فصل دوم

محاسبهٔ زاویه

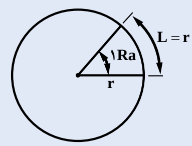
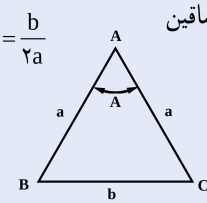
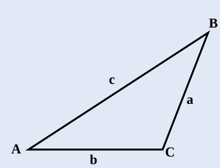
خلاصهٔ فصل

در این فصل دانش‌آموزان با مفهوم و سلسله‌مراتب واحدهای اندازه‌گیری زاویه، تبدیل واحد به‌هم، تعیین زوایای اشکال هندسی آشنایی پیدا می‌کنند و باید توانایی به‌کارگیری مسائل نظیر در محاسبه زوایا، سطوح و درس نقشه‌برداری را کسب نمایند.

اهداف فصل

دانشی	مهارتی	نگرشی
۱ــ آشنایی با واحدهای اندازه‌گیری	۱ــ انواع زوایا را برحسب واحد اندازه‌گیری تحلیل می‌کند	۱ــ باور اینکه کوچک‌ترین چرخش در زندگی مسیر را تغییر می‌دهد
۲ــ تبدیل واحدهای اندازه‌گیری	۲ــ زوایا را در سیستم‌های مختلف تبدیل می‌نماید	۲ــ چرخش کامل، باعث می‌شود انسان به سر جای اول خود برگردد
۳ــ تعیین زوایای داخلی مثلث	۳ــ براساس روابط مثلث‌های مشخص زوایای مجهول را محاسبه می‌کند	۳ــ باور اینکه طول عمر با دقت ثانیه داده شده است اما با سرعت روزها سپری می‌گردد
۴ــ تعیین زوایای داخلی چندضلعی‌ها	۴ــ قادر به استخراج رابطه زوایا با اضلاع می‌باشد	۴ــ یک انحراف بزرگ (۱۸ درجه‌ای) باعث تغییر صددرصدی در مسیر و پس‌رفت می‌شود
۵ــ تعیین مجموع زوایای داخلی چندضلعی‌ها	۵ــ مجموع زوایای داخلی n ضلعی‌های منتظم را براساس روابط مربوطه تعیین می‌کند	۵ــ زوایای جهان هستی بی‌شمار است و بیانگر عظمت خداوند متعال می‌باشد

روابط و فرمول‌های کلی فصل دوم

روابط و فرمول‌ها	تعریف اجزاء روابط و فرمول‌ها	روابط پایه مورد نیاز
درجه ــ دقیقه ــ ثانیه : $1^\circ = 60' = 60''$ $1'' = (\frac{1}{60})' = (\frac{1}{3600})^\circ$	درجه : زاویه‌ای است برابر زاویه مرکزی کمانی که به اندازه $\frac{1}{360}$ محیط دایره می‌باشد و اجزای آن ۶ واحدی است	
گراد ــ دقیقه گرادی ــ ثانیه گرادی $1G = 100' = 100''$	گراد : زاویه‌ای است برابر، زاویه مرکزی کمانی که به اندازه $\frac{1}{400}$ محیط دایره می‌باشد و اجزای آن ۱ واحدی است	
رادیان (Ra)  $\frac{\text{طول قوس مقابل زاویه}}{\text{شعاع دایره}} =$ اندازه زاویه برحسب رادیان	رادیان : زاویه‌ای است برابر زاویه مرکزی کمانی که طول کمان برابر شعاع دایره باشد زاویه مرکزی یک دایره کامل برابر $2\pi = 6/28Ra$ می‌باشد	
تبدیل واحدها به هم : $\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{Ra}{2\pi}$	D ــ درجه G ــ گراد Ra ــ رادیان	
مثلث متساوی‌الساقین $\sin(\frac{A}{2}) = \frac{b}{2a}$  	A ــ زاویه بین ساق‌ها (زاویه مرکزی) b ــ ضلع مقابل زاویه مرکزی	
رابطهٔ کسینوس‌ها $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$  	C,B,A زوایای داخلی گوشه‌های مثلث c,b,a اضلاع روبه‌روی زوایای متناظر	
nضلعی منتظم : $(n-2)\times 180^\circ =$ مجموع زوایای داخلی $\frac{(n-2)}{n}\times 180^\circ =$ اندازه هر زاویه	n ــ تعداد اضلاع nضلعی منتظم	

