بخش چهارم

راهنمای آموزش فصل سوم از بخش سوم کتاب دانش‌آموز

شامل:

- آموزش صفحات ۱۶۲ تا ۱۷۰
- حل مسائل بیش‌تر

آموزش صفحه‌ی ۱۶۱

در این صفحه آن‌چه در این فصل آموزش داده شده است، کم‌وبیش، مورد آزمون قرار می‌گیرد. سؤال‌ها بسیار ساده‌تر از مثال‌ها و تمرین‌های فصل است و دانش‌آموزان باید آن‌ها را در حدود ۵۰ دقیقه پاسخ دهند.

جواب سؤال‌های آزمون پایانی (۲) را در ادامه ملاحظه می‌کنید.

۱ــ داریم : $y' = 2x + 2$ و $y'(1) = 4$ ضمناً، $y(1) = 6$

پس

معادله‌ی خط مماس $\quad y - 6 = 4(x - 1)$

معادله‌ی خط قائم $\quad y - 6 = -\frac{1}{4}(x - 1)$

۲ــ داریم : $y' = -2\sin x \cos x$ و $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$ ضمناً، $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ معادله‌ی خط مماس $y = 2$ است لذا، معادله‌ی خط قائم $x = \frac{\pi}{2}$ است.

۳ــ الف) داریم : $y' = -3x^2 \leq 0$ تابع $y = 2 - x^3$ نزولی است.

ب) داریم : $y' = 2x \geq 0$ برای $x \geq 0$. بنابراین $y = x^2 - 1$ در $[0, +\infty)$ صعودی است.

۴ــ داریم : $y' = 3x^2 - 6x = 0$

$x = 2$ یا $x = 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y′		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	−2	↗	$+\infty$

این تابع در $(-\infty, 0]$ صعودی، در $[0, 2]$ نزولی و در $[0, +\infty)$ صعودی است که براساس جدول به راحتی نمودار تابع رسم می‌شود.

۵ــ داریم

$$y' = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ x = \frac{1}{3} \end{matrix}$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y′		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$\frac{-32}{27}$	↗	$+\infty$

تابع در $(-1, 0)$، ماکسیمم نسبی و در $(\frac{1}{3}, \frac{-32}{27})$ مینیمم نسبی دارد.

۶ــ جواب $a = 2$ است.

آموزش صفحه‌ی ۱۶۳

در این فصل سه کاربرد هم از مشتق ارائه می‌شود :

الف) تعیین تقعّر منحنی نمودار یک تابع و رسم نمودار با دقت بیش‌تر

ب) محاسبه‌ی حد توابع کسری با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال

ج) تخمین مقدار تابع در نقاط معین

لذا، در پیش آزمون (۳) سعی شده است، ضمن فراهم کردن مقدمات، معلومات ضروری دانش‌آموزان در این موارد سنجیده شود.

پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۳) بسیار آسان و در حدود ۳۰ دقیقه میسر است.

در قسمت (ت) سؤال ۲ دانش‌آموزان متوجه می‌شوند که

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

البته دانش‌آموزان باید به خاطر آورند که این نوع تمرین‌ها قبلاً به روش دیگری حل می‌شدند (صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۴).

در انتهای اجرای این پیش‌آزمون در کلاس، می‌توانید در مورد روشی که در سؤال ۲ به کار رفته است، از دانش‌آموزان سؤال کنید و نظر آن‌ها را جویا شوید. البته این‌که چرا این دو حد با هم برابرند، را به تدریس مطالب این فصل موکول نمایید.

در مورد سؤال ۳، با توجه به راهنمایی ارائه شده، دانش‌آموزان از یکی از فرمول‌های زیر استفاده خواهند کرد :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

با داشتن x (یا $a+h$) و با انتخاب a (یا h) مناسب می‌توان تقریب مناسبی از $f(x)$ (یا $f(a+h)$) حساب کرد. در این‌جا $a=36$ (یا $h=2$) مناسب هستند.

آموزش صفحه‌های ۱۶۴ و ۱۶۵

در این صفحه، ضمن اجرای یک فعالیت توسط دانش‌آموزان، الگوریتم تعیین جهت تقعّر منحنی نمودار یک تابع به دست آمده است.

مثال‌های حل‌شده‌ی صفحه‌ی ۱۶۷ به خوبی نحوه‌ی اجرای الگوریتم حاصل را نشان می‌دهند.

در تمرین ۸ــ۳ دانش‌آموزان باید آن‌چه آموخته‌اند روی مثال‌های دیگر پیاده کنند. جواب سؤال‌های این تمرین را در ادامه ملاحظه می‌کنید.

۱ــ الف) داریم : $y'' = 10 > 0$

جهت تقعر نمودار $y = 5x^2 - 8x + 3$ به طرف بالاست.

ب) داریم : $y'' = 2 > 0$

جهت تقعر نمودار $y = x^2 + 4x - 3$ به طرف بالاست.

پ) داریم : $y'' = -2 < 0$

جهت تقعر نمودار $y = -x^2 + 2$ به طرف پایین است.

ت) داریم : $y'' = -4 < 0$

جهت تقعر نمودار $y = 8x - 2x^2 + 1$ رو به پایین است.

نتیجه‌ی کلی این است که در نمودار تابع

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

اگر $a > 0$ تقعر نمودار به طرف بالاست و اگر $a < 0$ تقعر نمودار به طرف پایین است.

۲ــ الف) داریم : $y'' = 12x^2 + 8 > 0$

جهت تقعر نمودار $y = x^4 + 4x^2 - 12$ به طرف بالاست.

ب) داریم : $y'' = 12x^2 - 24x + 12$

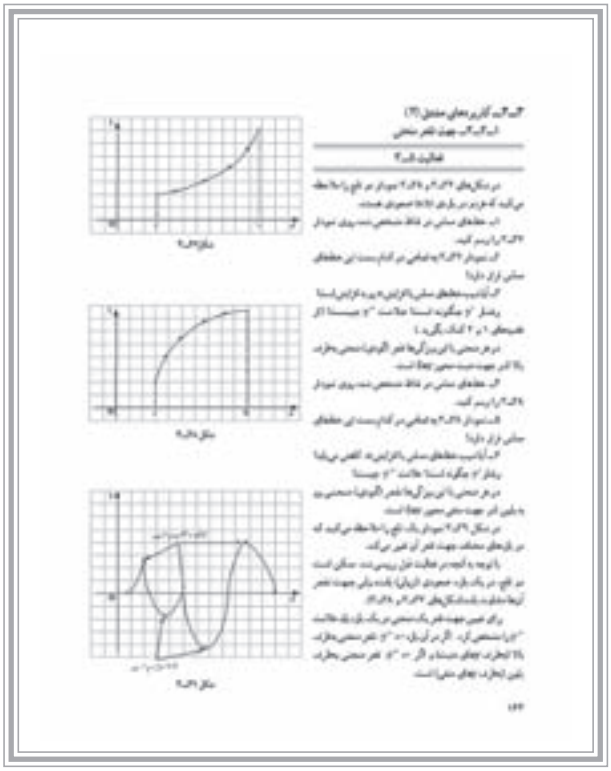
$$= 12(x^2 - 2x + 1) = 12(x-1)^2 \geq 0$$

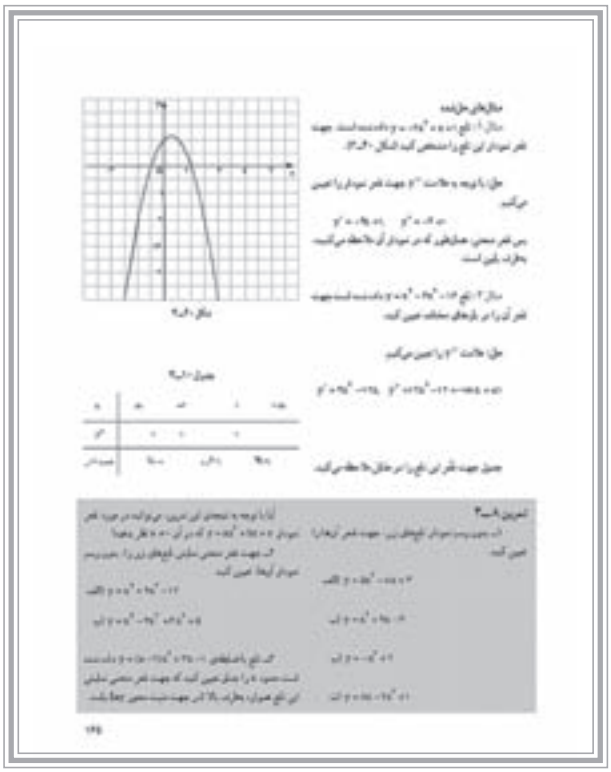
جهت تقعر نمودار $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 5$ به طرف بالاست.

۳ــ باید داشته باشیم $y'' > 0$ ولی داریم :

$$y'' = 2(a-2) > 0 \Rightarrow \boxed{a > 2}$$

از سؤال ۱ همین تمرین هم می‌توانستیم همین نتیجه را به‌دست آوریم ($a - 2 > 0$ و یا $a > 2$).





