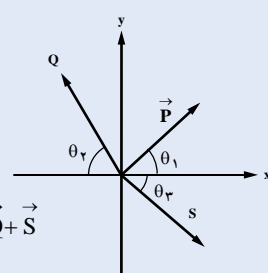
خلاصه فصل

در این فصل مفهوم کمیت‌های اسکالر و برداری بررسی خواهند شد و روش جمع نیروها، تجزیه یک نیرو به دو یا چند مؤلفه و تصویر یک نیرو بر روی یک محور را شرح خواهیم داد. به دلیل برداری بودن نیرو، می‌بایست از جبر برداری استفاده شود. در مسائل استاتیکی پیچیده، ساده‌ترین روش حل استفاده از روش‌های برداری است که علاوه بر اینکه دقت و سرعت عمل را افزایش می‌دهد، بلکه از الزام و نیاز به درک فضایی مسائل می‌کاهد.

اهداف فصل

نگرشی	مهارتی	دانشی
۱- جابه‌جایی جسم در راستای برآیند نیروها است	۱- برآیند دو یا چند نیرو را تعیین کند	۱- کمیت اسکالر را می‌شناسد
۲- تمام کُرَات و اجسام فضایی تحت اثر نیروهای هستند که حرکت مجموعه آنها در راستای برآیند کل نیروهاست	۲- یک بردار را به مؤلفه‌های متعامد تجزیه نماید	۲- کمیت برداری را می‌شناسد
۳- برآیند نیروهای وارد بر کره زمین در منظومه شمسی قاعدتاً صفر است که جابه‌جایی نسبی (به‌جزء حرکت دورانی و وضعی زمین) در فواصل سیاره‌ها و ستارات وجود ندارد	۳- برآیند دسته‌ای از نیروهای متقارب را به‌دست آورد	۳- روش جمع جبری بردارها را می‌داند
	۴- برآیند دو نیروی غیرمتعامد را از قانون کسینوس‌ها تعیین نماید	۴- روش تجزیه نیرو به مؤلفه‌ها را می‌داند
		۵- بردارهای یکه را می‌شناسد
		۶- نیروهای واقعی در صفحه و نیروهای متقارب (همرس) را بیان کند

روابط و فرمول‌های کلی فصل نهم

روابط پایه موردنیاز	تعریف اجزاء روابط و فرمول‌ها	روابط و فرمول‌ها
<p>قواعد مربوط به : تعریف بردار بردار واحد جمع جبری بردارها</p>	<p>\vec{F} – برآیند دسته‌ای از نیروهای برداری</p> <p>\vec{F}_1 – بردار نیروی اول</p> <p>\vec{F}_2 – بردار نیروی دوم</p> <p>\vec{F}_n – بردار نیروی nام</p>	 <p>$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$</p>
<p>قانون کسینوس‌ها قانون سینوس‌ها روابط مثلث قائم‌الزاویه</p>	 <p>\vec{F} – برآیند</p> <p>F_1 – مقدار بردار \vec{F}_1</p> <p>F_2 – مقدار بردار \vec{F}_2</p> <p>α – زاویه بین دو بردار</p>	<p>$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha$</p>
<p>روابط مربوط به نسبت‌های مثلثاتی، مثلث قائم‌الزاویه قضیه فیثاغورس</p>	<p>F_n – مؤلفه نیروی F در جهت xها</p> <p>F_y – مؤلفه نیروی F در جهت yها</p> <p>θ – زاویه برآیند با افق (محور x)</p>	 <p>$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$</p> <p>$F_x = F \cos \theta$</p> <p>$F_y = F \sin \theta$</p>
<p>قواعد مربوط به جمع جبری برداری و تجزیه نیروها</p>	<p>\vec{R} – برآیند دسته‌ای از نیروها</p> <p>Q_x و Q_y مؤلفه‌های بردار نیروی \vec{Q}</p> <p>P_x و P_y مؤلفه‌های بردار نیروی \vec{P}</p> <p>S_x و S_y مؤلفه‌های بردار نیروی \vec{S}</p>	 <p>$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$</p> <p>$\vec{R} = (P_x + Q_x + S_x) \vec{i} + (P_y + Q_y + S_y) \vec{j}$</p> <p>$= (P_x + Q_x + S_x)_i + (P_y + Q_y + S_y)_j$</p>

جدول بودجه‌بندی فرایند اجرای برنامه درسی فصل نهم

امکانات و تجهیزات موردنیاز	مواد آموزشی	شماره صفحه کتاب درسی	موضوعات و عناوین	جلسه آموزشی
		۱۱۷ ۱۱۸ ۱۲	نقطه مادی و جسم صلب کمیت‌های فیزیکی (نرده‌ای و برداری) بردارها (انواع بردار – وضعیت دو بردار در فضا)	بیست و دوم
		۱۲۱ و ۱۲۲	تعیین برآیند دو بردار (به روش مثلثی و متوازی‌الاضلاع)	
		۱۲۳ ۱۲۵ ۱۲۶ و ۱۲۷	تعیین برآیند دسته‌ای از نیروها (بیش از دو نیرو) حاصلضرب یک عدد در یک بردار تجزیه یک بردار به مؤلفه‌های غیر متعامد	بیست و سوم
		۱۲۸ ۱۲۹ ۱۳۱ ۱۳۴ و ۱۳۵ و ۱۳۶	مؤلفه‌های متعامد یک بردار بردار واحد (یکه) نیرو تمرینات مربوط به نیرو و برآیند آن	بیست و چهارم
		۱۳۶ ۱۴۱ و ۱۴۱	مؤلفه‌های نیرو در مختصات قائم جمع نیروها (برآیند) از طریق مؤلفه نیروها	بیست و پنجم
		۱۴۶ و ۱۴۷ ۱۴۸ و ۱۴۹ و ۱۵	حل تمرینات مربوط به برآیند نیروها تعادل نقطه‌ی مادی	بیست و ششم

