ج) شامل دو مثلث، به‌طوری که یکی از آنها قائم‌الزاویه (و ساده) و دیگری غیرقائم‌الزاویه و تعیین مساحت آن اندکی وقت‌گیر است که توصیه می‌شود با کمی دقت از تقسیم‌بندی‌هایی استفاده کرد که :

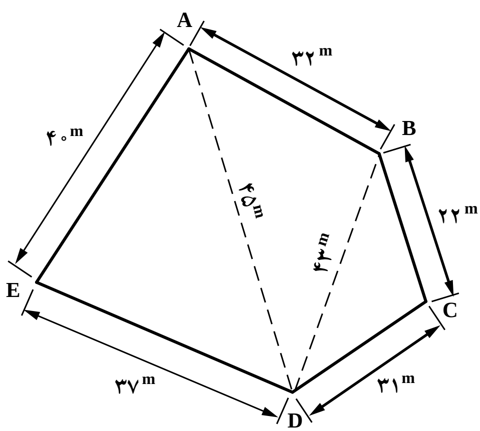
۱ــ کمترین تعداد تقسیمات را داشته باشند.

۲ــ اجزاء، ساده‌ترین رابطه را جهت تعیین مساحت داشته باشند.

۳ــ از ابعاد کلی (و داده شده) برای اجزاء بهره گرفته باشد (نیازی به محاسبه طول‌های جدید و وترها نباشد). به عنوان نمونه در تقسیم‌بندی چهارضلعی فوق‌الذکر، تقسیم‌بندی ب) و ج) هر دو مثلثی است اما تقسیم‌بندی ب) از ج) ساده‌تر و عملیات آن کمتر می‌باشد که به‌طور یقین دقت آن افزایش می‌یابد.

تحلیل مثال صفحهٔ ۵۶ و ۵۷ کتاب درسی :

مثال : یک زمین به شکل پنج‌ضلعی غیرمنتظم ABCDE (شکل ۲۳) داریم. طول اضلاع و طول دو قطر آن اندازه‌گیری شده است. مساحت این چندضلعی چندمتر مربع است؟



شکل ۲۳

حل : مساحت این پنج‌ضلعی برابر است با :

$$S_{ABCDE} \quad S_{ADE} \quad S_{ADB} \quad S_{BDC}$$

$$S_{ADE}=\sqrt{p(p-۴۰)(p-۳۷)(p-۴۵)} \quad , \quad p=\frac{۳۷+۴۰+۴۵}{۲}=۶۱$$

$$S_{ADE}=\sqrt{۶۱(۶۱-۴۰)(۶۱-۳۷)(۶۱-۴۵)}=\sqrt{۴۹۱۹۰۴}$$

$\boxed{S_{ADE} = ۷۰۱/۳۶m^۲}$

$$S_{ADB} = \sqrt{p(p-۴۵)(p-۴۳)(p-۳۲)} \quad , \quad p = \frac{۴۵+۴۳+۳۲}{۲} = ۶۰$$

$$S_{ADB} = \sqrt{۶۰(۶۰-۴۵)(۶۰-۴۳)(۶۰-۳۲)} = \sqrt{۴۲۸۴۰۰}$$

$\boxed{S_{ADB} = ۶۵۴/۵۲m^۲}$

$$S_{BDC} = \sqrt{p(p-۴۳)(p-۳۱)(p-۲۲)} \quad , \quad p = \frac{۴۳+۳۱+۲۲}{} = ۴۸$$

$$S_{BDC} = \sqrt{۴۸(۴۸-۴۳)(۴۸-۳۱)(۴۸-۲۲)} = \sqrt{۱۰۶۰۸۰}$$

$\boxed{S_{BDC} = ۳۲۵/۷۰m^۲}$

مساحت پنج‌ضلعی

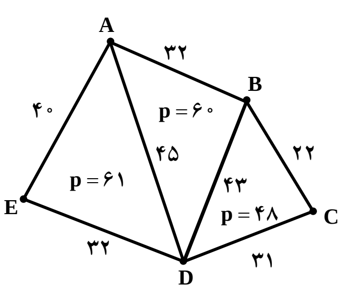
$S_{ABCDE} \quad ۷۰۱/۳۶m^۲ \quad ۶۵۴/۵۲m^۲ \quad ۳۲۵/۷۰m^۲ \quad ۱۶۸۱/۵۸m^۲$

تحلیل مثال : در این مثال طول قطرهای AD و BD داده شده‌اند و لذا کافی است کنترل نماییم که آیا مثلث یا مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند یا خیر؟

در مثلث ADE برای قائمه بودن زاویه E باید رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$AE^۲ \quad ED^۲ \quad AD^۲$

$$۴۰^۲ + ۳۷^۲ = AD^۲ \Rightarrow AD = \sqrt{۴۰^۲ + ۳۷^۲} = ۵۴/۴۹ \pm ۴۵$$

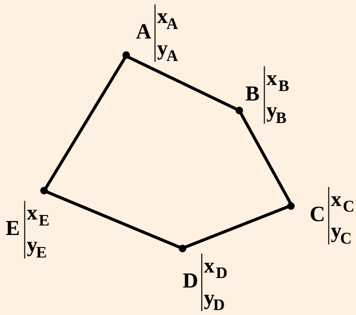


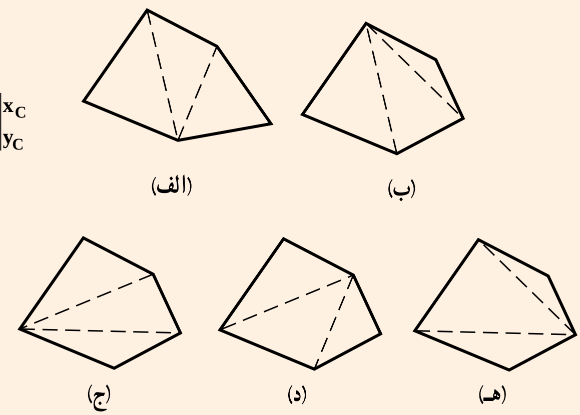
پس این مثلث قائم‌الزاویه نیست. به‌طریق مشابه برای سایر مثلث‌ها می‌توان ثابت کرد که آنها هم قائم‌الزاویه نیستند، لذا راه حل ساده استفاده از رابطهٔ مثلث غیرمشخص (نصف محیط) است که در حل مثال از این رابطه استفاده شده است و برای سهولت و پرهیز از اشتباه می‌توان نصف محیط مثلث‌ها (P) را درون مثلث مربوطه نوشت و سپس از رابطهٔ رادیکالی برای تعیین مساحت استفاده کرد.

$S_{ADE} = \sqrt{۶۱(۶۱-۴۰)(۶۱-۳۷)(۶۱-۴۵)} = ۷۰۱/۳۶m^۲$ به عنوان نمونه

اطلاعات بیشتر

در صورتی که مختصات نقاط داده شده باشند به دلیل اینکه به راحتی می‌توان فاصله بین دو نقطه (طول وترهای مختلف) را محاسبه نمود می‌توان برای شکل زیر تقسیم‌بندی‌های مختلفی را نمایش داده که بهترین تقسیم‌بندی، تقسیم‌بندی با شبکه مثلثی است به‌گونه‌ای که طول اضلاع مثلث‌ها خیلی اختلاف با هم نداشته باشند، زیرا برای ترسیم آن (حتی برداشت) دقت افزایش می‌یابد.