آموزش صفحه‌ی ۱۶۶

در این صفحه قاعده‌ی هوپیتال مطرح می‌شود و در حالتی که $g'(a) \neq 0$ تساوی زیر (با شرایط لازم)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ثابت می‌شود. البته، اگر $f'(a) = g'(a) = 0$ و $f''(a)$ و $g''(a)$ وجود داشته باشند و $g''(a) \neq 0$ مجدداً می‌توان برای محاسبه‌ی حد $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کرد.

از دانش‌آموزان بخواهید که مطالب قبل از تمرین ۹ــ۳ را مطالعه کنند و مثال‌های حل شده را نیز مرور کنند (یا صورت مثال‌ها را در دفتر خود بنویسند و جواب آن را خودشان به دست آورند و با جواب کتاب مقایسه کنند).

البته گاهی اوقات می‌توان تلفیقی از روش‌ها را به کار برد. مثلاً، بنابر نتیجه ۱، صفحه‌ی ۱۲۵، $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ پس،

$$(*) \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

بنابراین، مثال ۴ از مثال‌های حل شده‌ی این صفحه را می‌توان با یک بار استفاده از قاعده‌ی هوپیتال و بعد استفاده از (*) حل کرد.

جواب سؤال‌های تمرین ۹ــ۳ را در ادامه ملاحظه کنید.

۱ــ

الف) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{2x - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{24x^2}{2} = 3$

ب) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$

پ) $\lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin x + 2x}{4x^3}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\cos x + 2}{12x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x}{24x} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

ت) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x - \cos x}{1}$

$= -\sqrt{2}$

ث) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{1} = \frac{1}{4}$

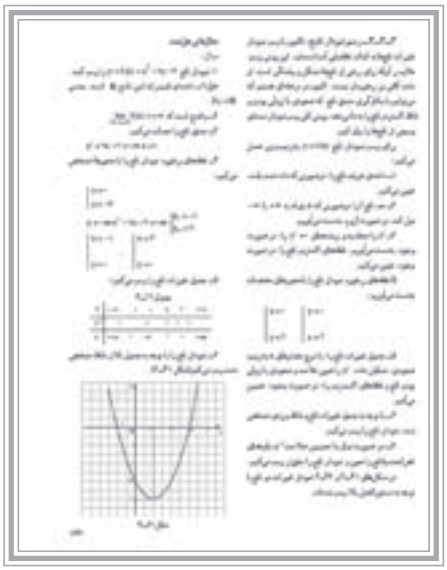
ج) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \tan x}{x^2 \cos x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x \tan x + \sin x(1 + \tan^2 x)}{2x\cos x - x^2 \sin x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos x(1 + \tan^2 x) - \sin x \tan x + 2\sin x \tan x(1 + \tan^2 x)}{2\cos x - 4x\sin x - x^2 \cos x}$

$= 1$

مثال (ج) بدون روش هوپیتال ساده‌تر است (صفحه‌ی ۱۲۵ را ملاحظه کنید.)



آموزش صفحه‌ی ۱۶۷

در این صفحه، به کمک آن‌چه در مورد تعیین نقاط اکسترمم و جهت تقعّر نمودار تابع گفته شده، رسم دقیق نمودار یک تابع مورد بررسی قرار می‌گیرد و دستورالعملی برای رسم منحنی نمایش یک تابع ارائه شده است.

از دانش‌آموزان بخواهید که این صفحه را در منزل مطالعه کنند و مثال‌های ۱ و ۲ را نیز به دقت مرور کنند.

در یک جلسه‌ی کلاس، ضمن توضیح نکات صفحه‌ی ۱۶۷ مثال‌ها را نیز به کمک دو نفر از دانش‌آموزان روی تابلو کلاس شرح دهید.

سپس از دانش‌آموزان بخواهید که تمرین ۱۰ــ۳ را در کلاس اجرا کنند و قسمت‌های (پ) و (ت) را برای آن‌ها شرح دهید.

تنها سؤال (ت) را حل می‌کنیم. بقیه ساده است.

$$y = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + 3$$

$$y' = 2x^3 - 3x^2 - 2x = x(2x+1)(x-2)$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 2 \text{ یا } x = \frac{-1}{2}$$

$$y'' = 6x^2 - 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{6} \begin{cases} \cong 1/26 \\ \cong -0/26 \end{cases}$$

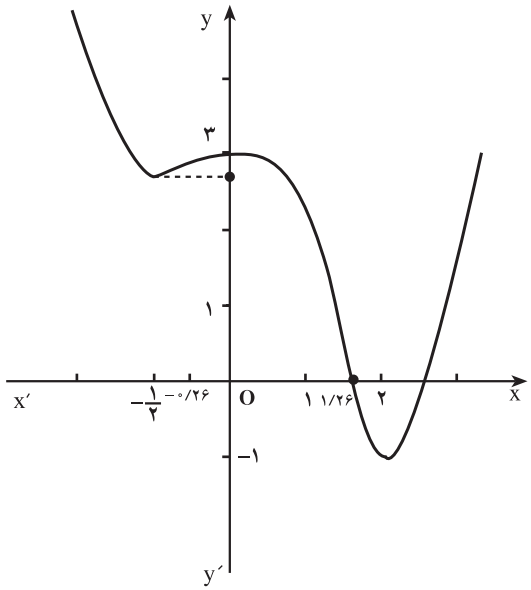
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3-\sqrt{21}}{6}$		0		$\frac{3+\sqrt{21}}{6}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0		$+$		0		$-$		0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{91}{32}$	↗	α	↗	3	↘	β	↘	-1	↗	$+\infty$
y''			$+$		0		$-$		0		$+$		
			تقعر رو به بالا				تقعر رو به پایین				تقعر رو به بالا		

در این جدول داریم $\alpha \cong ۲/۹۵$

$\beta \cong ۰/۶۹$

رسم نمودار این تابع، در بازه‌های $(-\frac{۱}{۲},۰)$ و $(۰,۲)$، بدون استفاده از علامت و مقادیر y'' دقت لازم را نخواهد داشت.

رسم نمودار $y=\frac{۱}{۲}x^۴-x^۳-x^۲+۳$ را، به کمک جدول تغییرات آن، در مقابل ملاحظه می‌کنید.



آموزش صفحه‌ی ۱۶۹

در این صفحه، به کمک فرمول مشتق، و به عبارت دیگر با بسط تیلور تابع تا مشتق اول، تقریبی از $f(x)$ به دست می‌آید.

آموزش این صفحه نیاز به مقدمه‌ای دارد که دبیران محترم ارائه خواهند کرد. هر چند متن کتاب هم گویاست. می‌دانیم که اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

بنابراین، اگر x به a نزدیک باشد.

$$(*)\quad f(x)\cong f(a)+f'(a)(x-a)$$

و با داشتن a می‌توان تقریبی برای $f(x)$ به دست آورد.

معمولاً a چنان انتخاب می‌شود که محاسبه‌ی $f(a)$ و $f'(a)$ ساده باشد، البته فرض این است که $f(x)$ به راحتی قابل محاسبه نیست.

ضمناً می‌توان از فرمول زیر هم استفاده کرد :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

لذا، اگر قرار دهید $x=a+h$ یا $h=x-a$، در صورتی که h کوچک باشد داریم :

$$(**)\quad f(x)=f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$$

هر یک از فرمول‌های (*) و (**) را می‌توان به کار برد. در کتاب فقط از فرمول (*) استفاده شده است.

سپس از دانش‌آموزان بخواهید که حل مثال‌های کتاب را به دقت مطالعه کنند و در صورت لزوم راهنمایی لازم را بفرمایید.

آن‌چه در آموزش این صفحه اهمیت دارد انتخاب a (یا h) و تابع f است. برای راهنمایی بیش‌تر، برخی از سؤال‌های تمرین ۱۱ـ۳ در زیر حل می‌شود.

الف) برای محاسبه‌ی تقریبی از $\sqrt[3]{28}$ قرار می‌دهیم $a=27$ (زیرا، $\sqrt[3]{27}=3$) بنابراین، اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

و داریم: $f(28)=\sqrt[3]{28}\cong 3+1\times\frac{1}{3\times 9}\cong 3/04$

ب) برای محاسبه‌ی تقریبی از $\sqrt[4]{17}$ قرار می‌دهیم $a=16$، (زیرا، $\sqrt[4]{16}=2$)

لذا، اگر $f(x)=\sqrt[4]{x}$

و $f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

و داریم: $\sqrt[4]{17}=2+1\times\frac{1}{4\times 8}\cong 2/03$

پ) برای محاسبه‌ی تقریبی از $\sqrt[5]{37}$ قرار می‌دهیم $a=32$ (چون $\sqrt[5]{32}=2$)، لذا، اگر

$$f(x)=\sqrt[5]{x}$$

آنگاه $f'(x)=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

و داریم: $\sqrt[5]{37}\cong 2+5\frac{1}{5\times 16}\cong 2/06$

ت) برای محاسبه‌ی تقریبی از $\tan 50^\circ$ قرار می‌دهیم: $a=45^\circ$ (چون $\tan 45^\circ=1$) بنابراین، اگر

$$f(x)=\tan x$$

$$f'(x)=1+\tan^2 x$$

و داریم:

$$\tan 50^\circ\cong 1+5\times\frac{3/14}{180}\times(1+1)$$

$$\cong 1/16$$

آموزش صفحه‌ی ۱۷۰

در آزمون پایانی (۳) سؤال‌هایی بسیار ساده، متناسب با آن‌چه در فصل ۳ آموزش داده شد، مطرح شده است. از دانش‌آموزان بخواهید که در کلاس آن‌ها را پاسخ دهند (در حدود ۴۰ دقیقه).