جدول زمان بندی فرایند تدریس در جلسات آموزشی

شماره صفحه کتاب	اقدامات لازم برای جلسه بعدی	مدت تدریس (دقیقه)	موضوعات و مطالب	جلسه آموزشی
	تکرار مختصر مطالب جمع بندی شده در جلسه قبل		مروری بر مطالب جلسه گذشته	جلسه بیست و دوم
	تشریح اهمیت و ضرورت موضوع جهت ایجاد انگیزه و افزایش تمرکز دانش آموزان		تشریح مقدمه جهت ورود به موضوع	
	با پرورش مهارت و آموختن راه یادگیری از طریق مشارکت دانش آموزان سعی در انتقال مطالب شود		تحلیل محتوای کتاب درسی	
	مثال ها به بحث گذاشته تا راه حل های دیگر هم مشخص شوند		تشریح مثال های کتاب درسی	
	با هدف انگیزش و ایجاد توسعه فکری دانش آموز مثال های اضافی حل شوند		حل مثال های پیشنهادی و ضروری	
	فعالیت های متناسب با موضوع تدریس شده به دانش آموزان واگذار شود و در جلسه بعدی به بحث گذاشته شوند		تشریح مطالب فوق برنامه	
	تمرینات کتاب و یا طراحی شده توسط معلم، با مشارکت دانش آموزان حل می شوند		حل تمرینات مربوط و خارج از کلاس	
	با یک نگاه کلی مطالب تدریس شده را بار دیگر جمع بندی تا باعث افزایش تمرکز دانش آموزان شود		جمع بندی مطالب تدریس شده	
	با سؤالات کوتاه از دانش آموزان سعی شود که تعداد بیشتری از آنها مورد ارزیابی قرار گیرند تا مطالب درسی در حافظه آنان ماندگار گردد		ارزیابی مطالب تدریس شده از دانش آموزان	

مروری بر مطالب جلسه گذشته	تکرار مختصر مطالب جمع بندی شده در جلسه قبل
تشریح مقدمه جهت ورود به موضوع	تشریح اهمیت و ضرورت موضوع جهت ایجاد انگیزه و افزایش تمرکز دانش آموزان
تحلیل محتوای کتاب درسی	با پرورش مهارت و آموختن راه یادگیری از طریق مشارکت دانش آموزان سعی در انتقال مطالب شود
تشریح مثال های کتاب درسی	مثال ها به بحث گذاشته تا راه حل های دیگر هم مشخص شوند
حل مثال های پیشنهادی و ضروری	با هدف انگیزش و ایجاد توسعه فکری دانش آموز مثال های اضافی حل شوند
تشریح مطالب فوق برنامه	فعالیت های متناسب با موضوع تدریس شده به دانش آموزان واگذار شود و در جلسه بعدی به بحث گذاشته شوند
حل تمرینات مربوط و خارج از کلاس	تمرینات کتاب و یا طراحی شده توسط معلم، با مشارکت دانش آموزان حل می شوند
جمع بندی مطالب تدریس شده	با یک نگاه کلی مطالب تدریس شده را بار دیگر جمع بندی تا باعث افزایش تمرکز دانش آموزان شود
ارزیابی مطالب تدریس شده از دانش آموزان	با سؤالات کوتاه از دانش آموزان سعی شود که تعداد بیشتری از آنها مورد ارزیابی قرار گیرند تا مطالب درسی در حافظه آنان ماندگار گردد

تکرار مختصر مطالب جمع‌بندی شده در جلسه قبل	مروری بر مطالب جلسه گذشته	
تشریح اهمیت و ضرورت موضوع جهت ایجاد انگیزه و افزایش تمرکز دانش‌آموزان	تشریح مقدمه جهت ورود به موضوع	
با پرورش مهارت و آموختن راه‌یادگیری از طریق مشارکت دانش‌آموزان سعی در انتقال مطالب شود.	تحلیل محتوای کتاب درسی	
مثال‌ها به بحث گذاشته تا راه‌حل‌های دیگر هم مشخص شوند.	تشریح مثال‌های کتاب درسی	
با هدف انگیزش و ایجاد توسعه فکری دانش‌آموز مثال‌های اضافی حل شوند.	حل مثال‌های پیشنهادی و ضروری	
فعالیت‌های متناسب با موضوع تدریس شده به دانش‌آموزان واگذار شود و در جلسه بعدی به بحث گذاشته شوند.	تشریح مطالب فوق برنامه	
تمرینات کتاب و یا طراحی شده توسط معلم، با مشارکت دانش‌آموزان حل می‌شوند.	حل تمرینات مربوط و خارج از کلاس	
با یک نگاه کلی مطالب تدریس شده را بار دیگر جمع‌بندی تا باعث افزایش تمرکز دانش‌آموزان شود.	جمع‌بندی مطالب تدریس شده	
با سؤالات کوتاه از دانش‌آموزان سعی شود که تعداد بیشتری از آنها مورد ارزیابی قرار گیرند تا مطالب درسی در حافظه آنان ماندگار گردد.	ارزیابی مطالب تدریس شده از دانش‌آموزان	
تکرار مختصر مطالب جمع‌بندی شده در جلسه قبل	مروری بر مطالب جلسه گذشته	
تشریح اهمیت و ضرورت موضوع جهت ایجاد انگیزه و افزایش تمرکز دانش‌آموزان	تشریح مقدمه جهت ورود به موضوع	
با پرورش مهارت و آموختن راه‌یادگیری از طریق مشارکت دانش‌آموزان سعی در انتقال مطالب شود.	تحلیل محتوای کتاب درسی	
مثال‌ها به بحث گذاشته تا راه‌حل‌های دیگر هم مشخص شوند.	تشریح مثال‌های کتاب درسی	
با هدف انگیزش و ایجاد توسعه فکری دانش‌آموز مثال‌های اضافی حل شوند.	حل مثال‌های پیشنهادی و ضروری	
فعالیت‌های متناسب با موضوع تدریس شده به دانش‌آموزان واگذار شود و در جلسه بعدی به بحث گذاشته شوند.	تشریح مطالب فوق برنامه	
تمرینات کتاب و یا طراحی شده توسط معلم، با مشارکت دانش‌آموزان حل می‌شوند.	حل تمرینات مربوط و خارج از کلاس	
با یک نگاه کلی مطالب تدریس شده را بار دیگر جمع‌بندی تا باعث افزایش تمرکز دانش‌آموزان شود.	جمع‌بندی مطالب تدریس شده	
با سؤالات کوتاه از دانش‌آموزان سعی شود که تعداد بیشتری از آنها مورد ارزیابی قرار گیرند تا مطالب درسی در حافظه آنان ماندگار گردد.	ارزیابی مطالب تدریس شده از دانش‌آموزان	