در تقسیم‌بندی‌های (الف) و (د) به دلیل اینکه اختلاف بین اضلاع مثلث‌های حاصل‌شده زیاد نیست، مناسب‌ترین تقسیم‌بندی، صورت گرفته است. باید دقت داشت که برای تعیین طول بین دو نقطه با مختصات صفحه‌ای از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود :

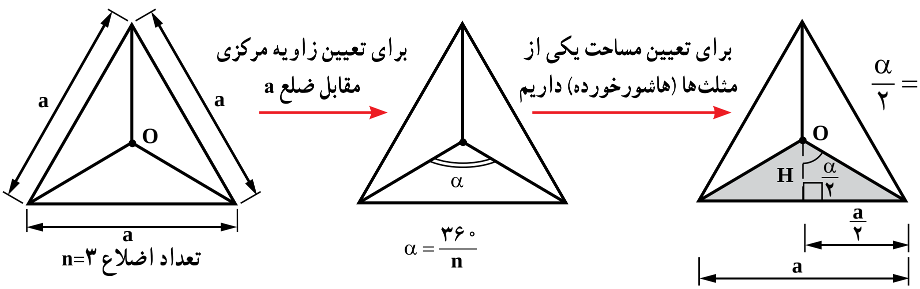
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

و در فضای سه‌بعدی

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

۴ــ۳ــ۲ــ مساحت چندضلعی منتظم : برای کلیه چندضلعی های منتظم که یک نقطه مرکزی دارند، نظیر مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع، پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی و ... می‌توان به‌صورت زیر رابطه‌ای برحسب طول ضلع خارجی آنها اثبات نمود و برای کلیه چندضلعی‌های منتظم از آن بهره گرفت.

مثال : رابطه‌ای برای تعیین مساحت سه ضلعی منتظم مطابق شکل مقابل را اثبات کنید.



$$\frac{\alpha}{۲}=\frac{\frac{۳۶۰}{n}}{۲}=\frac{۱۸۰}{n}$$

مساحت مثلث هاشور خورده $S_۱=\frac{H\times a}{۲}$: برای تعیین عمود H داریم $tg\frac{\alpha}{۲}=\frac{\frac{a}{۲}}{H}\Rightarrow H=\frac{\frac{a}{۲}}{tg\frac{\alpha}{۲}}=\frac{\frac{a}{۲}}{tg\frac{۱۸۰}{n}}$

$$\boxed{H=\frac{a^۲}{۲tg\frac{۱۸۰}{n}}}\Rightarrow \text{مثلث هاشور خورده } S_۱=\frac{H\times a}{۲}=\frac{\frac{a}{۲tg\frac{۱۸۰}{n}}\times a}{۲}=\frac{a^۲}{۴tg\frac{۱۸۰}{n}}$$

به دلیل اینکه در یک n ضلعی، n مثلث (متساوی‌الاضلاع یا متساوی‌الساقین) وجود دارد، مساحت کلی n ضلعی برابر است با :

$$\text{مساحت یک n ضلعی منتظم } S_n \quad n\,((S_۱)\text{ مساحت یک مثلث})=\frac{n.a^۲}{۴tg\frac{۱۸۰}{n}}$$

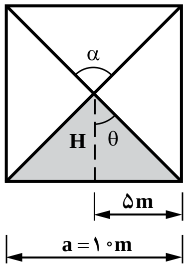
تحلیل و بررسی مثال‌های صفحهٔ ۵۸ کتاب درسی

مثال : مساحت مربعی به طول ۱۰ متر برابر است با :

$$S=\frac{۴}{۴}\times\frac{۱۰^۲}{tg\frac{۱۸۰}{۴}}=۱\times\frac{۱۰۰}{tg۴۵^\circ}=\frac{۱۰۰}{۱}=۱۰۰m^۲ \qquad \boxed{n=۴}$$

تحلیل و بررسی : در این مثال یک چهارضلعی منتظم (مربع) مدنظر است که واضح است، مساحت آن از طریق رابطهٔ $S \quad a^۲ \quad ۱۰^۲ \quad ۱۰۰m^۲$ به‌دست می‌آید امّا از طریق رابطهٔ

اثبات شده برای چندضلعی‌ها (با ۴ n) داریم :



$$S = n\frac{a^۲}{۴tg\frac{۱۸۰}{n}} = ۴ \times \frac{۱۰^۲}{۴tg\frac{۱۸۰}{۴}} = ۱۰^۲ = ۱۰۰m^۲$$

$$\theta = \frac{۳۶۰}{n} \qquad \alpha = \frac{\theta}{۲} = \frac{\frac{۳۶۰}{n}}{۲} = \frac{۱۸۰}{n}$$

$$\alpha = \frac{۱۸۰}{۴} = ۴۵^\circ \qquad tg\alpha = tg۴۵^\circ = \frac{۵}{H}$$

از آنجایی که ۱ $tg۴۵$ می‌توان نتیجه گرفت که $H \quad ۵m$

S کلی ۴ (مساحت مثلث هاشورخورده) $= ۴ \times \frac{۱۰ \times ۵}{۲} = ۱۰۰m^۲$

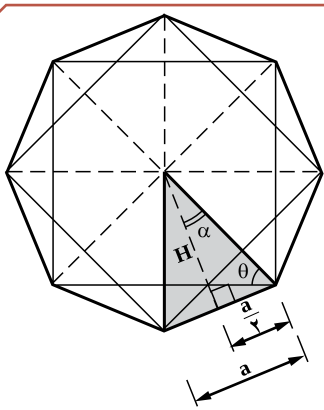
مثال : طول ضلع یک ۸ضلعی منتظم ۴۵m است، مساحت آن چند متر مربع است؟

حل : داریم :

$$S = \frac{na^۲}{۴tg\frac{۱۸۰}{n}}, n = ۸, a = ۴۵m$$

$$S = \frac{۸ \times ۴۵^۲}{۴ \times tg\frac{۱۸۰}{۸}} = \frac{۲ \times ۴۵^۲}{tg۲۲/۵^\circ} = \frac{۴۰۵۰}{۰/۴۱۴۲} = ۹۷۷۷/۸۸۵m^۲$$

تحلیل و بررسی :



$$\alpha = \frac{۱۸۰}{n} \quad \text{یا} \quad \frac{\frac{۳۶۰}{n}}{۲}$$

به‌طریق مشابه در مثال قبلی می‌توان مساحت قسمت هاشور خورده را با تعیین زاویه $\alpha = (\frac{۱۸۰}{n})$ و عمود $H(= \frac{a}{۲tg\alpha})$ از رابطهٔ $S_۱ = \frac{a.H}{۲} = \frac{a^۲}{۴tg\frac{۱۸۰}{n}}$ مثلث هاشورخورده و سپس