پاسخ سؤال‌های این آزمون را در ادامه ملاحظه می‌کنید.

۱ــ الف) داریم : $y'' = ۱۲x^۲ - ۶x + ۴ > ۰$ لذا، تقعر منحنی رو به بالاست.

ب) داریم : $y'' = ۶x - ۸$

$y'' = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$

x	$-\infty$		$\frac{۴}{۳}$		$+\infty$
y''		$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	تقعر رو به پایین	$\frac{-۱۱۹}{۲۷}$	تقعر رو به بالا	$+\infty$

۲ــ بنابر قاعده‌ی هوپیتال داریم :

الف) $\lim_{x\to ۰} \frac{\cos x - ۱}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{-\sin x}{۱} = ۰$

ب) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۸x^۳ - ۱}{۱ - ۲x} = \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۲۴x^۲}{-۲} = -۳$

پ) $\lim_{x\to ۰} \frac{۱ - \cos x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{۲x}$

$= \lim_{x\to ۰} \frac{\cos x}{۲} = \frac{۱}{۲}$

۳ ــ داریم : $y' = -۶x^۲ + ۱۲x$

$y' = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ , \ x = ۲$

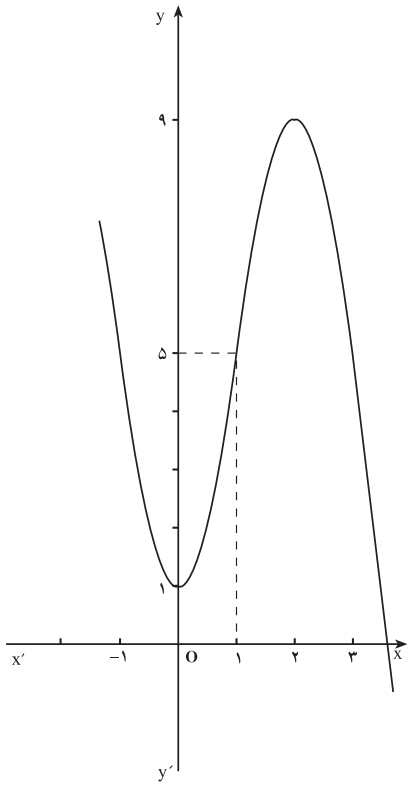
$y'' = -۱۲x + ۱۲ \ , \ y'' = ۰ \Rightarrow \ x = ۱$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	۱	$\nearrow$	۵	$\nearrow$	۹	$\searrow$	$-\infty$
y''		$+$		$+$	۰	$-$		$-$	

تقعر منحنی روبه پایین تقعر منحنی رو به بالا

نمودار $y = -۲x^۳ + ۶x^۲ + ۱$ با توجه به جدول بالا رسم شده است.

$y(-۱) = ۹$



۴ــ مشابه این سؤال زیاد حل شده است.

حل مسائل بیش‌تر

۱ــ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^{۳} - ۳x$ را به کمک مشتق رسم نمایید.

حل: $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

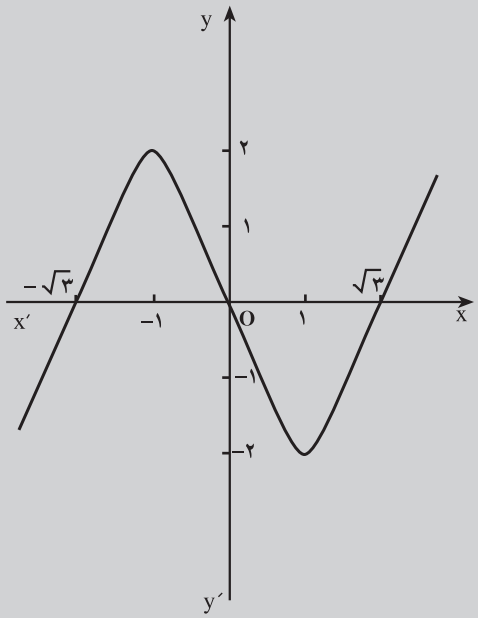
$$y' = ۳x^{۲} - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

$$y(۱) = ۱ - ۳ = -۲ \ , \ y(-۱) = -۱ + ۳ = ۲$$

$$y = ۰ \Rightarrow x^{۳} - ۳x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

$$x = \pm\sqrt{۳}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
y′		+		+	۰	−		−	۰	+		+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۲	↘	۰	↘	-۲	↗	۰	↗	$+\infty$



۲ــ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^{۳} - ۲x^{۲} + ۴$ را به کمک مشتق رسم کنید.

$$D_f = \mathbb{R} \ , \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

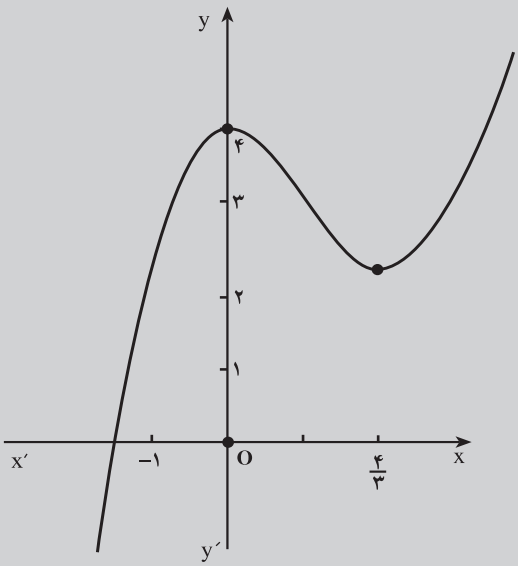
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$y' = ۳x^{۲} - ۴x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = ۴$$

$$۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$$

$$y(\frac{۴}{۳}) = (\frac{۴}{۳})^{۳} - ۲(\frac{۴}{۳})^{۲} + ۴ = \frac{۷۶}{۲۷}$$

x	$-\infty$		۰		$\frac{۴}{۳}$		$+\infty$
y′		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۴	↘	$\frac{۷۶}{۲۷}$	↗	$+\infty$



۳ــ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۲x - x^۲ - ۱$ را به کمک مشتق رسم کنید.

حل: $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$$

$$y' = ۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$y(۱) = ۰$$

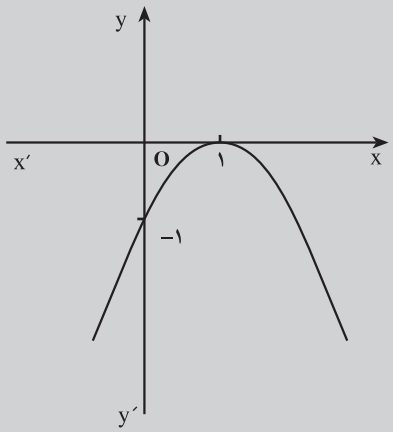
$$y = ۲x - x^۲ - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$x = ۰ \Rightarrow y = -۱$$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
y'		+		+	۰	−	
y	$-\infty$	↗	-۱	↗	۰	↘	$-\infty$



۴ــ منحنی تابع با ضابطه‌ی $y = x^۳ + ۲$ را به کمک مشتق رسم کنید.

حل: $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

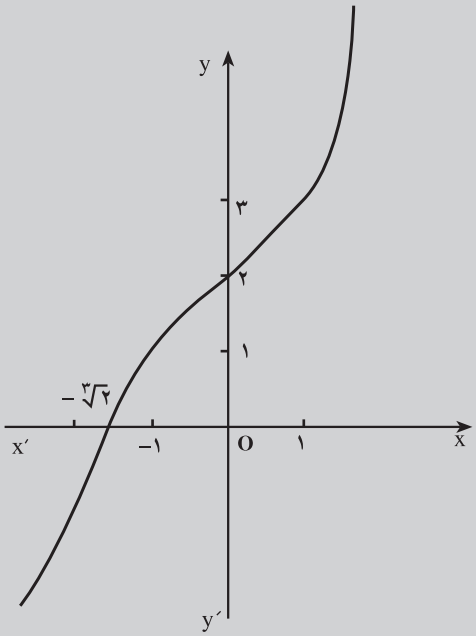
$$y' = ۳x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

$$y(۰) = ۲$$

$$y = x^۳ + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -\sqrt[۳]{۲}$$

$$y'' = ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

x	$-\infty$		$-\sqrt[۳]{۲}$		۰		۱		$+\infty$
y'		+		+	۰	+		+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۲	↗	۳	↗	$+\infty$
y''		—			۰		+		



بخش چهارم

راهنمای آموزش فصل چهارم از بخش سوم کتاب دانش‌آموز

شامل:

- آموزش صفحات ۱۷٤ تا ۱۸۰
- حل تمرین‌های بخش سوم کتاب دانش‌آموز
- حل مسائل بیش‌تر

آموزش صفحه‌ی ۱۷۴

در این صفحه نیز یک مسئله‌ی هندسی مطرح می‌شود که دانش‌آموزان باید آن را به صورت فعالیت اجرا کنند.