مروری بر مطالب جلسه گذشته	تکرار مختصر مطالب جمع‌بندی شده در جلسه قبل
تشریح مقدمه جهت ورود به موضوع	تشریح اهمیت و ضرورت موضوع جهت ایجاد انگیزه و افزایش تمرکز دانش‌آموزان
تحلیل محتوای کتاب درسی	با پرورش مهارت و آموختن راه‌یادگیری از طریق مشارکت دانش‌آموزان سعی در انتقال مطالب شود.
تشریح مثال‌های کتاب درسی	مثال‌ها به بحث گذاشته تا راه‌حل‌های دیگر هم مشخص شوند.
حل مثال‌های پیشنهادی و ضروری	با هدف انگیزش و ایجاد توسعه فکری دانش‌آموز مثال‌های اضافی حل شوند.
تشریح مطالب فوق برنامه	فعالیت‌های متناسب با موضوع تدریس شده به دانش‌آموزان واگذار شود و در جلسه بعدی به بحث گذاشته شوند.
حل تمرینات مربوط و خارج از کلاس	تمرینات کتاب و یا طراحی شده توسط معلم، با مشارکت دانش‌آموزان حل می‌شوند.
جمع‌بندی مطالب تدریس شده	با یک نگاه کلی مطالب تدریس شده را بار دیگر جمع‌بندی تا باعث افزایش تمرکز دانش‌آموزان شود.
ارزیابی مطالب تدریس شده از دانش‌آموزان	با سؤالات کوتاه از دانش‌آموزان سعی شود که تعداد بیشتری از آنها مورد ارزیابی قرار گیرند تا مطالب درسی در حافظه آنان ماندگار گردد.

جلسه بیست و دوم: بردار و نیرو

در این جلسه، دانش‌آموزان با کمیت‌های فیزیکی آشنا می‌شوند و مفهوم کمیت برداری را یاد می‌گیرند. همچنین قادر خواهند بود که خصوصیات یک بردار و انواع بردارها را بشناسند. در نهایت با استفاده از روش مثلث و روش متوازی‌الاضلاع اقدام به تعیین برآیند دو بردار نیرو می‌نمایند.

۹-۱- نقطه مادی و جسم صلب

آنچه که در تعریف نقطه مادی و جسم صلب برای کتاب درسی آمده است، به شرح زیر می‌باشد: نقطه مادی مقدار کوچکی از یک جسم است که می‌توان فرض کرد جای نقطه‌ای را در فضا اشغال کرده است. جسم صلب از مجموع نقاط مادی تشکیل شده است و در اثر نیروهای وارد بر آن، تغییر شکل نمی‌دهد.

در این فصل، منظور از به کار بردن «نقاط مادی» یا «ذرات مادی» تنها مطالعه ذرات بسیار کوچک نیست باید توجه داشت که در حل مسائل و روش به کار برده شده در این فصل، شکل و بزرگی و کوچکی اجسام تأثیری ندارد، به طوری که یک قطعه سنگ یک گرمی یا یک ماشین چند تنی را یک نقطه مادی در نظر می‌گیریم. به این ترتیب فرض می‌کنیم کلیه نیروهای وارد بر یک جسم، بر یک نقطه اثر خواهد داشت؛ یعنی اینکه بر یک نقطه از جسم وارد می‌شود.

برای تعریف دقیق‌تر از نقطه مادی (ذره)، می‌توان تعریف زیر را ارائه نمود:

۹-۱-۱- ذره: ذره جسمی است بی‌بُعد اما دارای جرم. در محاسبات برای ساده‌سازی

گاهی حرکت زمین به دور مدارش را با فرض یک ذره بررسی می‌نمایند.

۹-۱-۲- جسم صلب: جسمی است که جابه‌جایی نسبی ذرات تشکیل‌دهنده آن قبل و بعد

از بارگذاری صفر است. این فرض نسبی است و بعضاً اجسام نسبت به بارهای وارده (خیلی کم). صلب فرض می‌شوند. در زیر مفاهیم پایه در علم مکانیک به اختصار تعریف شده‌اند که در درس ایستایی و مکانیک کاربرد بسیار وسیعی دارند.

۹-۱-۳- فضا (Space): مقصود ما از فضا، یک ناحیه هندسی است که حوادث فیزیکی

در آن رخ می‌دهند. فضا می‌تواند دارای، یک، دو و یا سه بعد باشد. در واقع می‌توان مفهوم فضا را به بیش از سه بعد بسط داد، لیکن در اینجا ما خود را به فضای سه‌بعدی محدود خواهیم ساخت.

وضعیت هر نقطه در فضا، همواره نسبت به یک نقطه مرجع سنجیده می‌شود. دستگاه مختصات مرجع لازم برای مکانیک نیوتنی، دستگاه ثابت در فضا می‌باشد. اندازه‌گیری‌های انجام شده نسبت به این دستگاه مرجع، مطلق خوانده می‌شوند.

۹-۱-۴- زمان (time): توالی وقوع حوادث در فضا، به عنوان یک کمیت مطلق در نظر گرفته شده و زمان خوانده می‌شود. واحد زمان ثانیه است که به‌طور مستقیم به سرعت چرخش کره زمین ربط داده می‌شود. امروزه واحد اندازه‌گیری زمان به فرکانس نوسان اتم سزیم ربط داده می‌شود.

۹-۱-۵- اینرسی (inertia): توانایی یک جسم برای مقاومت در مقابل تغییر حرکت، اینرسی نامیده می‌شود.

۹-۱-۶- جرم (mass): جرم یک جسم، یک اندازه‌گیری کمی از اینرسی آن است.

۹-۱-۷- نیرو (force): نیرو عمل یک جسم روی جسم دیگر است. این عمل می‌تواند به واسطه تماس بین دو جسم باشد، که اثر فشار - کشش نامیده می‌شود، یا می‌تواند در دو جسم جدا از هم باشد که اثر میدان نیرو نامیده می‌شود.