جدول بودجه‌بندی فرآیند اجرای برنامه درسی فصل دوم

جلسه آموزشی	موضوعات و عناوین	شماره صفحه کتاب درسی	اهداف آموزشی	امکانات و تجهیزات مورد نیاز
جلسه پنجم	۱ــ واحدهای اندازه‌گیری زاویه (درجه، گراد و رادیان) ۲ــ تبدیل واحدهای درجه، گراد و رادیان به همدیگر	۲۲ تا ۲۴ ۲۵	آشنایی با نمادهای علمی درجه، گراد و رادیان، توانایی تبدیل اعداد اعشاری برحسب درجه، دقیقه و ثانیه امکان تبدیل واحدهای سه‌گانه زاویه به همدیگر	نقاله ــ ماشین‌حساب
جلسه ششم	۳ــ محاسبهٔ زوایای مثلث ۴ــ محاسبه زوایای داخلی یک چندضلعی منتظم	۲۶ ۳	نحوه تعیین زوایای انواع مثلث‌های مشخص را تعیین کند زوایای داخلی مثلث و چندضلعی‌های منتظم را تعیین کند مجموع زوایای داخلی یک چندضلعی را مشخص نماید	

جلسهٔ پنجم: محاسبهٔ زاویه

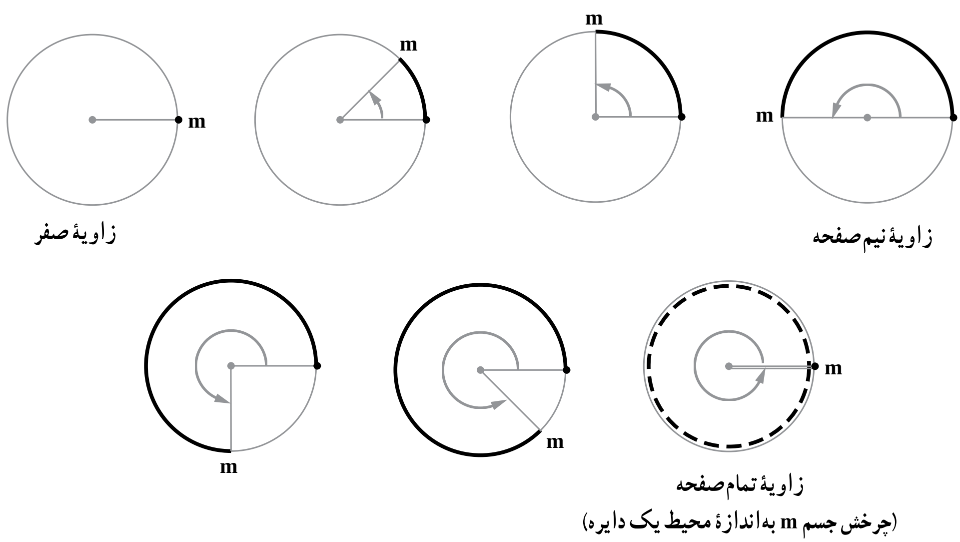
مقدمه : پیاده‌کردن امتداد یک مسیر، خیابان و بزرگراه، همچنین بریدن و عملیات تراشکاری روی یک قطعه، فرم‌دادن به پاکت بسته‌بندی‌ها و نهایتاً عملیات برداشت یک قطعه زمین و پیاده‌سازی آن در روی نقشه و ... نیاز به داشتن طول و زاویه دارند.

آمادگی برای یادگیری واحدهای اندازه‌گیری، می‌تواند دانش‌آموز را در درس‌هایی نظیر، نقشه‌کشی، برداشت و نقشه‌برداری کمک نماید. بدون تسلط بر به‌کارگیری واحدهای اندازه‌گیری زوایا نمی‌توان با دقت مناسب ابعاد قطعه زمینی را برداشت و سپس مساحت دقیق آن را تعیین نمود.

استفاده از نقاله‌های تمام دایره کمک بسیار زیادی جهت آشنایی دانش‌آموزان با درجه و اجزای آن می‌نماید.

۲ـ۱ـ واحدهای اندازه‌گیری زاویه

۲ـ۱ـ۱ـ درجه : تعریف زاویه تمام صفحه : اگر جسمی حول یک نقطه دور کاملی بزند، به عبارتی چرخش آن به‌اندازهٔ یک دایرهٔ کامل باشد، زاویه طی شده را تمام صفحه گویند.