مطابق آن‌چه در صفحه‌ی قبل هم گفته شد دانش‌آموزان باید مساحت مستطیل DEFG، از شکل ۴۸ــ۳، را برحسب یک متغیر به دست آورند و بعد ماکسیمم آن را حساب کنند.

به دلیل اهمیت این فعالیت در مورد هر مرحله‌ی آن توضیح لازم داده می‌شود.

۱ــ در مثلث ABH داریم :

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow a^2 = \frac{a^2}{4} + AH^2$$

$$AH = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

۲ــ در مثلث BDE داریم :

$$\tan \hat{B} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{DE}{BE} = \frac{x}{BE}$$

۳ــ پس، $BE = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

۴ــ دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی BDE و CGF برابرند. لذا، $FC = BE = \frac{x}{\sqrt{3}}$ و داریم :

$$a = BC = BE + y + FC = y + 2BE$$

بنابراین، $y = a - \frac{2x}{\sqrt{3}}$

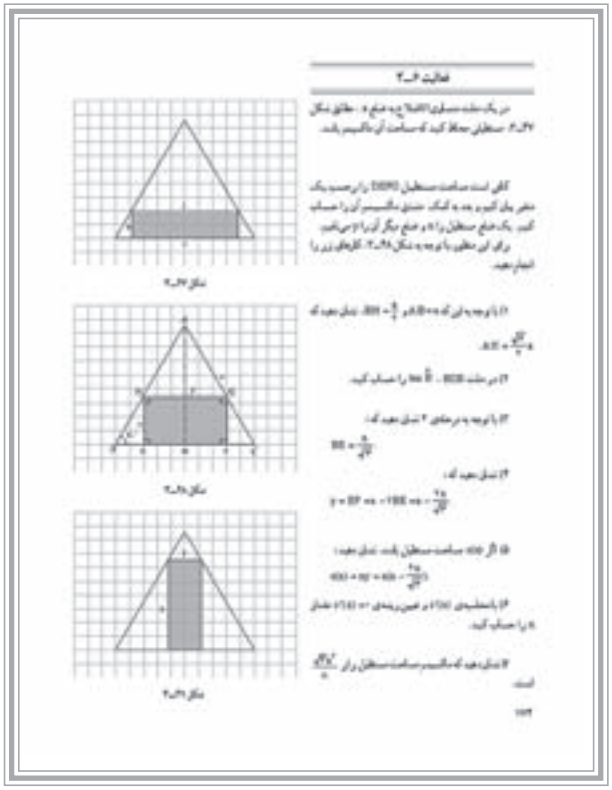
۵ــ داریم : $S = xy = x(a - \frac{2x}{\sqrt{3}})$

۶ ــ لذا، $S' = (a - \frac{2x}{\sqrt{3}}) - \frac{2}{\sqrt{3}}x = a - \frac{4x}{\sqrt{3}}$

$$S' = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

۷ــ پس، $S(\frac{\sqrt{3}}{4}a) = \frac{\sqrt{3}a}{4}(a - \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a}{\sqrt{3}})$

و $= \frac{\sqrt{3}a}{4}(a - \frac{a}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$



لذا، ماکسیمم مساحت $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$ است.

در این‌جا می‌توانید سؤال دیگری هم مطرح کنید.

مساحت مثلث چند برابر ماکسیمم مساحت مستطیل‌هاست؟

بدیهی است که : $(\frac{\sqrt{3}}{2}.a) \times \frac{a}{2} =$ مساحت مثلث

ماکسیمم مساحت مستطیل‌ها $\times 2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 =$

یعنی ماکسیمم مساحت مستطیل‌ها نصف مساحت مثلث است.

آموزش صفحه‌ی ۱۷۵ و ۱۷۶

در این دو صفحه هم دو مثال دیگر ملاحظه می‌شود. از دانش آموزان بخواهید که مثال‌ها را مطالعه کنند و نحوه‌ی حل آن‌ها را الگوبرداری نمایند.

برای آموزش صفحه‌ی ۱۷۵، یادآوری سطح جانبی و سطح کل مکعب مستطیل و حجم آن لازم است. حتی ممکن است لازم شود، قبل از ورود به مطالعه‌ی این صفحه، مثال‌هایی را از محاسبه‌ی سطح جانبی، سطح کل و حجم مکعب مستطیل‌هایی با ابعاد معین، مطرح و حل کنید.

یادآوری مشتق تابع $y = \frac{1}{x}$ نیز لازم است (البته می‌توانید سؤال کنید. در این صورت اگر همه‌ی دانش‌آموزن، اطلاع کافی داشتند کار را ادامه می‌دهید والا می‌گویید که $y' = -\frac{1}{x^2}$).

پس از این تمهیدات، فهم مطالب صفحه‌ی ۱۷۵ برای آن‌ها ساده خواهد شد.

مثال ۴ از صفحه‌ی ۱۷۶ نیز ساده است. گرچه هندسی است ولی این بار پای مینیمم کردن نوعی هزینه در میان است؛ از دانش‌آموزان بخواهید که این مثال و حل آن را مطالعه کنند. درصورت لزوم به سؤالات آن‌ها پاسخ دهید یا از دانش‌آموزان دیگر بخواهید که به سؤالات دیگر دانش‌آموزان پاسخ دهند.

جواب تمرین ۱۲ــ۳ را نیز در زیر ملاحظه می‌کنید.

کم‌ترین محیط = ۲(۲۰۰+۲۰۰) = ۸۰۰ متر

هزینه‌ی خرید سیم‌خاردار = ۸۰۰×۴×۵۰۰ = ۱/۶۰۰/۰۰۰ ریال

البته در شکل دو ردیف سیم‌خاردار ملاحظه می‌شود.

آموزش صفحه‌ی ۱۷۷

قبل از این‌که از دانش‌آموزان بخواهید فعالیت ۷ـ۳ را اجرا کنند. در مورد ویژگی‌های مخروط، اجسام مخروطی شکل و سطح جانبی، سطح کل و حجم آن اطلاعاتی مختصر در اختیار دانش آموزان قرار دهید. سپس از آن‌ها بخواهید که فعالیت ۷ـ۳ را، فردی یا گروهی، اجرا کنند. مراحل این فعالیت در زیر توضیح داده شده‌اند.

۱ـ حجم مخروط = (مساحت قاعده مخروط)× (ارتفاع مخروط) $\times \frac{1}{3}$

۲ـ در مثلث TAH داریم :

$$AT^2 = AH^2 + TH^2$$

و یا $m^2 = r^2 + h^2$

پس، $r^2 = m^2 - h^2$

۳ـ مساحت قاعده‌ی مخروط مساوی است با :

$$\pi r^2 = \pi(m^2 - h^2)$$

و طبق فرمول مرحله‌ی (۱) داریم :

$$v = \frac{\pi}{3}(m^2 - h^2)h$$

۴ـ بلی

۵ـ واضح است که چون باید $v > 0$ دامنه‌ی تغییرات h عبارت است از : $0 < h < m$

۶ـ داریم :

$$v = \frac{\pi}{3}(m^2 h - h^3)$$

$$v' = \frac{\pi}{3}(m^2 - 3h^2)$$

۷ـ $v' = 0 \Rightarrow h = \frac{m}{\sqrt{3}}$

(واضح است که جواب $h = \frac{-m}{\sqrt{3}}$ قابل قبول نیست چون $h > 0$)

۸ـ داریم : $v(\frac{m}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{3}(\frac{m^3}{\sqrt{3}} - \frac{m^3}{3\sqrt{3}})$

$= \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} m^3$ (متر مکعب)

۹ـ بلی بیش‌ترین حجم خیمه $\frac{2\pi m^3}{9\sqrt{3}}$ است.

۱۰ـ اگر متر $m = 5\sqrt{3}$ آن‌گاه

بیش‌ترین حجم خیمه $= \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \times 125 \times 3\sqrt{3} = \frac{250\pi}{3}$ متر مکعب

آموزش صفحه‌ی ۱۷۸

تمرین ۱۳ــ۳ سؤالاتی مشابه مسائل حل شده را در صفحات قبل مطرح می‌کند. پاسخ سؤال‌های این تمرین را در زیر ملاحظه می‌کنید.