به‌دلیل اینکه ۸ n، است، تعداد هشت مثلث وجود دارد (همواره تعداد مثلث‌ها برابر n هستند)، که مساحت کلی هشت ضلعی برابر است با :

$$S_{۸} = n\frac{a^{۲}}{۴tg\frac{۱۸۰}{n}} = ۸\times\frac{۴۵^{۲}}{۴tg\frac{۱۸۰}{۸}}$$

$$S_{۸} = \frac{۸\times۴۵^{۲}}{۴tg۲۲/۵^{\circ}} = ۹۷۷۷/۵۶m^{۲}$$

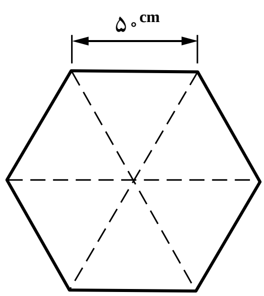
$$H = \frac{۴۵}{۲}tg۶۷/۵ = ۵۴/۳۲$$

$$S_{۱} = \frac{a\times H}{۲} = \frac{۴۵\times۵۴/۳۲}{۲} = ۱۲۲۲/۲m^{۲}$$

$$S_{۸} = ۸S_{۱} = ۸\times۱۲۲۲/۲ = ۹۷۷۷/۶m^{۲}$$

نکته : در هشت‌ضلعی فوق با کمی دقت می‌توان دریافت که مثلث‌های ایجاد شده از نوع متساوی‌الساقین می‌باشند و برای محاسبه هرکدام رابطه $\frac{a.H}{۲}$ برقرار است که می‌توان با ضرب آن در تعداد مثلث‌ها (n ۸) مساحت کلی را یافت. همچنین براساس مطلب ذکر شده در بند **۲ـ۳** صفحه **۲۷** کتاب درسی اقدام به تعیین زاویه θ نمود که با داشتن آن می‌توان H را برحسب α تعیین و اقدام به محاسبه مثلث نمود. در شکل هاشور خورده :

$$\alpha = \frac{۱۸۰}{n} = \frac{۱۸۰}{۸} = ۲۲/۵ \Rightarrow \theta = ۱۸۰-(۹۰+۲۲/۵) = ۶۷/۵ \qquad tg\theta = \frac{H}{\frac{a}{۲}} \qquad H = \frac{a}{۲}tg\theta$$



شکل ۲۷

۴ـ مقطع یک ستون بتن آرمه مطابق شکل ۲۷ به صورت یک شش‌ضلعی منتظم به طول هر ضلع ۵۰ سانتی‌متر است. سطح مقطع ستون را برحسب سانتی‌متر مربع و مترمربع به دست آورید.

حل :

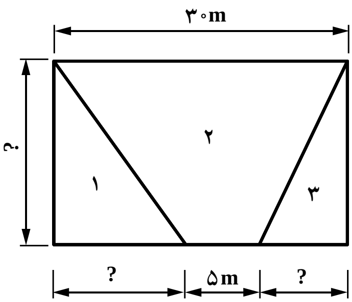
$$S_n = n\frac{a^۲}{۴tg\frac{۱۸۰}{n}}$$

$n \quad ۶ \;, \; a \quad ۵۰cm$

$$S_۶ = ۶\times\frac{۵۰^۲}{۴tg\frac{۱۸۰}{۶}} = ۶\times\frac{۲۵۰۰}{۴\times tg۳۰^\circ}$$

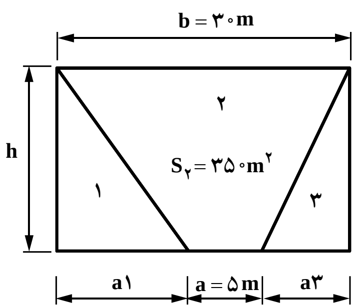
$S_۶ \quad ۶۴۹۵/۱۹cm^۲$ مساحت برحسب سانتی‌متر مربع

۵ــ زمینی مطابق شکل ۲۸ باید بین ۳ نفر تقسیم شود. اگر مساحت شکل (۲) برابر ۳۵۰ متر مربع و مساحت شکل (۱)، ۱/۵ برابر مساحت شکل (۳) باشد، اندازه‌های مجهول روی شکل را برحسب متر به‌دست آورید.



شکل ۲۸

حل : شکل مقابل، یک ذوزنقه به قاعده‌های ۵ و ۳۰ متر است که ارتفاع آن (h) را می‌توان برحسب مساحت داده شده تعیین نمود.



$$\text{ذوزنقه } S_۲ = \frac{a+b}{۲}.h \Rightarrow S_۲ = \frac{۵+۳۰}{۲}\times h = ۳۵۰ \qquad ۱۷/۵h = ۳۵۰ \qquad h = ۲۰m$$

برای دو مثلث ۱ و ۳ می‌توان براساس شرایط زیر اقدام به محاسبه ابعادشان ($a_۱$ و $a_۳$) نمود.

۱ــ مساحت مثلث ۱، ۱/۵ برابر مثلث ۳ است.

$A_{۱} \quad ۱/۵A_{۳}$

۲ــ مجموع مساحت مثلث‌های ۱ و ۳ برابر است با :

$A_{۱} \quad A_{۲} \quad ۳۰ \times ۲۰ \quad ۳۵۰ \quad ۲۵۰m^{۲}$

۳ــ چون ارتفاع دو مثلث (h) یکسان است پس می‌بایست نسبت قاعدهٔ مثلث ۱، ۱/۵ برابر قاعدهٔ مثلث ۳ باشد.

$a_{۱} \quad ۱/۵a_{۳}$

۴ــ در صورتی که مساحت مثلث کوچک‌تر A فرض شود، مساحت مثلث بزرگ‌تر که ۱/۵ برابر آن است برابر ۱/۵ A خواهد بود و مساحت هر دو مثلث برابر ۲/۵ A می‌باشد. از طرفی در بند ۲ ملاحظه شد که مساحت این دو مثلث برابر ۲۵۰ متر مربع می‌باشد پس مساحت مثلث کوچک‌تر برابر می‌شود با :

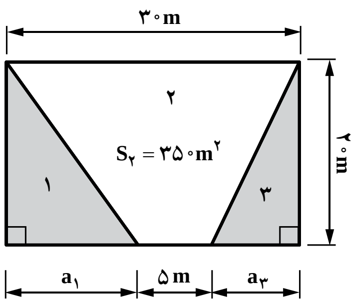
$۲/۵A = ۲۵۰ \qquad A = \frac{۲۵۰}{۲/۵} = ۱۰۰m^{۲}$

و به تبع آن مساحت مثلث بزرگ‌تر برابر $۱۵۰m^{۲} \quad ۱/۵A$ خواهد بود که براساس آن می‌توان ابعاد را تعیین نمود.

۵ــ جمع دو قاعدهٔ $(a_{۱} + a_{۳})$ برابر است با ۲۵متر.

$a_{۱} \quad a_{۳} \quad ۳۰ \quad ۵ \quad ۲۵m$

تعیین ابعاد مجهول مثلث‌ها $(a_{۳}, a_{۱})$:



$A_{۱} \quad ۱/۵A_{۳}$

$$\frac{۲۰ \times a_{۱}}{۲} = ۱/۵\frac{۲۰ \times a_{۳}}{۲}$$

$$\boxed{a_{۱} = ۱/۵a_{۳}} \qquad (۱)$$

براساس بند ۵ داریم :

$$\boxed{a_{۱} + a_{۳} = ۲۵m} \qquad (۲)$$

با جایگزینی رابطهٔ (۱) در (۲) داریم :

$$۱/۵a_{۳} \quad a_{۳} \quad ۲۵m \qquad ۲/۵a_{۳} \quad ۲۵$$

$$\boxed{a_{۳} = \frac{۲۵}{۲/۵} = ۱۰m} \Rightarrow$$

با جایگذاری در رابطهٔ (۲) داریم :

$$a_{۱} \quad a_{۳} \quad ۲۵ \Rightarrow a_{۱} \quad ۱۰ \quad ۲۵m \Rightarrow a_{۱} \quad ۱۵m$$

کنترل صحت ابعاد محاسبه شده :

$S_۱ = \frac{۲۰\times۱۵}{۲} = ۱۵۰m^۲$ برای مثلث ۱

$S_۳ = \frac{۲۰\times۱۰}{۲} = ۱۰۰m^۲$ برای مثلث ۳

$\frac{S_۱}{S_۳} = \frac{۱۵۰}{۱۰۰} = ۱/۵ \Rightarrow S_۲ = ۱/۵S_۳$

از طرفی کل مساحت اجزاء برابر $۶۰۰m^۲$ است پس :

$S_۱ \quad S_۲ \quad S_۳ \quad ۶۰۰m^۲ \Rightarrow ۱۵۰ \quad ۳۵۰ \quad ۱۰۰ \quad ۶۰۰m^۲$

۶ــ طول دیوار حایل نشان داده شده در شکل ۲۹، ۲۵ متر است.