درجه : اگر محیط یک دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنید، هرکدام از زوایای تشکیل‌شده ($\frac{۱}{۳۶۰}$ زاویه تمام صفحه) را درجه می‌نامند.

اجزای درجه : اجزای درجه عبارتند از دقیقه و ثانیه، به‌طوری که ۶۰ دقیقه تشکیل یک درجه و ۶۰ ثانیه تشکیل یک دقیقه می‌دهد.

$$1 = 60' = 3600'' \quad \text{یا} \quad 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$$

توجه : برای نمایش زاویه به ترتیب برحسب درجه، دقیقه و ثانیه از نمادهای (°)، (′) و (″) استفاده می‌شود.

❑ **مثال :** زوایای زیر را برحسب نمادهای علمی (درجه، دقیقه و ثانیه) بنویسید.

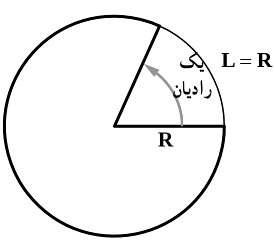
۱۴ درجه و ۵۴ ثانیه و	۱۴° و ۰′ و ۵۴″ یا ۱۴° و ۵۴″
۳۴ درجه و ۲۷ دقیقه و ۲۹/۳۲ ثانیه	۳۴° و ۲۷′ و ۲۹/۳۲″
صفر درجه و ۲ دقیقه و ۱۲ ثانیه	۰° و ۲′ و ۱۲″
یک دقیقه	۱′

۲ـ۱ـ۲ـ گراد

- $\frac{1}{400}$ زاویهٔ تمام صفحه را «گراد» می‌نامند و آن را با حرف g نمایش می‌دهند.
- $\frac{1}{100}$ گراد را دقیقهٔ گرادی و $\frac{1}{100}$ دقیقهٔ گرادی را ثانیهٔ گرادی می‌گویند.
- معمولاً اجزای زاویهٔ گرادی را به‌صورت اعشاری نمایش می‌دهند.

مثال : ۷۲ گراد و ۵ دقیقه و ۲۳ ثانیهٔ گرادی را چنین می‌نویسند : ۷۲/۰۵۲۳

تشریح مثال : به دلیل اینکه اجزاء گراد دارای سلسله‌مراتب ۱۰۰ قسمتی است (نظیر عدد ۲۵/۷۲ که خوانده می‌شود بیست و پنج و هفتاد و دو صدم) دقیقه و ثانیه به‌ترتیب پس از عدد صحیح و به‌عنوان صدم و ده‌هزارم قرار می‌گیرند.



شکل ۱

۲ـ۱ـ۳ـ رادیان : در هر دایره، یک رادیان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی است که طول قوس مقابل به آن، برابر شعاع دایره باشد.

برای تعیین اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان، کافی است طول قوس مقابل آن را به شعاع دایره تقسیم کنیم.

اندازهٔ زاویه برحسب رادیان $\dfrac{\text{طول قوس مقابل زاویه}}{\text{شعاع دایره}}$

مثال : یک زاویهٔ تمام صفحه چند رادیان است؟

$\dfrac{\text{طول قوس}}{\text{شعاع}}$ رادیان $\theta = \dfrac{۱}{R}$ رادیان

در این مثال، طول قوس عبارت است از محیط دایره، یعنی :

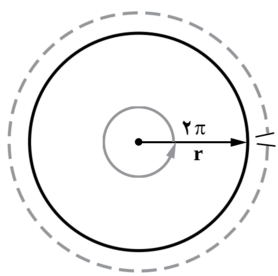
$I \quad ۲\pi R$

بنابراین زاویهٔ تمام صفحه برابر است با : $\theta = \dfrac{۲\pi R}{R} = ۲\pi$

تشریح مثال :

$u \quad ۲\pi r$

$Ra \quad \dfrac{\text{طول قوس}}{\text{شعاع}} = \dfrac{۲\pi r}{r} = ۲\pi$



نتیجه : زاویه تمام صفحه برابر ۲π رادیان یا ۶/۲۸Ra ۲×۳/۱۴ می‌باشد.