۱ــ در این مسئله نیز اگر دو جزء عدد ۳۶ را x و y فرض کنیم می‌خواهیم داشته باشیم :

$$x+y=۳۶ \Rightarrow y=۳۶-x$$

$$xy=x(۳۶-x)$$

لذا، باید ماکسیمم $f(x)=x(۳۶-x)$ را به دست آوریم.

$$f'(x)=۳۶-۲x$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow x=y=۱۸$$

۲ــ سطح قاعده برابر است با $۲x\times x=۲x^۲$

سطح جانبی مکعب مستطیل برابر است با

$$\text{ارتفاع} \times (\text{محیط قاعده}) = ۲(۲x+x)\times h$$

$$=۶xh$$

$$۲۴۰=۲\times ۲x^۲+۶xh$$

در نتیجه

$$h=\frac{۱۲۰-۲x^۲}{۳x}$$

ارتفاع × (سطح قاعده) = حجم مکعب مستطیل

$$V=۲x^۲\times\frac{۱۲۰-۲x^۲}{۳x}$$

$$=\frac{۲۴۰x-۴x^۳}{۳}$$

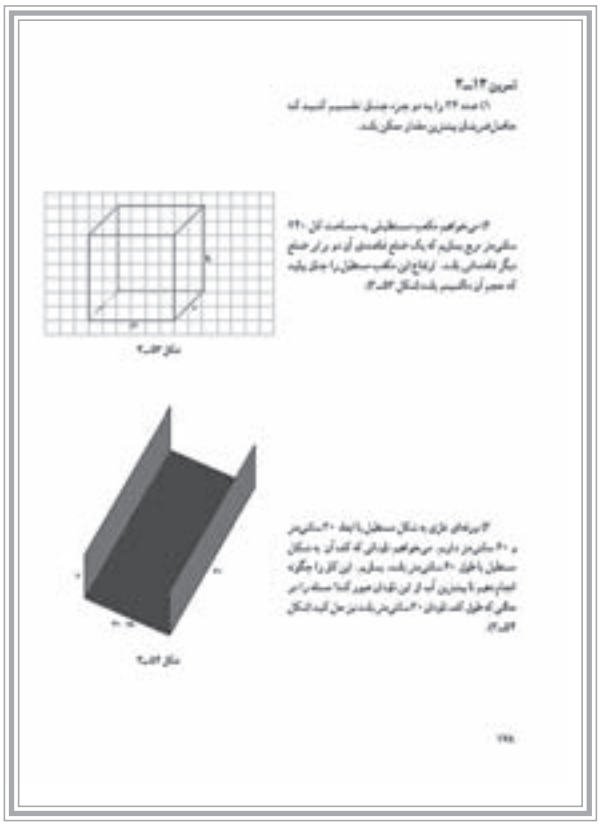
$$V'=\frac{۲۴۰-۱۲x^۲}{۳}=۸۰-۴x^۲$$

$$V'=۰ \Rightarrow x=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

$$V_{max}=\frac{۲۴۰(۲\sqrt{۵})-۴(۲\sqrt{۵})^۳}{۳}$$

$$=\frac{(۴۸۰-۱۶۰)\sqrt{۵}}{۳}=\frac{۳۲۰\sqrt{۵}}{۳}$$

۳ــ در واقع با حجم مکعب مستطیلی به ابعاد x ، $۳۰-۲x$ و ۶۰ را ماکسیمم کنیم.



$$V=۶۰x(۳۰-۲x)$$

$$V'=۱۸۰۰-۲۴۰x=۰ \Rightarrow x=\frac{۱۵}{۲}$$

اگر طول کف ناودان را ۳۰ سانتی‌متر بگیریم داریم :

$$V=۳۰x(۶۰-۲x) \Rightarrow V'=۱۸۰۰-۱۲۰x=۰$$

$$\Rightarrow x=۱۵$$

(در این حالت کف ناودان مربع می‌شود!)

آموزش صفحه‌ی ۱۷۹

سؤال‌های آزمون پایانی (۴) نیز مشابه مثال‌های فصل ۴ است. از دانش‌آموزان بخواهید در مدت حدود ۳۰ دقیقه (و در کلاس) به سؤال‌های این آزمون پاسخ دهند.

پاسخ سؤال‌های آزمون پایانی (۴) را در زیر ملاحظه می‌کنید.

آزمون پایانی (۴)

۱ـ محیط قاعده‌ی یک مکعب مستطیل ۳۶ متر است. اگر ارتفاع این مکعب ۱۰ متر باشد، ابعاد قاعده‌ی آن را چنان تعیین کنید که حجم آن بیشترین مقدار را داشته باشد.

۲ـ مثلث ABC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است (شکل ۴ـ۵۵). اگر طول ساق AB متساوی ۱۰ سانتی‌متر باشد، DE = x را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل ADEF ماکسیمم باشد.

شکل ۴ـ۵۵ (با جدایی ۱)

۳ـ ارتفاع یک مکعب مستطیل متساوی محیط قاعده‌ی آن است. اگر مجموع ابعاد این مکعب مستطیل ۳۶ متر باشد بیشترین حجم آن را تعیین کنید. جواب: ۸۶۴ متر مکعب

۱۷۹

۱ـ فرض می‌کنیم ابعاد قاعده x و y باشند. بنابراین

$$2(x+y)=36 \text{ متر}$$

$$x+y=18 \Rightarrow y=18-x$$

$$V=xy\times 10=10x(18-x)$$

$$V'=180-20x=0 \Rightarrow x=9 \text{ متر}$$

بنابراین، بیشترین حجم مساوی است با

$$V(9)=10\times 9(18-9)=810 \text{ متر مکعب}$$

۲ـ چون $\hat{B}=45^\circ$ پس، $DB=x$ و در نتیجه

$$AD=AB-DB=10-x$$

پس،

$$S=ADEF \text{ مساحت } =x(10-x)=10x-x^2$$

$$S'=10-2x=0 \Rightarrow x=5$$

واضح است که : $S(5)=25$ سانتی‌متر مربع

۳ـ ابعاد قاعده‌ی مکعب مستطیل را x و y و ارتفاع آن را h می‌نامیم. طبق صورت مسئله

$$h=2(x+y)$$

و

$$x+y+h=36$$

$$\Rightarrow (x+y)+2(x+y)=36$$

$$\Rightarrow x+y=12 \Rightarrow y=12-x$$

$$V=xyh=x(12-x)\times 24$$

$$=24x(12-x)$$

$$V'=288-48x=0 \Rightarrow x=6 \text{ متر}$$

$$V=24\times 6(12-6)=864 \text{ متر مکعب}$$

آموزش صفحه‌ی ۱۸۰

در این صفحه سؤال‌هایی مطرح شده است که تمامی موضوعات بخش سوم کتاب را در بردارند. استفاده از مجموعه‌هایی از این نوع سؤالات می‌تواند به عنوان بخشی از آزمون یک نیم سال تحصیلی دانش‌آموزان منظور شود. از دانش‌آموزان بخواهید که به این سؤال‌ها در منزل پاسخ دهند. زمان پاسخ‌گویی را حدود ۶۰ دقیقه تعیین کنید. پاسخ سؤال‌های این تمرین را در ادامه ملاحظه می‌کنید.

۱ــ داریم : $f(x+h)=(x+h)^{۲}-۴(x+h)$

$$=x^{۲}+۲hx+h^{۲}-۴x-۴h$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=۲x-۴$$

۲ــ جواب‌ها به قرار زیرند :

الف) $y'=x^{۲}-x+۱$

ب) $y'=۸x^{۷}$ (زیرا، $y=x^{۸}-۱$)

پ) $y'=\frac{۳(x+۱)}{(x-۱)^{۳}}$

ت) $y'=\frac{۴x-۱}{۳\sqrt[۳]{(۲x^{۲}-x+۳)^{۲}}}$

ث) $y'=\cos^{۲}x-\sin^{۲}x-۲\sin x\cos x$

ج) $y'=-۲\cos(\frac{\pi}{۴}-۲x)\cos(x+\frac{\pi}{۴})$

$$-\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)\sin(x+\frac{\pi}{۴})$$

چ) $y'=-\frac{۲}{x^{۲}}(۱+\tan^{۲}\frac{۲}{x})+\frac{۱}{x^{۲}}(۱+\cot^{۲}\frac{۱}{x})$

ح) $y'=\cos ۳x-\sin\frac{x}{۳}$

۳ــ داریم : $u'=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}$ پس،

$$y'_x=۲uu'=۲\sqrt{x+۲}\times\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}=۱$$

۴ــ برای هر حالت معادله‌ی خط مماس و خط قائم را می‌یابیم.

الف) $y'=۳x^{۲}-۶x\Rightarrow y'(-۱)=۹=m$

$y(-۱)=-۱-۳-۲=-۶$

معادله‌ی خط مماس : $y+۶=۹(x+۱)$

معادله‌ی خط قائم : $y+۶=-\frac{۱}{۹}(x+۱)$

ب) $y'=-۲\sin x\cos x-\sin x$

$y'(\frac{\pi}{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=-\sqrt{۳}=m$

$y(\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$

معادله‌ی خط مماس : $y-\frac{۳}{۴}=-\sqrt{۳}(x-\frac{\pi}{۳})$

معادله‌ی خط قائم : $y-\frac{۳}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-\frac{\pi}{۳})$

پ) $y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}}$

$y'(۳)=\frac{۱}{۲}=m$

$y(۳)=۱$

معادله‌ی خط مماس : $y-۱=\frac{۱}{۲}(x-۳)$

معادله خط قائم : $y-۱=-۲(x-۳)$

۵ــ برای هر قسمت جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم.

الف) $y'=-۲x+۴=۰\Rightarrow x=۲$

$x=۰\Rightarrow\ y=-۲$

$y=۰\Rightarrow\ x=۲\pm\sqrt{۲}$

x	$-\infty$		۰		$۲-\sqrt{۲}$		۲		$۲+\sqrt{۲}$		$+\infty$
y'		+		+		+	۰	−		−	
y	$-\infty$	↗	−۲	↗	۰	↗	۲	↘	۰	↘	$-\infty$

تابع در $M\left|\begin{matrix}۲\\۲\end{matrix}\right.$ دارای ماکسیمم نسبی است.