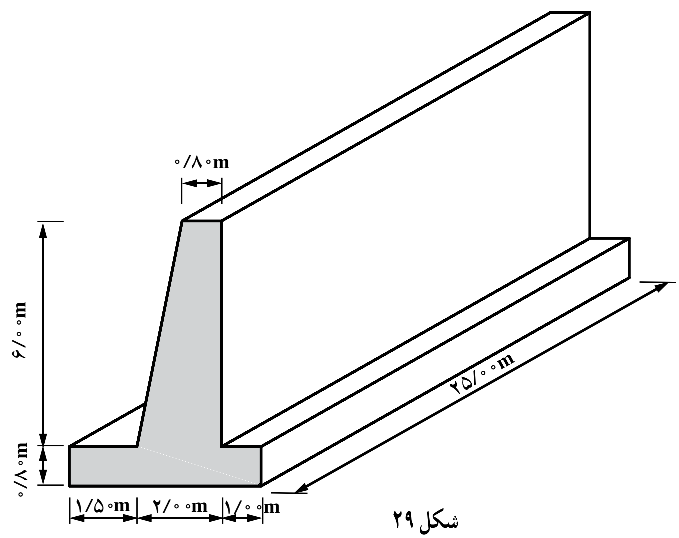
الف) سطح مقطع دیوار را محاسبه کنید. $m^۲$

ب) چنانچه دیوار از بتن ساخته شود، برای قالب‌بندی آن چندمتر مربع تخته لازم است؟ (مقدار افت برابر ۲۰٪ منظور شود.)

راهنمایی : نسبت مقدار مصالح تلف شده به مقدار مصالح مصرف شده را اُفت گویند.

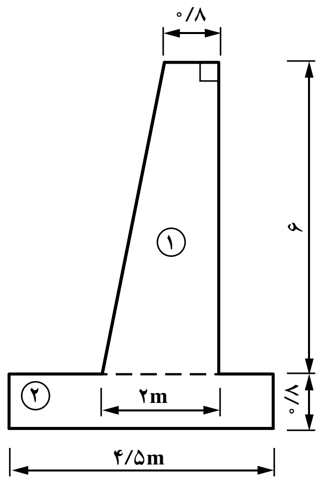
$\text{اُفت} \quad \frac{\text{مقدار مصالح تلف شده}}{\text{مقدار مصالح مصرف شده}}$

پ) نظر به اینکه تاکنون حجم‌شناسی را نگذرانده‌اید؛ آیا می‌توانید حجم دیوار را محاسبه کنید؟



شکل ۲۹

حل : برای حل از تقسیم سطح به اجزاء منظم استفاده می‌شود.



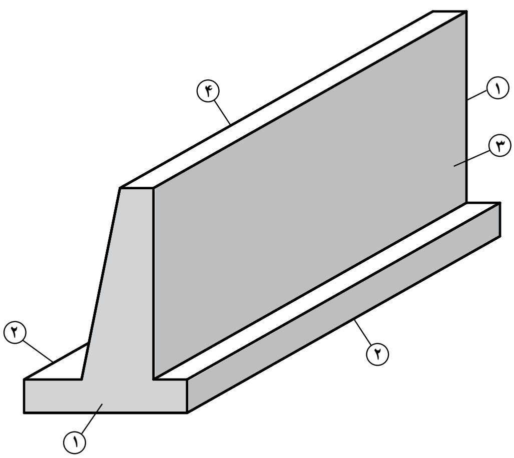
الف) سطح مقطع دیوار :

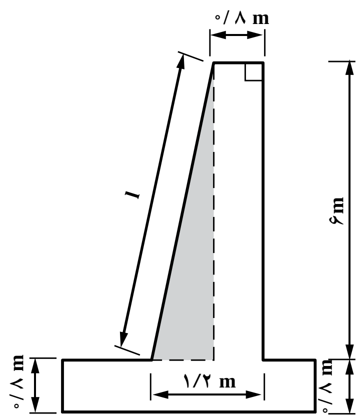
ذوزنقه $S_۱ = \frac{۲+۰/۸}{۲} \times ۶ = ۸/۴m^۲$

مستطیل $S_۲ = ۴/۵ \times ۰/۸ = ۳/۶m^۲$

سطح مقطع دیوار $S = S_۱ + S_۲ = ۸/۴ + ۳/۶ = ۱۲m^۲$

ب) مساحت قالب‌بندی با احتساب ۲۰ درصد افت : به دلیل اینکه، اینگونه دیوارها در دو مرحله ساخته می‌شوند (مرحلهٔ اول پاشنه یا پی و مرحلهٔ دوم دیوار) نیازی به قالب‌بندی سطوح افقی ندارند. و اگر انتهای دیوار (دوکله) آزاد باشد، نیاز به قالب‌بندی است. عموماً به منظور جلوگیری از جذب آب بتن توسط خاک، بهتر است دو کله هم قالب‌بندی شوند.





سطوحی که نیاز به قالب‌بندی دارند با شماره و هاشور نمایش داده شده‌اند که در ادامه مساحت آنها محاسبه می‌شود.

طول ضلع مورب دیوار $l = \sqrt{۱/۲^۲ + ۶^۲} = ۶/۱۲m$

سطح (سطوح) شماره ۱ : مساحت این مقطع در بند الف تعیین شد و چون دو کله با مساحت یکسان داریم پس :

$S_{۱}$ دو کله $۲S'_{۱}$ ۲×۱۲ $۲۴m^{۲}$

سطح (سطوح) شماره ۲ : یک سطح مستطیلی است که در دو انتهای پی (با فرض آزاد بودن دیوار از هر دوطرف) امتداد یافته است.

$S_{۲}$ دوطرف $۲S'_{۲}$ $۲\,(۰/۸ \times ۲۵)$ $۴۰m^{۲}$

سطح (سطوح) شماره ۳ : این سطح کاملاً بر پی عمود است و طول آن ۶متر می‌باشد که تنها یک نمونه از آن موجود است و نمونه مشابه ندارد.

$S_{۳}$ ۶×۲۵ $۱۵۰m^{۲}$

سطح (سطوح) شماره ۴ : ارتفاع این سطح به علت شیبدار بودن با سطح مقابل آن (سطح شماره ۳) متفاوت است و براساس قضیهٔ فیثاغورث تعیین می‌شود.