۲ــ۲ــ تبدیل واحدهای اندازه‌گیری زاویه به همدیگر

۲ــ۲ــ۱ــ تبدیل واحدهای درجه و گراد : یک زاویهٔ تمام صفحه برابر است با ۳۶۰ درجه یا ۴۰۰ گراد، بنابراین اگر مقدار یک زاویه برحسب درجه را با حرف D و مقدار همان زاویه را برحسب

گراد با حرف G نمایش دهیم، داریم :

$$\boxed{\frac{D}{۳۶۰}=\frac{G}{۴۰۰}} \xrightarrow{\text{و به‌صورت ساده‌شده}} \boxed{\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}}$$

مثال : ۳۶° چند گراد است؟

یعنی ۳۶ D و می‌خواهیم G را محاسبه کنیم، داریم :

$$\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}$$

$$\frac{۳۶}{۹}=\frac{G}{۱۰} \Rightarrow G=\frac{۱۰\times ۳۶}{۹}=۴۰ \Rightarrow G=۴۰$$

تشریح مثال : برای تبدیل درجه به گراد و یا بالعکس رابطهٔ ذکرشده را به‌صورت ساده‌شده $\boxed{D=۰/۹G}$ مورد استفاده قرار می‌دهیم.

$$۳۶^{\circ} \quad ?\ \text{grad} \Rightarrow ۳۶ \quad ۰/۹G$$

$$G=\frac{۳۶}{۰/۹}=۴۰\text{grad}$$

مثال : یک زاویهٔ ۵۵ گراد چند درجه است؟

$$\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰} \Rightarrow \frac{D}{۹}=\frac{۵۵}{۱۰} \rightarrow D=۹\times ۵/۵=۴۹/۵^{\circ}$$

یعنی $D \quad (۴۹^{\circ}\ ۰/۵\times ۶۰') \Rightarrow D \quad (۴۹^{\circ}\ ۳۰')$

تشریح مثال :

$$G \quad ۵۵ \qquad D \quad ?$$

$$D \quad ۰/۹\,G \qquad D \quad ۰/۹\times ۵۵ \quad ۴۹/۵^{\circ}$$

$$D \quad (۴۹^{\circ},\ ۰/۵\times ۶۰') \quad ۴۹^{\circ},۳۰'$$

۲ـ۲ـ۲ـ تبدیل واحدهای درجه و گراد به رادیان : اگر اندازهٔ زاویه برحسب رادیان را با Ra نمایش دهیم، داریم :

$$\boxed{\frac{D}{۳۶۰} = \frac{G}{۴۰۰} = \frac{Ra}{۲\pi}}$$

مثال : یک رادیان چند درجه و چند گراد است؟

$$\frac{D}{۳۶۰} = \frac{Ra}{۲\pi} \ , \ Ra = ۱$$

• تبدیل رادیان به درجه :

$$\frac{D}{۳۶۰^\circ} = \frac{۱}{۲\pi} \Rightarrow D = \frac{۳۶۰^\circ}{۲\times ۳/۱۴} = ۵۷^\circ \ , \ (\frac{۵۱}{۱۵۷})^\circ \simeq ۵۷^\circ \ , \ (\frac{۵۰}{۱۵۰})$$

$$D \simeq ۵۷^\circ \ \frac{۱}{۳}^\circ \Rightarrow D \simeq ۵۷^\circ \ ۲۰'$$

• تبدیل رادیان به گراد :

$$\frac{G}{۴۰۰} = \frac{Ra}{۲\pi} \ , \ Ra = ۱$$

$$\frac{G}{۴۰۰} = \frac{۱}{۲\pi} \Rightarrow G = \frac{۴۰}{۲\times ۳/۱۴} = ۶۴/۳۸g$$

تشریح مثال : در این حالت با برقرارنمودن تناسب بین رادیان و درجه $(\frac{D}{۳۶۰} = \frac{R_a}{۲R})$ اقدام به تعیین درجه می‌شود که نتیجه به‌دست آمده مؤید $۱Ra \quad ۵۷^\circ , ۲۰'$ است.

و برای تبدیل رادیان به گراد از تناسب $\frac{G}{۴۰۰} = \frac{R_a}{۲\pi}$ استفاده می‌شود که نتیجه برابر است با :

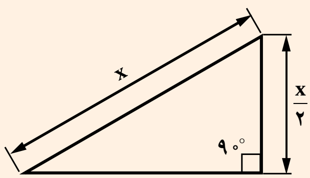
$۱Ra \quad ۶۴/۳۸$ grad

جلسهٔ ششم: ادامهٔ محاسبهٔ زاویه

در این جلسه با به‌کارگیری روابط مثلث قائم‌الزاویه، متساوی‌الساقین و مثلث نامشخص اقدام به تعیین برخی مجهولات خواسته شده می‌گردد.