ب) $y'=\frac{۱}{x^۲}>۰$

تابع بر $(-\infty,۰)$ صعودی است.

پ) $y'=-۲\sin x\ ,\ x\in(\frac{\pi}{۲},\pi)$

در بازه‌ی بالا $y'<۰$ و تابع نزولی است.

۶ــ مانند سؤال ۵ عمل می‌شود.

۷ــ داریم : $f'(x)=۳ax^۲+b$

$f'(-۱)=۰\Rightarrow\ ۳a+b=۰$ (۱)

$f(-۱)=۴\Rightarrow\ -a-b+۲=۴$

و یا $a+b=-۲$ (۲)

از (۱) و (۲) به دست می‌آید :

$a=۱\ ,\ b=-۳$

۸ــ داریم : $f'(x)=۲\sin x\cos x-\sin x$

$=\sin x(۲\cos x-۱)=۰$

$\Rightarrow\sin x=۰\Rightarrow x=۰$ یا $x=\pi$

یا $۲\cos x-۱=۰\Rightarrow\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳}$

x	۰		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{\pi}{۲}$		π
y'	۰	+	۰	−	۱	−	۰
y	۱	↗	$\frac{۵}{۴}$	↘	۱	↘	−۱

تابع در $M\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۳}\\\frac{۵}{۴}\end{matrix}\right.$ دارای ماکسیمم نسبی است.

حل مسائل بیش‌تر

۱ــ می‌خواهیم قطعه زمین مستطیل شکلی به مساحت ۴۰۰۰۰ متر مربع را از یک زمین وسیع انتخاب و حصارکشی کنیم. ابعاد این مستطیل را طوری بیابید که هزینه‌ی حصارکشی آن کم‌ترین باشد.

حل

حل: برای مینیمم بودن هزینه باید محیط زمین حداقل باشد. اگر x و y طول و عرض زمین باشند

$$\text{محیط زمین} = p = ۲(x+y)$$

$$xy = ۴۰۰۰۰ \Rightarrow y = \frac{۴۰۰۰۰}{x}$$

$$p = ۲(x + \frac{۴۰۰۰۰}{x}) = ۲\frac{x^۲ + ۴۰۰۰۰}{x}$$

$$p' = ۲\frac{۲x^۲ - (x^۲ + ۴۰۰۰۰)}{x^۲}$$

$$= ۲\frac{x^۲ - ۴۰۰۰۰}{x^۲} = ۰$$

$$x^۲ - ۴۰۰۰۰ = ۰ \Rightarrow x = ۲۰۰ \text{ متر}$$

$$y = \frac{۴۰۰۰۰}{۲۰۰} = ۲۰۰ \text{ متر}$$

۲ــ محیط مستطیلی ۳۶ سانتی‌متر است. طول و عرض آن را چنان تعیین کنید که مساحت آن ماکسیمم باشد.

حل: فرض کنید x اندازه‌ی طول مستطیل و y اندازه‌ی عرض مستطیل باشد.

$$۲(x+y) = ۳۶ \Rightarrow x + y = ۱۸$$

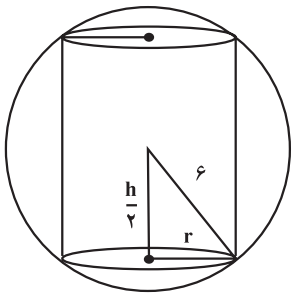
$$y = ۱۸ - x$$

$$S = xy = x(۱۸ - x) = ۱۸x - x^۲$$

$$S' = ۱۸ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۹ \Rightarrow y = ۹$$

۳ــ ابعاد استوانه مستدیر قائمی را تعیین کنید که بزرگ‌ترین سطح جانبی را داشته باشد و بتواند در یک کره با شعاع ۶ سانتی‌متر محاط شود.

حل:



$$r^۲ + \left(\frac{h}{۲}\right)^۲ = ۶^۲$$

$$h = ۲\sqrt{۳۶ - r^۲}$$

$$A = ۲\pi rh$$

$$A(r) = ۴\pi r\sqrt{۳۶ - r^۲}$$

$$A'(r) = \frac{۴\pi(۳۶ - ۲r^۲)}{\sqrt{۳۶ - r^۲}}$$

$$A'(r) = ۰ \Rightarrow r = ۳\sqrt{۲}$$

$$A(۰) = ۰ \ , \ A(۶) = ۰$$

$$A(۳\sqrt{۲}) = ۷۲\pi$$

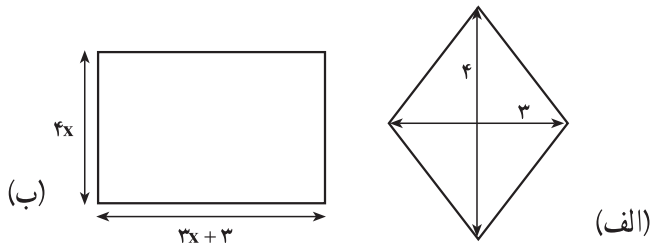
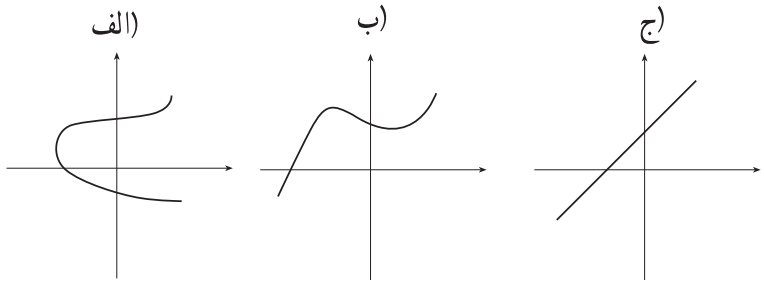
نمونه سؤال‌های پیش نهادی برای نیم سال اول

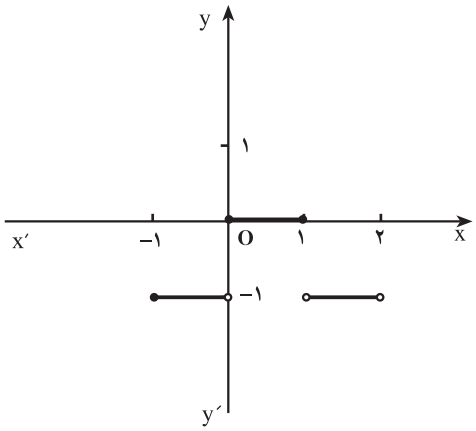
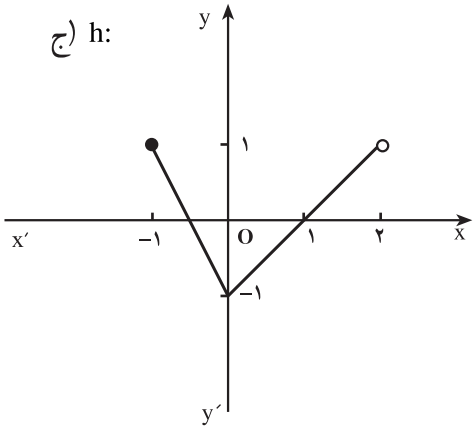
سؤالات امتحان درس ریاضی (۳)	رشته: کلیه‌ی رشته‌های فنی و کامپیوتر	ساعت:
سال سوم آموزش متوسطه سالی ــ واحدی (۲۰ نمره‌ای)	تاریخ امتحان:	مدت: ۱۲۰ دقیقه
دانش‌آموزان و داوطلبان نیم‌سال اول ۸۸ ــ ۸۷	هنرستان:	

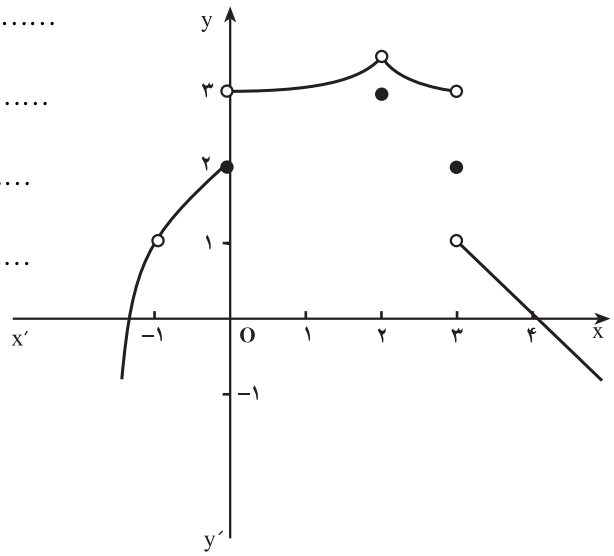
راهنمای آزمون

۱) پاسخ سؤالات را در برگه‌ی سفید جداگانه بنویسید.

۲) این امتحان دارای ۲۰ سؤال است و هر سؤال ممکن است شامل چند قسمت باشد.