$S_{۴}$ $۲۵ \times ۶/۱۲$ $۱۵۳m^{۲}$

مساحت کلی قالب‌بندی

S_{oa} کلی $S_{۱}$ $S_{۲}$ $S_{۳}$ $S_{۴}$ ۲۴   ۴۰   ۱۵۰   ۱۵۳ $۳۶۷m^{۲}$

میزان افت تخته $۳۶۷ \times ۲۰\%$ $۳۶۷ \times ۰/۲$ $۷۳/۴m^{۲}$

تخته مورد نیاز با احتساب افت   ۳۶۷   ۷۳/۴ $۴۴۰/۴m^{۲}$

برای محاسبه تخته (قالب) با احتساب درصد افت کافی از رابطهٔ زیر که قبلاً اثبات شد، استفاده می‌نماییم.

مقدار تخته مورد نیاز با احتساب افت S لازم $S(۱\ \ n)$ $(۱\ \ \ ۰/۲) \times ۳۶۷$ $۴۴۰/۴m^{۲}$

پ) برای تعیین حجم می‌توان از رابطهٔ کلی زیر استفاده کرد.

V ارتفاع × مساحت قاعده

V ۱۲×۲۵ $۳۰۰m^{۲}$

آیا می‌دانید که ...

روش محاسبه عدد π توسط غیاث‌الدین جمشید کاشانی

محاسبات به کمک دو کثیرالاضلاع منتظم محاطی و محیطی که عده اضلاع هریک از آنها ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ $۳ \times (۲)^{۲۸}$ ضلعی است و از تقسیم محیط این کثیرالاضلاع بر قطر دایره آن، عدد پی را محاسبه کرده است و کاشانی مقدار تقریبی ۲π را در دستگاه شصت‌گانی مساوی ۱, ۲۸, ۵۹, ۱۶, ۶   ۲π ۵, ۱۴, ۴۶, ۵۱, ۳۴ در نظر گرفته و سپس آن را به کسرهای اعشاری که اختراع نوینی بوده تبدیل کرد.

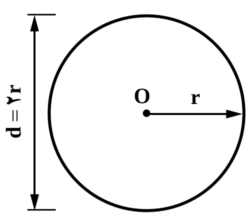
۲π   ۶/۲۸۳۱۸۵۳۰۷۱۷۹۵۸۶۵

π   ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳

در این جلسه دانش‌آموزان با نحوهٔ محاسبهٔ مساحت دایره، حلقه، قطعهٔ دایره و قطاع آشنایی پیدا می‌کنند. همچنین با کاربرد محاسبهٔ مساحت دایره‌های محاطی و محیطی، چندضلعی‌ها و مثلث که در مهندسی عمران، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند آشنا می‌شوند.

در این جلسه روابط مربوط به محاسبهٔ سطح جانبی برخی احجام منتظم اثبات می‌شوند، که ضرورت دارد نتیجه روابط توسط دانش‌آموزان حفظ شوند.

۴ــ۵ــ محاسبهٔ مساحت دایره و بیضی

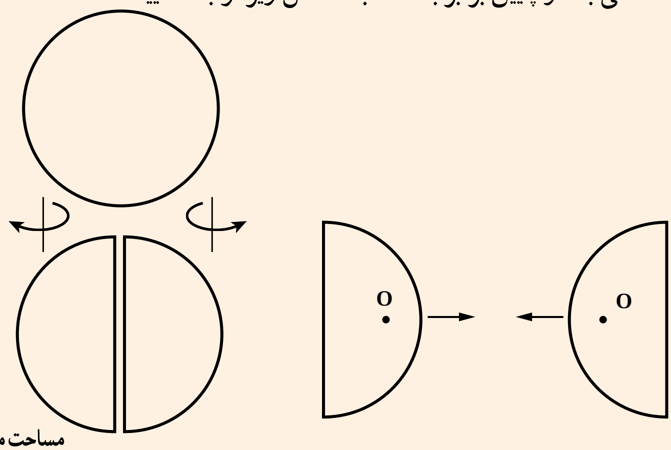


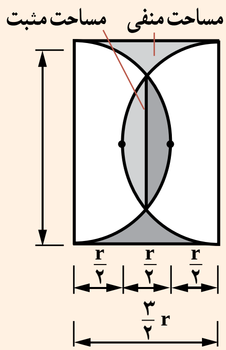
۴ــ۵ــ۱ــ مساحت دایره به شعاع r برابر است با : $S \quad \pi r^{۲}$

محاسبهٔ مساحت برحسب قطر $\Rightarrow r = \frac{d}{۲} \Rightarrow S = \pi r^{۲} = \pi(\frac{d}{۲})^{۲} = \frac{\pi . d^{۲}}{۴}$

$$\boxed{S = \frac{\pi . d^{۲}}{۴}}$$

محاسبه مساحت تقریبی دایره (به روش هندسی) : اگر دایره‌ای به شعاع r را به گونه‌ای تجزیه کنیم که بتوانند در مستطیلی قرار گیرند، مساحت حاصل از مستطیل با مساحت دایره برابر است. برای این کار دایره را به دو نیمه (از محور قائم) تقسیم می‌کنیم و سپس با انعکاس آینه‌ای دو سطح را به اندازه‌ای داخل هم حرکت می‌دهیم که مساحت‌های تلاقی با مساحت خالی بالا و پایین برابر باشند. به اشکال زیر توجه نمایید.



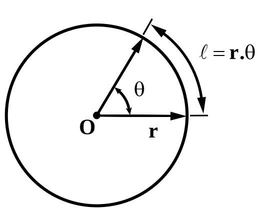


$$S \cong \frac{۳}{۲} r \times ۲r \cong ۳r^{۲}$$

در اینجا عدد ۳ بیانگر همان عدد π است.

۴ــ۵ــ۲ــ مساحت قطاع دایره به شعاع r و زاویهٔ مرکزی θ (برحسب رادیان) برابر است با :

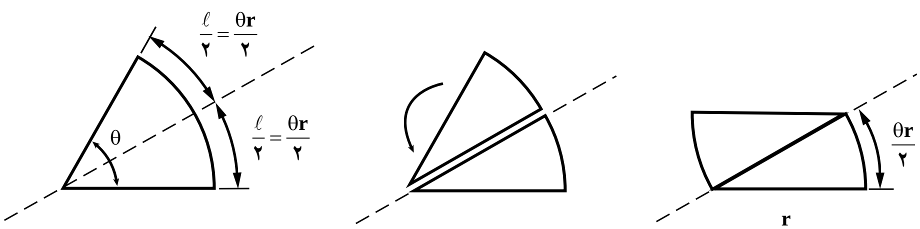
با علم به اینکه محیط دایرهٔ کامل (با زاویه مرکزی ۲π)، برابر ۲πr می‌باشد، برای طول کمان دایره به شعاع r و زاویه مرکزی θ داریم :



طول کمان	زاویه مرکزی	
$۲\pi r$	۲π	اگر $\Rightarrow$
$l \Rightarrow l = \frac{\theta \times ۲\pi r}{۲\pi} = \theta . r$	θ	اگر $\Rightarrow$

اگر قطاع نشان داده شده را با محور تقارن ۱ــ۱ به دو نیمه تقسیم کنیم و یکی از نیمه‌ها را معکوس و سپس مطابق شکل کنار هم قرار دهیم با کمی تقریب می‌توان شکل حاصل شده را یک مستطیل پنداشت، و مساحت آن برابر می‌شود با :

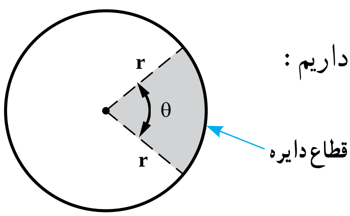
$$S = r \times \frac{\theta r}{۲} = \frac{۱}{۲}\theta . r^{۲}$$



نتیجه : مساحت قطاع دایره به شعاع r و زاویهٔ مرکزی θ (برحسب رادیان) عبارت است از :

$$\boxed{S = \frac{\theta}{۲} r^{۲}}$$

یادآوری : قسمتی از دایره را که بین دو شعاع و یک قوس محصور باشد، قطاع دایره می‌گویند.