در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین از نسبت‌های مثلثاتی و برای مثلث نامشخص از قانون سینوس‌ها و کسینوس استفاده می‌شود.

بیشتر بدانید



۱ــ در مثلث قائم‌الزاویه (راست‌گوشه) اگر زاویه یکی از گوشه‌ها ۳۰ درجه باشد، اندازه ضلع روبه‌رو به آن، برابر نصف وتر است.

۲ــ سایر روابط در مثلث قائم‌الزاویه به شرح زیر می‌باشد :

الف) $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

ب) $cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

ج) $\sin^2\alpha \quad \cos^2\alpha \quad 1$

د) $tg\,\alpha . cotg\alpha \quad 1$

بر اساس برابری نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه B و C و با توجه به اینکه زوایای C,B متمم هستند. به عبارتی اگر زاویه یکی از آنها x باشد آنگاه زاویه دیگری $(\frac{\pi}{2} - x)$ است می‌توان روابط زیر را استخراج نمود.

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

$$tg(\frac{\pi}{2} - x) = cotgx$$

$$cotg(\frac{\pi}{2} - x) = tgx$$

۲ـ۳ـ محاسبه زوایای مثلث

۲ـ۳ـ۱ـ مثلث قائم‌الزاویه : در این مثلث یکی از زوایای ۹۰ درجه (قائمه) است و نسبت‌های زیر برای سایر زوایای آن که کوچک‌تر از ۹۰ درجه (حاده) هستند، برقرار است.

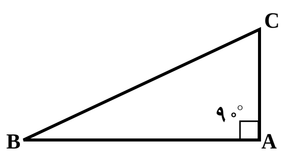
الف) نسبت ضلع روبه‌رو به هر زاویه حاده، به وتر را سینوس آن زاویه نامند.

ب) نسبت ضلع مجاور به هر زاویه حاده، به وتر را کسینوس آن زاویه نامند.

ج) نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور به هر زاویهٔ حاده را تانژانت آن زاویه نامند.

د) نسبت ضلع مجاور به ضلع مقابل به هر زاویهٔ حاده را کتانژانت آن زاویه نامند.

نسبت‌های مثلثاتی



$$\begin{cases} \sin B = \dfrac{AC}{BC} \\ \cos B = \dfrac{AB}{BC} \\ tgB = \dfrac{AC}{AB} \\ \cot gB = \dfrac{AB}{AC} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin C = \dfrac{AB}{BC} & \Rightarrow \sin B = \cos C \\ \cos C = \dfrac{AC}{BC} & \Rightarrow \cos B = \sin C \\ tg\,C = \dfrac{AB}{AC} & \Rightarrow tgB = \cot gC \\ \cot g\,C = \dfrac{AC}{AB} & \Rightarrow \cot gB = tgC \end{cases}$$

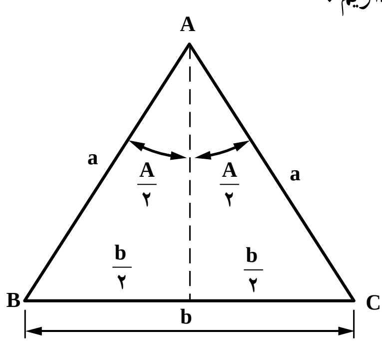
قضیه فیثاغورس

$$\boxed{BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲}}$$

۲ـ۳ـ۲ـ مثلث متساوی‌الساقین : در این مثلث اندازه دو ضلع با هم برابر است و روابط خاصی برای زاویه بین دو ضلع برابر وجود دارد. کاربرد روابط این مثلث ضمن این‌که در حل آن به‌کار می‌رود بلکه برای برداشت زوایای بین دو امتداد نظیر برداشت یک قطعه زمین کاربرد فراوانی دارد.