ردیف	سؤال	بارم
۱	عدد k را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی $B(1,2k-1)$ روی محور $x'ox$ باشد، سپس مختصات B را بنویسید.	۰/۵
۲	مقدار C را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی $D(2c,c-1)$ روی نیم‌ساز ربع اول و سوم باشد.	۰/۵
۳	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که دو نقطه‌ی $A(3,a)$ و $B(a+1,b-a)$ نسبت به محور xها قرینه‌ی یکدیگر باشند.	۰/۵
۴	x در چه بازه‌ای باشد تا مساحت شکل (الف) از مساحت شکل (ب) بیش‌تر باشد؟ 	۱
۵	اگر $A=\{x\in\mathbb{R}:x>1\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}:x\le 4\}$ مطلوب است : الف) $A-B$ ب) $(A-B)\cap(B-A)$	۱
۶	کدام یک از رابطه‌های زیر ضابطه‌ی یک تابع است؟ الف) $y^2=x$ $\qquad$ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=1$	۱
۷	اگر $L=0/10+0/05W$ جدول زیر را کامل کنید. W: ۰ ، ۰/۲ ، ۰/۴ ، ۰/۶ ، ۰/۸ ، ۰/۹ L: ۰/۱۰ ، ... ، ... ، ... ، ۰/۱۴ ، ...	۱
۸	کدام نمودار مربوط به نمودار یک تابع است؟ توضیح دهید. 	۰/۷۵

۹	نمودار تابع f با ضابطه‌ی $y=[۲x]$ را در بازه‌ی $[-۲,۲]$ رسم کنید.	۱
۱۰	آیا تابع f با نمودار زیر پله‌ای است؟ چرا 	۱
۱۱	دامنه‌ی توابع زیر را بیابید. الف) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto\frac{۲x+۱}{x^۲-۴}$ ب) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$ ج) h:  د) $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $k(x)=\sin x-\cos x$	۲
۱۲	تابع f با جدول زیر مشخص شده است دامنه و برد این تابع را مشخص کنید. x: −۱ ، ۰ ، ۲ f(x): ۴ ، ۳ ، −۳	۱
۱۳	دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=۵-۳x$ و $g(x)=۲x+۶$ داده شده‌اند مطلوب است محاسبه عبارت‌های زیر: الف) $(f\times g)(\frac{۱}{۲})=$ ب) $(f+g)(x)=$	۱
۱۴	اگر $f(x)=۲x^۲-x+۳$ و $g(x)=x^۲+x-۱$ ضابطه و دامنه‌ی تابع‌های زیر را تعیین کنید. الف) $f-g$ ب) $f.g$	۱

۱۵	اگر $f(x)=\sqrt{۲x}$ و $g(x)=x^{۲}-۱$ باشد، ضابطه‌ی $(gof)(x)$ را تعیین نمایید.	۱
۱۶	فرض کنید $f(x)=۲x+۱$ ، x را به گونه‌ای بیابید که $f(۳x+۷)=۱۳$ الف) $-\frac{۱}{۳}$ ج) ۲ هـ) هیچ‌کدام ب) $\frac{۲}{۳}$ د) ۱۰	۱
۱۷	نمودار تابع f در زیر داده شده است، مطلوب است : الف) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=$ ..... ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=$ ..... ج) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=$ ..... د) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=$ .....  	۲
۱۸	فرض کنید $f(x)=\begin{cases} a-x^{۲} & x>۱ \\ x^{۲} & x<۱ \end{cases}$. اگر تابع f در $x=۱$ حد داشته باشد، مقدار a برابر را بیابید.	۱/۵
۱۹	تابع $f(x)=[x]$ در چه نقاطی پیوسته است؟ چرا؟	۰/۵
۲۰	تابع f با ضابطه‌ی روبرو داده شده است : $f(x)=\begin{cases} ۳x+۲ & x<-۱ \\ x^{۲}-c & x>-۱ \end{cases}$ تابع f را در $x=-۱$ چنان تعریف کنید که در این نقطه پیوسته باشد.	۱/۵
مجموع		۲۰

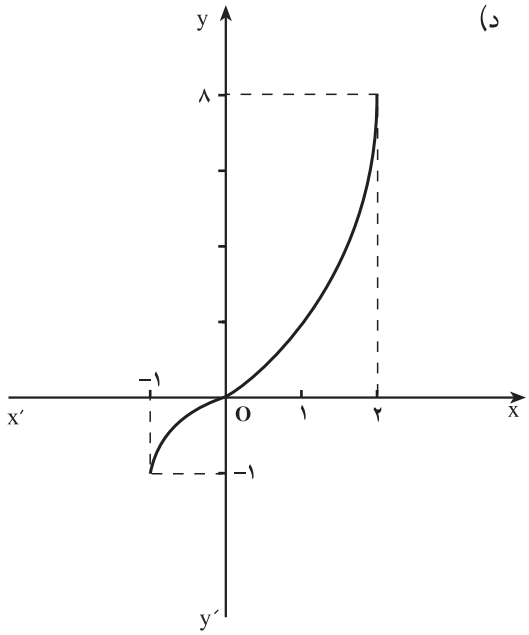
موفق باشید

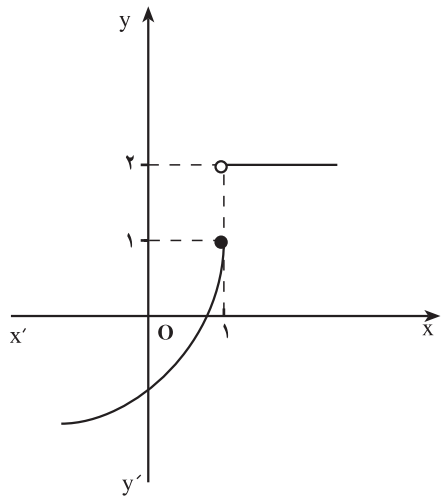
نمونه‌سؤالات پیش‌نهادی امتحانی از کل کتاب

سؤال امتحان نهایی درس: ریاضی ۳	رشته: کلیه‌ی رشته‌های فنی و کامپیوتر	ساعت:	مدت: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه سالی ــ واحدی (۲۰ نمره‌ای)		تاریخ امتحان:	
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد نیم‌سال دوم ۸۸ــ۸۷			

راهنمای آزمون

۱) این امتحان دارای ۱۶ سؤال است و هر سؤال ممکن است شامل چند قسمت باشد.
۲) پاسخ سؤالات دربرگه‌ی سفید جداگانه نوشته شوند.
۳) در سؤالات چندجوابی عنوان گزینه‌ی «الف»، «ب»، «ج» یا «د» را در پاسخ‌نامه بنویسید.
۴) در سؤالات کامل‌کردنی پاسخ مورد نظر را در پاسخ نامه بنویسید.

۱	اگر نقطه‌ی $(s, t+2)$ بر نقطه‌ی $(2,4)$ منطبق باشد، مقدار t و s را بیابید.	۰/۷۵
۲	اگر $A=[0,5]$ و $B=(2,3]$ دو بازه باشند، کدام یک از عبارت‌های زیر درست است؟ الف) $A\cap B=(2,3)$ ب) $A-B=[0,2]\cup(3,5]$ ج) $A\cup B=[0,2]$ د) $B-A=\varnothing$	۰/۷۵
۳	کدام یک از رابطه‌های ضابطه‌ی یک تابع است؟ چرا؟ الف) $y=-x^3$ ب) $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=1$	۱
۴	دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید. الف) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>1 \\ x^2 & 0\le x\le 1\end{cases}$ ب) $g(x)=\sin x+2$ ج) $h(x)=\dfrac{2x-1}{3x-9}$ د) 	۱/۵

۵	اگر $f(x)=\|x\|$ و $g(x)=\sqrt{x}$ دامنه و ضابطه‌ی تابع $f-g$ را تعیین کنید.	۱
۶	تابع‌های $f(x)=x^{۲}+۱$ و $g(x)=x^{۳}$ مفروض‌اند. عبارت‌های مناسب را از ستون (الف) به ستون (ب) وصل کنید. **الف** — **ب** a) $(gof)(x)$ — e) $(x^{۲}+۱)^{۲}+۱$ b) $(fog)(x)$ — f) $x^{۹}$ c) $(fof)(x)$ — g) $(x^{۲}+۱)^{۳}$ d) $(gog)(x)$ — h) $x^{۶}+۱$	۱/۵
۷	با توجه به نمودار، کدام مورد صحیح است؟ الف) $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=۲$ ب) f در R پیوسته است ج) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۱$ د) $f(۱)=۲$  	۱
۸	تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است : $f(x)=\begin{cases} ۳x+۲ & x<-۱ \\ x^{۲}-c & x>-۱ \end{cases}$ تابع f را در $x=-۱$ چنان تعریف کنید که در این نقطه حد داشته باشد.	۱
۹	حدهای زیر را به‌دست آورید. الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^{۲}-۴}{x+۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{۲x}{\sin ۲x \sin ۳x}$ ج) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{-۱}{(x-۲)^{۲}}$ د) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{۲x+۵}{-\frac{۱}{۲}x+۶}$	۲
۱۰	اگر $f(x)=۲-۳x$ باشد، جاهای خالی را با عبارت مناسب پرکنید. $f(x+\Delta x)=\cdots\cdots\cdots\cdots$ $f(x+\Delta x)-f(x)=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $\lim\limits_{\Delta x\to ۰} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to ۰} \dfrac{\cdots\cdots\cdots\cdots}{\Delta x}=\cdots\cdots\cdots$	۱/۵