نکته : اگر زاویهٔ مرکزی قطاع (θ) برحسب درجه باشد، داریم :

$$S = \frac{\theta}{۳۶۰} \times \pi r^{۲}$$

یادآوری از مثلثات:

از مثلثات داریم که :

$$\boxed{\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b}$$

$$\boxed{\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b}$$

$$\boxed{tg(a \pm b) = \frac{tga \pm tgb}{۱ \mp tgatgb}}$$

مثال : اگر x   b   a باشد داریم :

sin (x   x)   sinx cosx   cosx sinx

$$\boxed{\sin ۲x = ۲\sin x \cos x}$$

تعمیم‌پذیری رابطهٔ فوق :

$\sin ۶x \quad ۲\sin ۳x \cos ۳x$

$$\sin ۹x = ۲\sin\frac{۹x}{۲}\cos\frac{۹x}{۲}$$

مثال : اگر x   b   a باشد آنگاه :

$\cos(x \quad x) \quad \cos x \cos x \quad \sin x \sin x$

$$\boxed{\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x}$$

سایر روابط مهم و مورد نیاز :

$$\boxed{\sin^۲ x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲}}$$

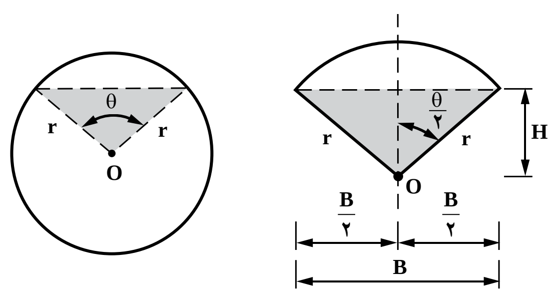
$$\boxed{\cos^۲ x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲}}$$

۴ــ۵ــ۳ــ مساحت قطعه یک دایره به شعاع r و زاویه مرکزی θ (برحسب رادیان)

قطعه S   قطاع S   مثلث هاشور خورده S

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{۱}{۲}\theta . r^۲$$

برای محاسبهٔ مساحت مثلث هاشور خورده داریم :



$$H = r\cos\frac{\theta}{۲}$$

$$\frac{B}{۲} = r\sin\frac{\theta}{۲} \Rightarrow B = ۲r\sin\frac{\theta}{۲} \Rightarrow S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲}B.H = \frac{۱}{۲}\left[۲r\sin\frac{\theta}{۲}.r\cos\frac{\theta}{۲}\right]$$

$$\boxed{S_{\text{مثلث}} = r^۲\sin\frac{\theta}{۲}.\cos\frac{\theta}{۲}} \qquad (۱)$$

از مثلثات داریم :

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

یا $\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

اگر $x = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sin 2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2}\sin\theta$ (۲)

با جایگزینی رابطه (۲) در (۱) داریم :

$S_{\text{مثلث}} = r^2(\frac{1}{2}\sin\theta) = \frac{1}{2}r^2\sin\theta$

$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta$

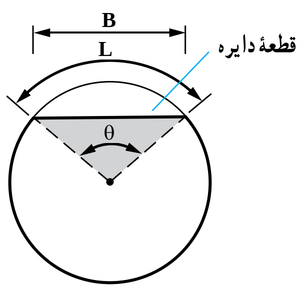
$$\boxed{S_{\text{قطعه}} = \frac{\theta - \sin\theta}{2} \times r^2}$$

نتیجه‌گیری : مساحت قطعهٔ دایره به شعاع r و زاویهٔ مرکزی θ (برحسب رادیان) برابر است با :

$$\boxed{S = \frac{\theta - \sin\theta}{2} \times r^2}$$

یادآوری : قسمتی از دایره را که بین یک قوس و وتر مقابل آن محصور باشد، «قطعهٔ دایره» می‌نامند.

نکته : طول قوس مقابل به زاویهٔ θ (برحسب رادیان) برابر است با :



$$\boxed{L = \theta r}$$

$$\boxed{B = 2r\sin\frac{\theta}{2}}$$

L طول کمان روبه‌روی زاویه مرکزی θ

B طول وتر روبه‌روی زاویه مرکزی θ

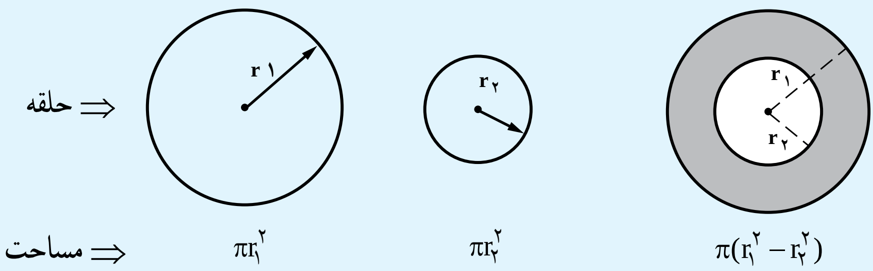
۴ـ۵ـ۴ مساحت حلقهٔ بین دو دایره به شعاع‌های r_1 و r_2 برابر است با :

$S_{\text{مساحت حلقه}} = \text{مساحت دایره خارجی} - \text{مساحت دایره داخلی} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2$

$$\boxed{S = \pi(r_1^2 - r_2^2)}$$

یادآوری:

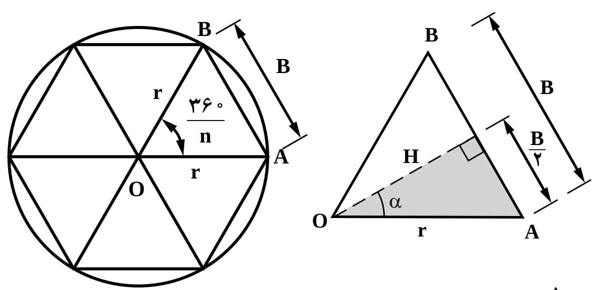
حلقهٔ دایره عبارت است از سطح محصور بین دو دایرهٔ هم‌مرکز با شعاع‌های مختلف که از نظر هندسی برابر است با :



۴ــ۵ــ۵ــ مساحت n ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع r برابر است با :

$$S = \frac{n}{۲} r^۲ \sin\frac{۳۶۰}{n}$$

اثبات : در این قسمت هدف تعیین مساحت چندضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع r است و می‌بایست رابطهٔ استخراج شده برحسب r باشد (در بند ۲ــ۴ صفحه ۵۷ کتاب درسی رابطه برحسب اندازهٔ ضلع a، استخراج گردید که ضروری است دانش آموزان به آن توجه داشته باشند)



$$\alpha = \frac{۳۶۰}{۲n} = \frac{۱۸۰}{n}$$

$$\frac{B}{۲} = r\sin\alpha \Rightarrow B = ۲r\sin\alpha$$

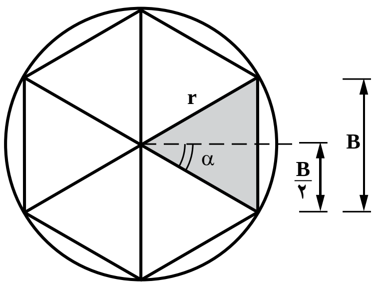
$$H = r\cos\alpha$$

مساحت مثلث $S_{AOB} = \frac{۱}{۲} H \times B = \frac{۱}{۲}(r\cos\alpha)(۲r\sin\alpha)$

$$S_{AOB} = r^۲ \sin\alpha\cos\alpha = r^۲(\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha) = \frac{۱}{۲} r^۲ \sin(۲\frac{۱۸۰}{n}) = \frac{۱}{۲} r^۲ \sin\frac{۳۶۰}{n}$$

مساحت n ضلعی $= nS_{AOB} = \frac{۱}{۲} n.r^۲ \sin\frac{۳۶۰}{n} \Rightarrow \boxed{S = \frac{n}{۲} r^۲ \sin\frac{۳۶۰}{n}} < \pi r^۲$

نکته : همواره مساحت حاصله برای چندضلعی‌های محاطی، از مساحت دایره محیطی $(\pi r^{۲})$ کمتر است.