۹-۱-۸- نقطه مادی (particle): اگر در مطالعه سکون یا حرکت یک جسم، ابعاد آن قابل صرف نظر کردن باشد، آن جسم نقطه مادی خوانده می‌شود. فرض می‌گردد که جرم یک نقطه مادی در یک نقطه هندسی متمرکز است. از این لحاظ گاهی مواقع به نقطه مادی، نقطه جرمی نیز گفته می‌شود.

۹-۱-۹- جسم صلب (rigid body): مشخصه یک جسم صلب این است که فاصله هر دو نقطه از آن، نسبت به یکدیگر برای تمام زمان‌ها، بدون تغییر (ثابت) است.

به منظور آشنایی بیشتر با دستگاه آحاد SI و انگلیسی جداول مفیدی گنجانده شده است که امید است مورد استفاده همکاران محترم قرار گیرد.

جدول ۹-۱ واحدهای دستگاه SI و ابعاد آنها

کمیّت	واحد	علامت اختصاری
طول)	meter (متر)	m
Time (زمان)	second (ثانیه)	s
Mass (جرم)	kilogram (کیلوگرم)	kg
Force (نیرو)	newton (نیوتن)	N
Weight (وزن)	newton (نیوتن)	N
Density (جرم مخصوص)	kilogram meter ³ (کیلوگرم بر متر مکعب)	kg/m ³
Metric ton (تن متریک)	۱ kilograms (۱ کیلوگرم)	t
Work (کار)	newton-meter = joule (ژول = نیوتن متر)	N m = J
Energy (انرژی)	newton-meter = joule (ژول = نیوتن متر)	N m = J
Power (توان)	newton-meter/second = watt (وات = نیوتن متر بر ثانیه)	N m/s = W
Pressure (فشار)	pascal = newton-meter ² (نیوتن بر متر مربع = پاسکال)	N/m ² = Pa
Moment (لنگر)	meter-newton (متر- نیوتن)	m N
Area moment of inertia (ممان اینرسی سطحی)	meter ⁴ (متر ⁴)	m ⁴
Mass moment of inertia (ممان اینرسی جرمی)	kilogram-meter ² (کیلوگرم متر مربع)	kg m ²
Plane angle (زاویه صفحه‌ای)	radian (رادیان)	rad

جدول ۹-۲- واحدهای دستگاه ثقلی انگلیسی

علامت اختصاری	واحد	کمیت
ft	فوت	طول
sec	ثانیه	زمان
lb	پوند	نیرو
lb sec ² /ft	اسلاگ	جرم
lb	پوند	وزن
(lb sec ²)/ft ²	اسلاگ ^۲ /(فوت)	جرم مخصوص
lb ft	پوند - فوت	کار
lb ft	پوند - فوت	انرژی
lb ft/sec	پوند - فوت بر ثانیه	توان
lb/ft ²	پوند بر فوت مربع	فشار
ft lb	فوت - پوند	لنگر
ft ⁴	فوت ^۴	ممان اینرسی سطحی
lb sec ² ft	اسلاگ - فوت ^۲	ممان اینرسی جرمی
rad	رادیان	زاویه صفحه‌ای

جدول ۹-۳- ضرایب تبدیل از دستگاه انگلیسی به دستگاه SI

ضرب کنید در	به	برای تبدیل از
۳ ۴۸	متر	فوت
۱ ۳۵۶	ژول	پوند - فوت
۱ ۶ ۹	متر	مایل
۴ ۴۴۸	نیوتن	پوند
۱۴ ۵۹	کیلوگرم	اسلاگ
۴ ۴۴۸	نیوتن	کیلو پوند (۱ پوند)

۹-۲- کمیت‌های فیزیکی

اساس کلیه محاسبات فنی بر اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی استوار است. کمیت‌های فیزیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

الف) کمیت نرده‌ای (عددی)

ب) کمیت برداری

۹-۲-۱- کمیت نرده‌ای (عددی): به هر کمیت فیزیکی که فاقد جهت بوده تنها دارای بزرگی (اندازه) باشد، یعنی تنها با یک عدد (البته با ذکر واحد مربوط) مشخص شود، کمیت نرده‌ای گویند. بعضی از کمیت‌هایی که در فصل‌های گذشته این کتاب دیدیم، از نوع کمیت‌های نرده‌ای هستند؛ مانند طول جاده، سطح سالن، حجم استخر، زمان طلوع آفتاب در یک روز معین از سال. کار بر روی کمیت‌های عددی با عملیات ریاضی معمولی انجام می‌گیرد.

□ مثال:

۹۰ kg ۳۰ kg ۶۰ kg

۸ kg ۱۲ kg ۲۰ kg

۷/۵ ۵.۵ ۲

۶S ۲S ۴S

۶۵ m ۱۲ m ۵۳ m

۹-۲-۲- کمیت برداری: به کمیت‌هایی که علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز باشند، کمیت برداری گویند.

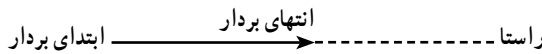
بردار نیرو، بردار سرعت، بردار جابه‌جایی و ... از نوع کمیت‌های برداری هستند. جهت یک بردار از راستا و سو تشکیل می‌شود. «راستا» امتداد خطی است که بردار روی آن قرار دارد و «سو» یکی از دو طرف «راستا» است.

توجه: تعریف ۹-۲-۱ در مورد اکثر کمیت‌های نرده‌ای صادق است. البته در مواردی استثنا هم دیده می‌شود؛ مانند جریان الکتریکی در یک سیم که علاوه بر بزرگی، جهت هم دارد، ولی از نوع کمیت برداری نیست.

کار بر روی کمیت‌های برداری، تابع عملیات خاص بردارهاست.

۹-۳-۳- بردار

برای نمایش بردار در روی یک نمودار، بیکنی رسم می‌کنیم و طول آن را متناسب با اندازه بردار در نظر می‌گیریم (برای ترسیم بردار، مقیاسی را انتخاب می‌کنیم). راستای بیکن در راستای بردار در نظر گرفته می‌شود؛ به طوری که نوک بیکن، جهت بردار را نشان دهد. هر بردار دارای ابتدا (نقطهٔ اثر) و انتها می‌باشد.