۱۱	تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است : $f(x)=\begin{cases} ۲x-a & x<۲ \\ ۵ & x=۲ \\ x^۲+۵ & x>۲ \end{cases}$ عددهای a، b را چنان تعیین کنید که تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد.	۲
۱۲	معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=\tan x$ در نقطه‌ی $x=۰$ واقع بر آن را به‌دست آورید.	۲
۱۳	تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=ax^۳+(a-۱)x^۲+۴x$ داده شده است. مقدار a را چنان بیابید که در $x=-۲$ مقدار تابع ماکسیمم یا مینیمم باشد.	۱
۱۴	تغییرات تابع $y=x^۳-۱$ را معین کنید. سپس نمودار آن را رسم نمایید.	۱/۵
۱۵	مقدار تقریبی $\sqrt[۳]{۷}$ را بیابید.	۰/۷۵
۱۶	حاصل جمع دو عدد ۲۵ است. دو عدد را طوری پیدا کنید که حاصل‌ضرب آن ماکسیمم شود.	۰/۷۵
مجموع		۲۰

موفق باشید

نمونه‌سؤالات پیش‌نهادی امتحانی از کل کتاب

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضی (۳)	رشته: کلیه‌ی رشته‌های فنی و کامپیوتر	ساعت:	مدت: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه سالی ــ واحدی (۲۰ نمره‌ای)	تاریخ امتحان:		
دانش‌آموزان و داوطلبان آزادنیم‌سال دوم سال تحصیلی ۸۸ــ۸۷			

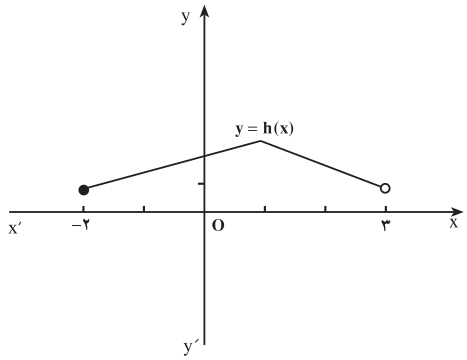
راهنمای آزمون

۱) این امتحان دارای ۱۶ سؤال است و هر سؤال ممکن است شامل چند قسمت باشد.

۲) پاسخ سؤالات در برگه‌ی سفید جداگانه نوشته شوند.

۳) در سؤالات چندجوابی عنوان گزینه‌ی درست «الف»، «ب»، «ج» یا «د» را در پاسخ‌نامه بنویسید.

۴) در سؤالات کامل‌کردنی پاسخ مورد نظر را در پاسخ‌نامه بنویسید.

ردیف	سؤال	بارم
۱	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که دو نقطه‌ی $A(3,a)$ و $B(a+1,b-a)$ نسبت به محور xها قرینه‌ی یکدیگر باشند.	۰/۷۵
۲	اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}\ ,\ x>1\}$ و $B=[-3,2]$ باشند، حاصل $(A\cup B)-(A\cap B)$ را تعیین کنید.	۰/۷۵
۳	کدام یک از رابطه‌های زیر ضابطه‌ی تابع‌اند؟ چرا؟ الف) $y^2=x$ ب) $\lvert y\rvert=x$	۱
۴	دامنه‌ی توابع زیر را پیدا کنید. الف) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ ب) $g(x)=2\cos x+1$ ج) $u(x)=\frac{1}{x}$ د)  	۱/۵
۵	اگر $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=1-x$، جاهای خالی را پر کنید. الف) $(f+g)(x)=x^2+\cdots+\cdots-x$ ب) $(f-g)(x)=\cdots+1-1+\cdots$ ج) $(f.g)(x)=(x^2+1)(\cdots)$ د) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{\cdots\cdots}{1-x}$	۱
۶	اگر $f(x)=x^2+5x$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$، مقدار $(fog)(2)$ را بیابید.	۱

۷	فرض کنید تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است : $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x>۰ \\ x-a & x<۰ \end{cases}$ مقدار a را طوری تعیین کنید که $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود داشته باشد. سپس مقدار این حد را بنویسید و نمودار تابع را رسم کنید.	۱/۵
۸	حدهای زیر را به‌دست آورید. الف) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۱-۸x^{۳}}{۱-۲x}$ ب) $\lim\limits_{x\to -۲} \frac{\tan(x+۲)}{۲x+۴}$ ج) $\lim\limits_{x\to ۴^{-}} \frac{-۱}{x-۴}$ د) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x^{۳}+۱}{x-۲x^{۳}}$	۲/۵
۹	تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱-x}{x^{۲}-۱}$ در کدام مجموعه پیوسته است : الف) $[-۱,۱]$ ب) $(-۱,۱)$ ج) $IR-\{-۱,۱\}$ د) $\{۱,-۱\}$	۱
۱۰	تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است : $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲a \ , & x>-۲ \\ ۴ & x=-۲ \\ ۳x-۲b & x<-۲ \end{cases}$ عددهای a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در $x=-۲$ پیوسته باشد.	۱
۱۱	اگر $f(x)=x^{۲}$ باشد، جاهای خالی را با عبارت مناسب پرکنید. $f(x)=x^{۲}$ ، $f(x+\Delta x)=.....$ $f(x+\Delta x)-f(x)=.....$ $\lim\limits_{\Delta x\to ۰} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to ۰} \frac{.....}{\Delta x}=.....$	۱/۵
۱۲	معادله‌ی خط مماس و خط قائم بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=۳x^{۲}-۱$ را در نقطه‌ی $x=-۱$ واقع بر منحنی بنویسید.	۲
۱۳	اگر $f(x)=x^{۲}-۲x+۳$ باشد، می‌نیمم مقدار $f(x)$ را به‌دست آورید.	۱
۱۴	تغییرات تابع زیر را معین کنید، سپس نمودار آن را رسم نمایید. $y=x^{۳}-۳x^{۲}+۲$	۱/۵
۱۵	مقدار تقریبی $\sin ۳۱^{\circ}$ را بیابید.	۰/۷۵
۱۶	عدد ۲۴ را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که حاصل‌ضرب آن‌ها ماکسیمم باشد.	۰/۷۵
مجموع		۲۰

موفق باشید

مراجع

۱. کرامتی، محمدرضا، *نگاهی نو و متفاوت به رویکرد یادگیری* **مشارکتی یادگیری** *از طریق همیاری*، ناشر آیین تربیت، مشهد، ۱۳۸۲

۲. جاریانی، ابوالقاسم، *سیستم آموزش مدولار پودمانی*، دفتر برنامه ریزی و تألیف آموزش‌های فنی وحرفه‌ای و کاردانش، ۱۳۷۹

۳. هدایت پناه، احمد، بررسی کتاب جدیدالتألیف ریاضی ۳ هنرستان از دیدگاه مدرسان ریاضی کشور، اتحادیه‌ی انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی ایران، ۱۳۸۵

۴. جمالی، علیرضا، رسم‌پذیری با خط‌کش و پرگار، رشد آموزشی ریاضی

۵. جمالی، علیرضا، نظریه مجموعه‌ها، چاپ دانشگاه پیام نور

۶. بابلیان، اسمعیل، *آنالیز عددی ۱*، چاپ دانشگاه پیام نور، ۱۳۸۳

۷. توتونیان، فائزه و صائمی، منصوره، آنالیز عددی، جلد دوم، ناشر دانشگاه امام رضا (ع) مشهد، ۱۳۸۱

۸. بابلیان، اسمعیل، اثبات احکام ریاضی به کمک کامپیوتر، رشد آموزش ریاضی

۹. رجبعلی‌پور، مهدی، مفهوم بینهایت در آنالیز، رشد آموزش ریاضی، شماره ۷، ۱۳۶۴

۱۰.سیف، علی‌اکبر، سنجش فرآیند و فرآورده‌ی یادگیری : روش‌های قدیم و جدید، نشر دوران، ۱۳۸۷

۱۱. شریفی، حسن‌پاشا، اصول روان‌سنجی و روان‌آزمایی، انتشارات رشد، ۱۳۸۷

۱۲. وایرزما، ویلیام، اندازه‌گیری و آزمودن در تعلیم و تربیت/ویلیام وایرزما، استفن جی‌جور ؛ ترجمه غلامرضا خوی‌نژاد، مشهد : آستان قدس رضوی، مؤسسه چاپ و انتشارات، ۱۳۷۲ ، ۱۳۷۵

13. Gokal, A. (1995), *Collaborative learning*, Collaborative Learning Education, Vol. 7, No.1.

14. Kohen, E. (1994), *Restructuring the classroom*, Review of Educational Research, 64 (1).

15. Johnson, D., Roger Johnson and Mary Beth stanne (2000), *Cooprative learning methods: A meta - analysis*, University of Minenesota.

16. Ryan, k. and Cooper, J. (1998), *Those who can teach*, Bostan, New York.

17. Kohen, A. (1991). *Cooprative learning*, Educational Leadership, 48.

18. Kohen, A. (1995), Punished by rewards? Educational Leadership, Vol. 53, No. 1.

19. Higgenson, R.

20. Edvards, Jr. C.H. (1979) *The historical development of the calculus*, springer- Verlag, New York.