۴ــ۵ــ۶ــ مساحت n ضلعی منتظم محیط بر دایره به شعاع r برابر است با :

$$S = nr^{۲} tg\frac{۱۸۰}{n}$$

اثبات :

$$\alpha = \frac{\frac{۳۶۰}{n}}{۲} = \frac{۱۸۰}{n} \quad \text{و} \quad S_{۱} = \frac{۱}{۲}B \times r$$ مساحت مثلث هاشورخورده

$$tg\alpha = \frac{\frac{B}{۲}}{r} = \frac{B}{۲r} \Rightarrow B = ۲rtg\alpha$$

$$S_{۱} = \frac{۱}{۲}B.r = \frac{۱}{۲}(۲rtg\alpha)r = r^{۲}tg\frac{۱۸۰}{n}$$

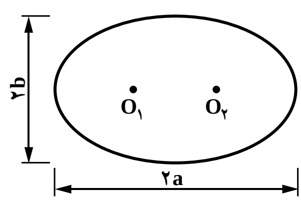
$S_n = nr^{۲}tg\frac{۱۸۰}{n}$ مساحت n ضلعی محیطی بر دایره شعاع r

$$\boxed{S_n = nr^{۲}tg\frac{۱۸۰}{n}} > \pi r^{۲}$$

نکته : همواره مساحت n ضلعی‌های محیطی از مساحت دایرهٔ محاطی $(\pi r^{۲})$ بیشتر است.

۴ــ۵ــ۷ــ مساحت بیضی به قطرهای ۲a و ۲b برابر است با :

$S \quad \pi ab$



یادآوری : مکان هندسی نقاطی که مجموع فاصلهٔ آنها از دو نقطهٔ ثابت (کانون‌های بیضی) برابر مقدار ثابتی (قطر بزرگ بیضی یعنی ۲a) باشد، بیضی نام دارد.

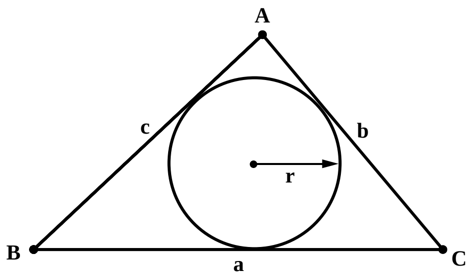
مثال : قطر بزرگ یک بیضی ۵۰ متر و قطر کوچک آن ۴۰ متر است، مساحت آن چند متر مربع است؟

حل : $S \quad \pi ab \;,\; a \quad ۲۵ \;, b \quad ۲۰ \Rightarrow S \quad ۳/۱۴ \times ۲۵ \times ۲۰ \quad ۱۵۷۰ m^۲$

حل : برای به‌خاطرسپاری رابطهٔ بیضی، کافی است که $a \quad b$ اختیار شود تا به دایره تبدیل شود و طبیعتاً رابطه به فرمول دایره تبدیل می‌شود. $a \quad b \quad r \Rightarrow S \quad \pi r^۲$

۴ــ۵ــ۸ ــ مساحت دایرهٔ محاطی یک مثلث

مثلث : مطابق شکل، مثلث ABC و دایرهٔ محاطی آن را مشاهده می‌کنید.



$$\boxed{r = \frac{S_{ABC}}{p}} \qquad \frac{\text{مساحت مثلث}}{\text{نصف محیط مثلث}} \quad \text{شعاع دایرهٔ محاطی مثلث}$$

مثال : اضلاع مثلثی عبارت‌اند از : $a \quad ۶۸m$ و $b \quad ۵۲m$ و $c \quad ۴۴m$ مساحت دایرهٔ محاطی آن چند متر مربع است؟

حل : $p = \frac{۵۲+۶۸+۴۴}{۲} = ۸۲ \quad , \quad r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\sqrt{p(p-۶۸)(p-۵۲)(p-۴۴)}}{p}$

$$\text{مساحت دایرهٔ محاطی} = \pi r^۲ = \pi \times \frac{p(p-۶۸)(p-۵۲)(p-۴۴)}{p^۲} = \pi \times \frac{(p-۶۸)(p-۵۲)(p-۴۴)}{p}$$

$$= \pi r^۲ = \pi \times \frac{p(p-۶۸)(p-۵۲)(p-۴۴)}{p^۲} = \pi \times \frac{(p-۶۸)(p-۵۲)(p-۴۴)}{p}$$

$$\text{مساحت دایرهٔ محاطی} = \frac{۳/۱۴(۸۲-۶۸)(۸۲-۵۲)(۸۲-۴۴)}{۸۲}$$

$$\text{مساحت دایرهٔ محاطی} = \frac{۳/۱۴ \times ۱۴ \times ۳۰ \times ۳۸}{۸۲} = \frac{۵۰۱۱۴/۴}{۸۲} = ۶۱۱/۱۵ m^۲$$

حل :

$$r = \frac{S_{ABC}}{p}$$

$$p = \frac{۶۸ + ۵۲ + ۴۴}{۲} = ۸۲$$

$$S_{ABC} = \sqrt{۸۲(۸۲ - ۶۸)(۸۲ - ۵۲)(۸۲ - ۴۴)} = ۱۱۴۳/۹۹$$

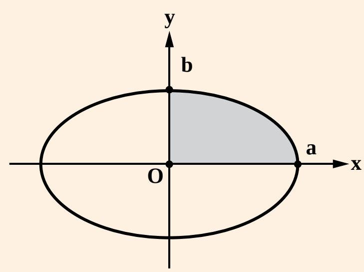
$$r = \frac{۱۱۴۳/۹۹}{۸۲^۲} = ۱۳/۹۵m$$

مساحت دایره محاطی $S \quad \pi . r^۲ \quad \pi \times ۱۳/۹۵^۲ \quad ۶۱۱/۴۶m^۲$

مساحت بیضی

معادله پارامتری بیضی :

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \quad a > b$$

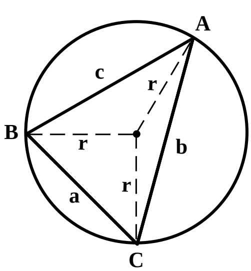


مساحت مربع بیضی $S_{\frac{۱}{۴}} = \int_{\theta_۱}^{\theta_۲} g(\theta).f'(\theta)d\theta$

$$S_{\frac{۱}{۴}} = \int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰} b\sin\theta(-a\sin\theta)d\theta = \frac{\pi ab}{۴}$$

بیضی کامل $S = ۴(S_{\frac{۱}{۴}}) = ۴(\frac{\pi ab}{۴}) = \pi.a.b$

۴ـ۵ـ۹ـ مساحت دایرهٔ محیطی مثلث : در شکل روبه‌رو،



مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن ترسیم شده‌اند، شعاع دایرهٔ محیطی به صورت زیر تعیین می‌گردد.