در اینجا لازم است تأکید شود که اندازه و جهت با هم معرف یک کمیت برداری هستند و باید هنگام مقایسهٔ دو بردار، به هر دو مشخصهٔ اندازه و جهت توجه شود.

برای نام‌گذاری بردار، از حروف لاتین استفاده می‌شود و بالای آن، یک بیکن کوچک رسم می‌گردد؛ مثلاً بردار \vec{F} .

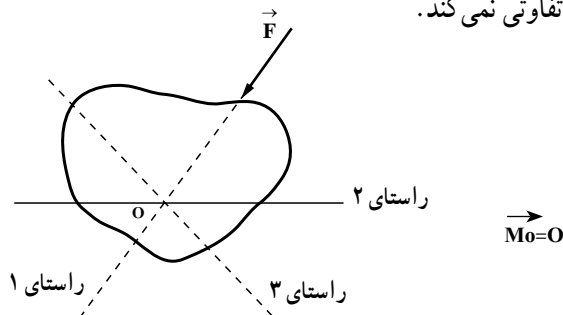
برای نشان دادن اندازهٔ یک کمیت برداری از حروف لاتین بدون بیکن و یا به شکل F استفاده می‌شود.

۹-۳-۱- انواع بردار: عبارت‌اند از ثابت، لغزنده و آزاد

۹-۳-۱-۱- بردار ثابت: بردار ثابت، برداری است که راستا، جهت و نقطهٔ اثر آن در فضا ثابت و معین است. نظیر نیروهای وارد بر اجسام انعطاف‌پذیر که اعمال آن در نقاط مختلف اثرات مختلفی دارد و نیروها در مبحث مقاومت مصالح از این دست می‌باشند.

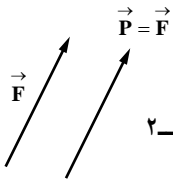
۹-۳-۱-۲- بردار لغزنده: برداری است که عمل آن محدود به یک راستای معین در فضا است و نقطهٔ اثر آن می‌تواند در راستای مورد اشاره تغییر کنند. نظیر نیروی وارد بر یک جسم صلب (مباحث استاتیکی)

۹-۳-۱-۳- بردار آزاد: برداری است که عمل آن محدود به یک راستای معین نباشد. عمده بردارهای لنگر این گونه هستند. در شکل زیر بردار لنگر نیروی \vec{F} با راستاهای مختلف نمایش داده شده تفاوتی نمی‌کند.



۹-۳-۲- وضعیت دو بردار در فضا: دو بردار در فضا می‌توانند حالت‌های مختلفی

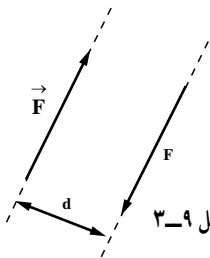
به شرح زیر داشته باشند:



شکل ۲-۹

بردارهای هم‌سنگ (مساوی): دو بردار وقتی مساوی هستند که

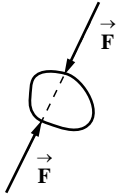
هم مقدار، هم جهت و هم امتداد باشند.



شکل ۳-۹

بردارهای زوج: دو بردار وقتی زوج هستند که هم مقدار، هم راستا

و مختلف‌الجهت با فاصله از هم (d) باشند.



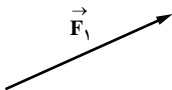
شکل ۴-۹

بردارهای متقابل: دو بردار وقتی متقابل هستند که هم مقدار، منطبق

بر یک راستا و مختلف‌الجهت (d = 0) باشند.

۹-۳-۳- جمع بردارها: چون کمیت‌های برداری علاوه بر اندازه دارای جهت نیز هستند،

نباید در جمع و تفریق آنها تنها اندازه‌شان را بر هم افزود، یا از هم کم کرد. زیرا اگر این گونه باشد، در حقیقت جهت بردار نادیده گرفته شده است.



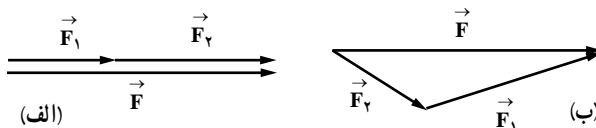
شکل ۵-۹

دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 را در نظر بگیرید. منظور از جمع دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 ،

برداری است که معادل آن دو بردار باشد؛ یعنی بتوان آن را جایگزین دو بردار اولیه کرد.

بردار حاصل جمع، یعنی بردار \vec{F} را برآیند دو بردار F_1 و F_2 می‌نامند. به

جمع اثر دو یا چند نیرو، برآیند نیروها گویند.



شکل ۶-۹

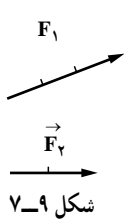
۹-۳-۴ روش تعیین برآیند بردارها: برای تعیین برآیند بردارها به روش ترسیمی، از سه

روش استفاده می‌کنیم.

روش مثلث؛ روش متوازی‌الاضلاع و روش چند ضلعی.

تعیین برآیند بردارها به روش مثلث: در این روش، ابتدا برداری هم‌سنگ بردار اول و

سپس از انتهای بردار اول (نوک پیکان بردار اول) هم‌سنگ بردار دوم رسم می‌کنیم. برآیند این دو بردار، برداری است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می‌کند.



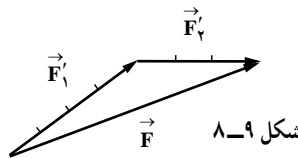
شکل ۷-۹

مثال: دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 را طبق شکل در نظر بگیرید. برای تعیین برآیند

این دو بردار، چنین عمل می‌کنیم: از نقطه‌ای مانند A، هم‌سنگ \vec{F}_2 می‌کشیم و آن را

\vec{F}'_2 می‌نامیم. به همین ترتیب \vec{F}'_1 را هم‌سنگ \vec{F}_1 رسم می‌کنیم. برداری که ابتدای \vec{F}'_1

را به انتهای \vec{F}'_2 وصل می‌کند (یعنی \vec{F})، برآیند دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 می‌باشد.



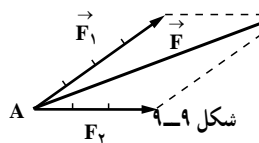
شکل ۸-۹

تعیین برآیند بردارها به روش متوازی‌الاضلاع: برای تعیین برآیند دو بردار به روش

متوازی‌الاضلاع، کافی است از نقطه‌ای مثل A هم‌سنگ دو بردار مورد نظر را رسم کنیم (به طوری که ابتدای هر دو بردار روی نقطه A باشد). سپس از انتهای بردار اول به اندازه و موازات بردار دوم و از انتهای بردار دوم به اندازه و موازات بردار اول رسم می‌کنیم تا متوازی‌الاضلاعی حاصل شود. اندازه قطر متوازی‌الاضلاع که از نقطه‌ی مادی A شروع می‌شود، اندازه برآیند دو نیروی مورد نظر می‌باشد و جهت آن به گونه‌ای است که نقطه A ابتدای بردار برآیند باشد.

برآیند دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 را که به روش متوازی‌الاضلاع به دست آمده است در

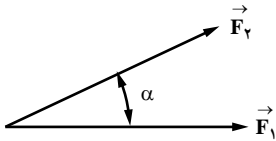
شکل ۹-۹ می‌بینیم.



شکل ۹-۹

برای به دست آوردن اندازه بردار برآیند، طول قطر متوازی الاضلاع را اندازه می‌گیریم و با توجه به مقیاس شکل، اندازه برآیند را به دست می‌آوریم.
 اگر بخواهیم اندازه بردار برآیند را از روش محاسباتی به دست آوریم، معادله آن به شکل زیر است که به قانون کسینوس‌ها معروف است.

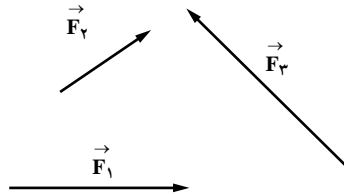
$$\vec{F}^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha$$



α زاویه بین دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 است.

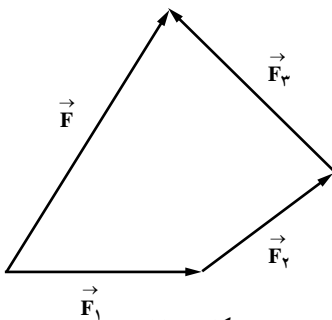
جلسه بیست و سوم: ادامه بردار و نیرو

در این جلسه تعیین برآیند چند بردار با استفاده از اصل پشت سرهم گذاری که به روش ترسیمی موسوم است، انجام می‌گیرد. برای این منظور بردارهای \vec{F}_1 و \vec{F}_2 و \vec{F}_3 را مطابق شکل ۹-۱۰ در نظر بگیرید.



شکل ۹-۱۰

برای به دست آوردن برآیند این بردارها، از یک نقطه برداری هم‌سنگ اولین بردار (\vec{F}_1) رسم می‌کنیم.



شکل ۹-۱۱

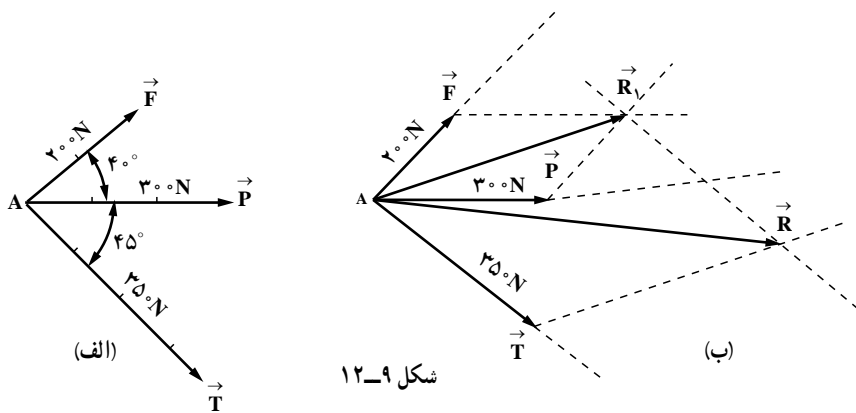
از انتهای آن به همین روش، هم‌سنگ دومین بردار (\vec{F}_2) را می‌کشیم و به همین ترتیب، هم‌سنگ بردار \vec{F}_3 را رسم می‌کنیم. برداری که ابتدای اولین بردار را به انتهای آخرین بردار وصل می‌کند، حاصل جمع (برآیند) بردارها است و می‌نویسیم:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

تذکر: برای تعیین برآیند چند نیرو می‌توانیم روش متوازی‌الاضلاع را نیز به کار ببریم، یعنی برآیند بردارها را دو به دو به دست آوریم و سپس بین برآیندها هم دو به دو برآیند جدید را پیدا کنیم، این عمل را آن قدر ادامه دهیم تا همه نیروها در عمل وارد شوند و برآیند نهایی به دست آید.

تحلیل مثال حل شده کتاب در صفحه ۱۲۳:

مثال: در شکل ۹-۱۲ سه نیرو \vec{F} ، \vec{P} و \vec{T} با اندازه‌های $F = 200\text{ N}$ ، $P = 300\text{ N}$ و $T = 250\text{ N}$ با جهت داده شده بر نقطه مادی A وارد می‌شود، برآیند آنها را تعیین کنید.

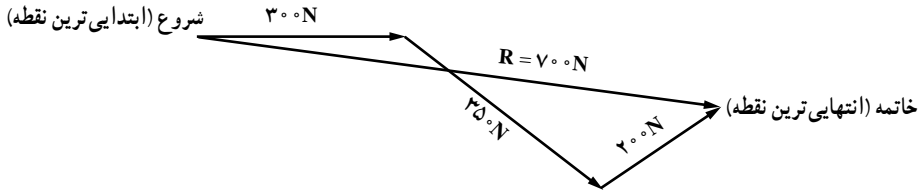


در شکل ۹-۱۲ الف نیروها به نقطه مادی A وارد شده‌اند. به شکل ۹-۱۲ ب توجه کنید. در این قسمت نقطه A را در نظر گرفته فرض کنید همان شکل ۹-۱۲ الف است. از انتهای بردار \vec{P} به موازات \vec{F} و از انتهای بردار \vec{F} به موازات \vec{P} ترسیم شده است. برآیند دو بردار \vec{P} و \vec{F} قطر متوازی‌الاضلاع است که در شکل ۹-۱۲ ب آن را \vec{R}_1 نامیده‌ایم. حالا \vec{R}_1 را با بردار \vec{T} در نظر بگیرید و میان این دو - یعنی \vec{R}_1 و \vec{T} - مقدار برآیند را به دست آورید. با رسم متوازی‌الاضلاع، قطر آن برآیند خواهد بود که در شکل ۹-۱۲ ب آن \vec{R} را نامیده‌ایم. اگر طول R را اندازه بگیریم، طول بردار \vec{R} به دست خواهد آمد که اندازه آن با خط‌کش ۷ سانتی‌متر است. چون هر سانتی‌متر را 100 نیوتن در نظر گرفته‌ایم، پس اندازه R مساوی 700 نیوتن می‌باشد.