شعاع دایرهٔ محیطی $= r = \frac{a.b.c}{۴S_{ABC}}$

بنابراین مساحت دایرهٔ محیطی مثلث برابر است با :

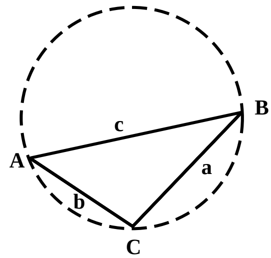
$$\boxed{S = \frac{\pi a^۲ b^۲ c^۲}{۱۶p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

مثال : شعاع و مساحت دایرهٔ محیطی برای مثلثی با شرایط زیر به دست آورید.

a ۱۸m

b ۱۲m

c ۲۲m



حل :

$$p=\frac{۱۸+۱۲+۲۲}{۲}=۲۶$$

$$S_{ABC}=\sqrt{۲۶(۲۶-۱۸)(۲۶-۱۲)(۲۶-۲۲)}=۱۰۷/۹۳m^{۲}$$

$$r=\frac{a.b.c}{۴S_{ABC}}=\frac{۱۸\times ۱۲\times ۲۲}{۴\times ۱۰۷/۹۳}=۱۱m$$

دایره $S=\pi r^{۲}=\pi\times ۱۱^{۲}=۳۳۰/۱۳m^{۲}$

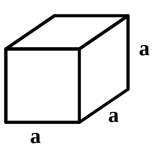
از رابطهٔ مستقیم داریم :

$$S=\frac{\pi a^{۲}b^{۲}c^{۲}}{۱۶p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{\pi\times ۱۸^{۲}\times ۱۲^{۲}\times ۲۲^{۲}}{۱۶\times ۲۶(۲۶-۱۸)(۲۶-۱۲)(۲۶-۲۲)}=۳۸۰/۶۵m^{۲}$$

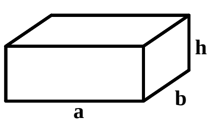
۴ـ۶ـ محاسبهٔ سطح جانبی و سطح کل احجام هندسی و احجام مرکب

۴ـ۶ـ۱ـ سطح جانبی احجام منشوری   محیط قاعده × ارتفاع

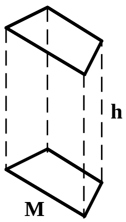
سطح جانبی مکعب به ضلع a برابر است با : $۴a^{۲}$



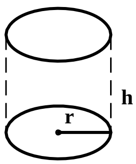
سطح جانبی یک مکعب مستطیل به ابعاد قاعدهٔ a و b و ارتفاع h برابر است با : ۲(a   b)h



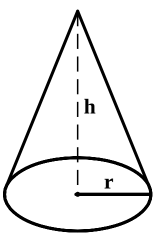
سطح جانبی منشور با محیط قاعدهٔ M و ارتفاع h برابر است با : MH



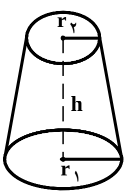
سطح جانبی استوانه با شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با $2\pi hr$



سطح جانبی مخروط با شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با : $\pi r\sqrt{h^2+r^2}$

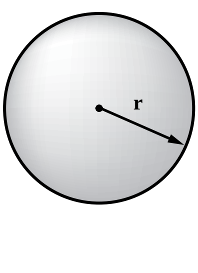


سطح جانبی مخروط ناقص با شعاع قاعدهٔ پایینی r_1 و شعاع قاعدهٔ بالایی r_2 و ارتفاع h برابر است با : $h\pi(r_1 \quad r_2)$

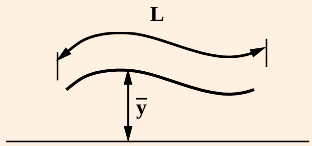


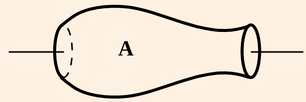
سطح جانبی هرم برابر است با : مجموع سطوح جانبی آن
سطح کل احجام برابر است با : سطح جانبی   سطح قاعده‌ها
سطح جانبی احجام مرکب برابر است با : مجموع سطوح جانبی اجزای تشکیل‌دهندهٔ آنها

سطح کل کره به شعاع r برابر است با : $4\pi r^2$



قضیه اول وارینیون : سطح جانبی حادث از یک منحنی که حول محوری می‌چرخد به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.



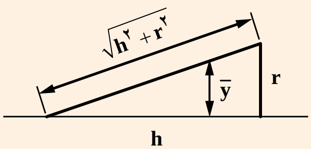


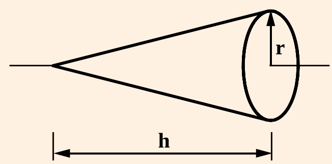
L ــ طول پاره‌خط

y ــ مرکز خط، محور دوران

$\boxed{\text{سطح جانبی} \quad A = ۲\pi L\bar{y}}$

مثال : مساحت جانبی مخروطی با شعاع قاعده r و ارتفاع h را به‌دست آورید.

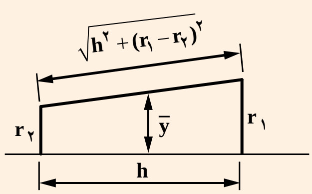


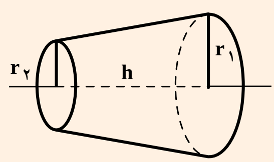


$$\bar{y} = \frac{۱}{۲}r$$

$$\text{سطح جانبی} \quad A = ۲\pi(\sqrt{h^۲+r^۲})(\frac{۱}{۲}r) = \pi r\sqrt{h^۲+r^۲}$$

مثال : مساحت جانبی مخروط ناقص مطابق شکل زیر را تعیین کنید.





$$\bar{y} = \frac{۲r}{\pi}$$

$$\text{مساحت جانبی} \quad A = ۲\pi(\sqrt{h^۲+(r_۱-r_۲)^۲})(\frac{r_۱+r_۲}{۲})$$

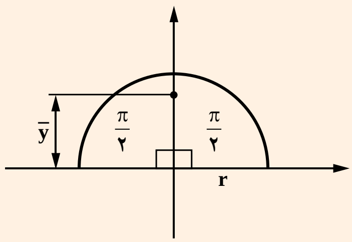
$$\boxed{A = \pi(r_۱+r_۲)\sqrt{h^۲+(r_۱-r_۲)^۲}}$$

در صورتی که دو شعاع قاعده اختلاف زیادی نداشته باشند.

$$r_۱ \cong r_۲ \Rightarrow \sqrt{h^۲ + (r_۱ - r_۲)^۲} \cong h$$

$$\boxed{A = \pi h(r_۱ + r_۲)}$$

مثال : مساحت جانبی کره به شعاع r



$$\bar{y} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha} = \frac{r\sin\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۲}}$$

$$\bar{y} = \frac{۲r}{\pi}$$

طول قوس نیم‌دایره $L = \frac{۲\pi r}{۲} = \pi r$

$$A = ۲\pi(\pi r)\frac{۲r}{\pi} = ۴\pi r^۲$$