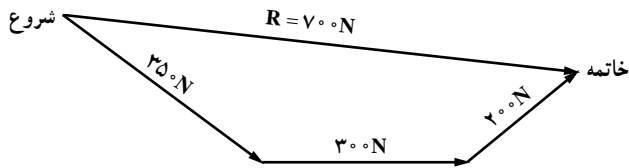
اگر چندین بردار دیگر وجود داشت، این عمل را آن قدر ادامه می‌دادیم تا برآیند همه آنها به دست آید.



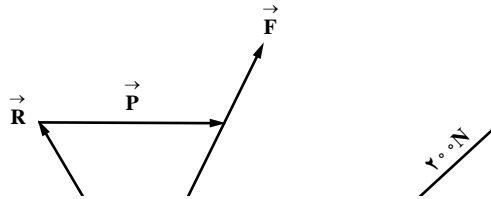
تحلیل مثال : در این مثال سه نیرو مطابق داده شده اند که می توان به طریق زیر آنها را با هم جمع کرد
الف) اصل پشت سرهم گذاری :
مدل اول :



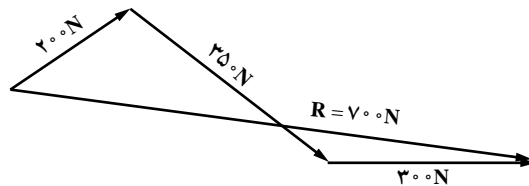
مدل دوم :



مدل سوم :



مدل چهارم :

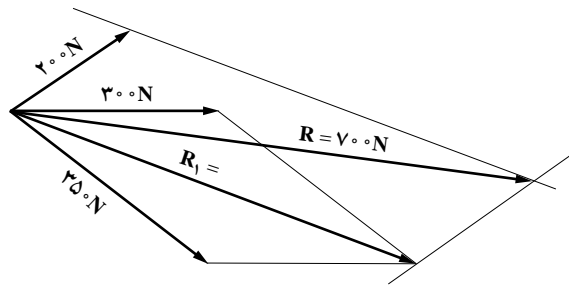


با ترسیم مدل های دیگر نتیجه یکسان است و نکته مهم هم مقدار و موازی بودن برآیندها در تمام مدل ها است.

ب) روش تشکیل متوازی الاضلاع: در این حالت با تعیین برآیند دو بردار دلخواه و سپس جانشین نمودن برآیند به جای دو بردار یاد شده (روش حذفی)، در مرحله بعدی با برآیندگیری از یک بردار و برآیند جانشین شده می توان به برآیند سه بردار دست یافت که با ادامه این روش برآیند مجموعه تعیین می گردد.

در مثال ابتدا بین بردارهای ۲۰° و ۳۰° نیوتنی برآیند تعیین شده و سپس حاصل آن برآیند با بردار ۳۵° نیوتنی برابر برآیند کلی شده است.

نکته: در این روش بهتر است ابتدا برآیند دو برداری محاسبه شود که زاویه نسبتاً بزرگی داشته باشند تا خط زیاد نشود.



۹-۳-۵ بردار منفی یک بردار: بردار منفی یک بردار از لحاظ اندازه با آن برابر بوده دارای راستا و نقطه اثر مشترک می باشد و فقط از لحاظ جهت تفاوت دارد. به شکل ۹-۱۳ توجه کنید.

$$\vec{P} \quad \text{و} \quad \vec{A} \quad \text{و} \quad -\vec{P}$$

شکل ۹-۱۳

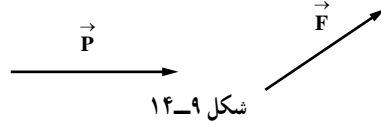
بردار \vec{R} در نقطه A اثر می کند. اگر بردار $-\vec{P}$ را در نظر بگیریم و فرض کنیم در نقطه A اثر می کند، آن گاه \vec{R} و $-\vec{P}$ دو بردار منفی یکدیگرند به عبارت دیگر، جای مبدأ و انتها تغییر یافته است.

۹-۳-۶ تفاضل دو بردار: برای به دست آوردن تفاضل دو بردار \vec{P} و \vec{F} یعنی

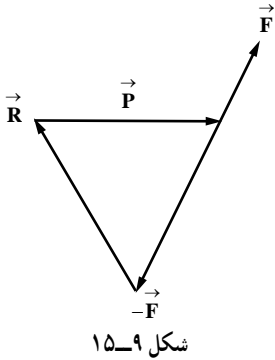
$$\vec{P} - \vec{F} \quad \text{لازم است که برآیند دو بردار } \vec{P} \quad \text{و} \quad -(\vec{F}) \quad \text{را به دست آوریم.}$$

تحلیل مثال صفحه ۱۲۵ کتاب درسی :

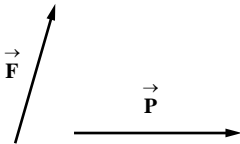
تفاضل دو بردار \vec{P} و \vec{F} در شکل ۱۴-۹ را به دست می آوریم.



مطابق شکل ۱۵-۹ برآیند بردار \vec{P} و $-\vec{F}$ را از روش مثلث به دست می آوریم. بردار \vec{R} حاصل تفاضل دو بردار \vec{P} و \vec{F} است.

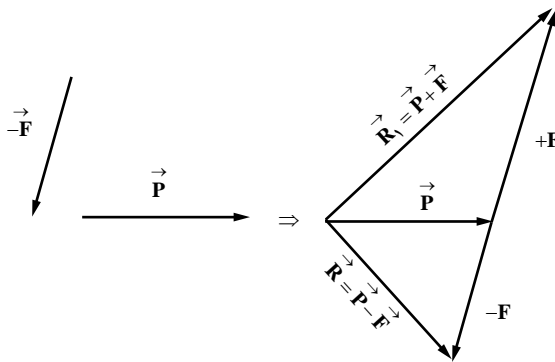


تحلیل مثال : در تفاضل دو بردار کافی است جهت بردار کسر شوند (با علامت منفی پشت آن) عوض شود و پس از قانون جمع برای آنها استفاده کرد.



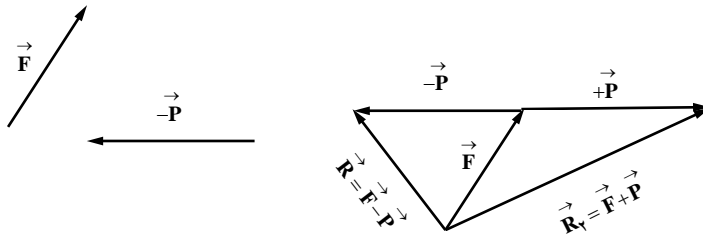
$$\vec{R} = \vec{P} - \vec{F} = \vec{P} + (-\vec{F})$$

الف) تفاضل $(\vec{P} - \vec{F})$:



$$\vec{R} = \vec{F} - \vec{P} = \vec{F} + (-\vec{P})$$

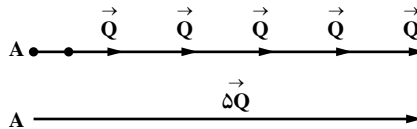
(ب) تفاضل $(\vec{F} - \vec{P})$:



نکته: برآیند حاصل از $(\vec{P} - \vec{F})$ و $(\vec{F} - \vec{P})$ را باهم مقایسه نمایید و اختلاف آنها را از نظر جهت و مقدار توصیف نمایید.

۹-۳-۷. حاصل ضرب یک بردار در یک عدد: فرض کنید بردار \vec{a} را داریم و می‌خواهیم آن را در عدد ۵ ضرب کنیم.

پس باید در همان جهت بردار \vec{Q} ، پنج بار بردار \vec{Q} را دنبال هم ترسیم کنیم. پاسخ نهایی $5\vec{Q}$ خواهد شد. به شکل ۹-۱۶ توجه کنید:



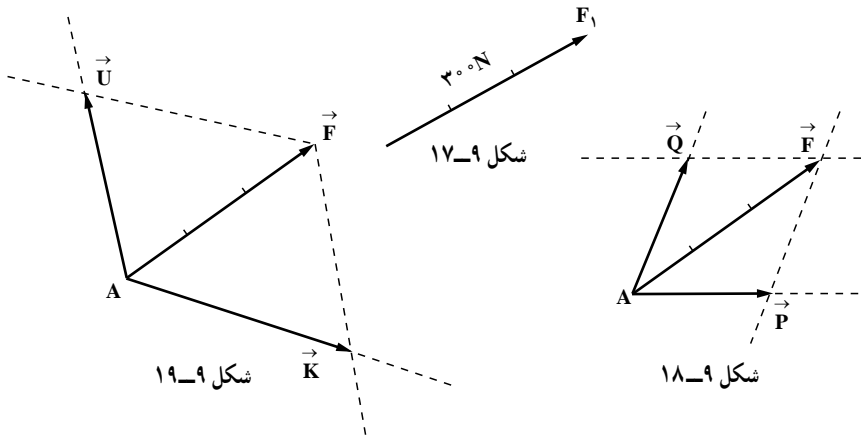
شکل ۹-۱۶

حاصل ضرب یک بردار در یک عدد برابر برداری است که بزرگی آن برابر با عدد مورد نظر ضرب در مقدار بردار است.

توجه: در ضرب بردارها، به غیر از حاصل ضرب یک بردار در یک عدد، حاصل ضرب یک بردار در یک بردار دیگر نیز کاربرد فراوانی دارد. البته با توجه به استفاده زیاد آن در مباحث ایستایی، مطالب مورد نیاز آن به طور مفصل در کتاب ایستایی مطرح شده است.

۹-۳-۸. تجزیه یک بردار: همان گونه که می‌توانیم برآیند دو بردار را به دست آوریم، می‌توانیم یک بردار را به دو مؤلفه نیز تجزیه کنیم. این دو مؤلفه باید چنان باشند که اگر برآیند دو مؤلفه را به دست آوریم، به همان برداری برسیم که آن را تجزیه کرده بودیم. برای مثال، بردار \vec{F} را در نظر

بگیرید (شکل ۹-۱۷). می‌توان آن را به صورت شکل‌های ۹-۱۸ یا ۹-۱۹ تجزیه کرد.



باید توجه داشت که یک بردار را می‌توان به حالت‌های مختلف زیادی تجزیه کرد. از بین تمامی این حالت‌ها، دو حالت خاص بسیار اهمیت دارد.

حالت اول: بردار \vec{F} را می‌خواهیم تجزیه کنیم؛ اما یکی از مؤلفه‌ها معلوم است. فرض کنید می‌خواهیم یکی از مؤلفه‌ها بردار \vec{Q} باشد که در این صورت معلوم است مؤلفه دیگر چقدر می‌شود به شکل ۹-۲۰ نگاه کنید.

در شکل ۹-۲۱ اگر از انتهای \vec{Q} به انتهای \vec{F} وصل کنیم، هم‌سنگ بردار \vec{T} به دست می‌آید؛ به نحوی که برآیند \vec{Q} و \vec{T} بردار \vec{F} خواهد بود. پس \vec{T} پاسخ است؛ بنابراین در شکل ۹-۲۱ از نقطه دلخواه A بردار \vec{F} و بردار \vec{Q} را هم‌سنگ با بردارهای شکل ۹-۲۰ رسم می‌کنیم. در این شکل از A بردار \vec{T} را رسم می‌کنیم، پس \vec{F} به دو مؤلفه \vec{T} و \vec{Q} تجزیه شده است؛ زیرا برآیند \vec{Q} و \vec{T} بردار \vec{F} است.