در مثلث متساوی‌الساقین ABC (شکل ۴) ارتفاع نظیر رأس A، نیم‌ساز زاویهٔ A و عمود منصف ضلع مقابل به زاویهٔ A می‌باشد؛ بنابراین با توجه به روابط مثلثاتی داریم :

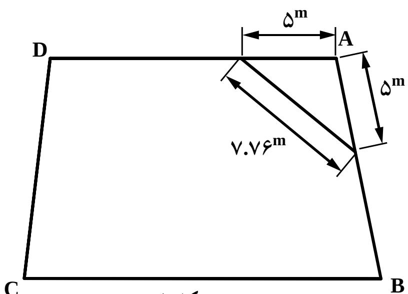
$$\boxed{\sin(\frac{A}{۲}) = \frac{\frac{b}{۲}}{a} = \frac{b}{۲a}} \quad \text{یا} \quad \boxed{\cos C = \frac{\frac{b}{۲}}{a} = \frac{b}{۲a}}$$



شکل ۴

یعنی با محاسبهٔ $\frac{b}{2a}$ و با استفاده از جدول سینوس‌ها، نصف زاویهٔ A را به‌دست می‌آوریم. همچنین با داشتن $\frac{b}{2a}$، می‌توان مقدار زاویهٔ C و نیز B (چون C B) را از جدول کسینوس‌ها به‌دست آورد.

مثال : برای اندازه‌گیری زاویهٔ A در گوشهٔ یک زمین، دو طول مساوی ۵ متری در روی دو ضلع آن جدا کرده و سپس ضلع سوم آن را اندازه‌گیری نموده‌ایم (شکل ۵). اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟

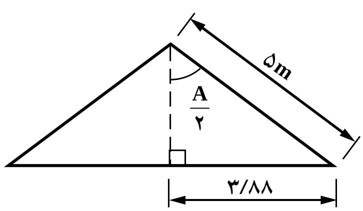


شکل ۵

حل :

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{b}{2a}=\frac{7/76}{2\times 5}=0/776 \rightarrow \frac{A}{2}=50^\circ 54' \rightarrow A=101^\circ 48'$$

تحلیل : درصورتی‌که رابطه $\sin\frac{A}{2}=\frac{b}{2a}$ فراموش شود با رسم نیمساز A (عمود منصف ضلع مقابل A) به‌راحتی زاویه $\frac{A}{2}$ و سپس A تعیین می‌شود.



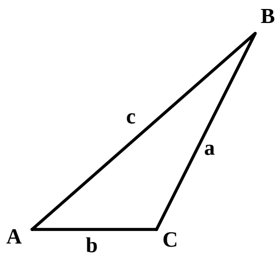
$$\sin(\frac{A}{2})=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{3/88}{5}=0/776 \rightarrow \frac{A}{2}=50^\circ,54' \Rightarrow A=|0|^\circ,48'$$

۲ــ۳ــ۳ــ مثلث غیرمشخص (عمومی) :
روابطی که برای این مثلث اثبات می‌شود، شامل سایر مثلث‌ها (نظیر قائم‌الزاویه، متساوی‌الساقین و ...) می‌شود و حالت عمومی‌تری دارند.

۲ــ۳ــ۳ــ۱ــ رابطهٔ کسینوس‌ها

در هر مثلث، مربع هر ضلع، برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر، منهای حاصل ضرب آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آنها.

در مثلث ABC شکل ۶ داریم :

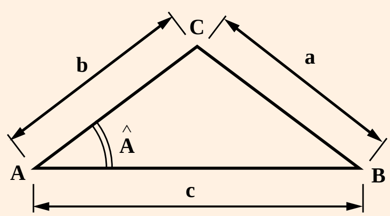


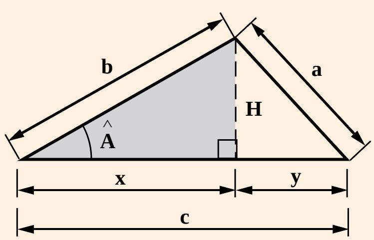
$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}}$$

با استفاده از روابط بالا که به رابطهٔ کسینوس‌ها معروف است،
می‌توانیم زوایای مثلث را به‌صورت زیر بنویسیم :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}}$$

اثبات رابطه کسینوس‌ها : فرض کنید مثلث نامشخصی مطابق شکل زیر داشته باشیم.





فرض کنید هدف تعیین ضلع BC (یا a) می‌باشد و دو ضلع b و c مشخص باشند. برای این منظور کافی است از رأس C عمودی بر ضلع AB استخراج شود و مثلث سمت چپ که یک مثلث قائم‌الزاویه است را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بدیهی است که در مثلث سمت چپ داریم :

$X \quad b\cos A$

$H \quad b\sin A$

و در مثلث سمت راست داریم :

$$y \quad c \quad x \quad c \quad b\cos A$$

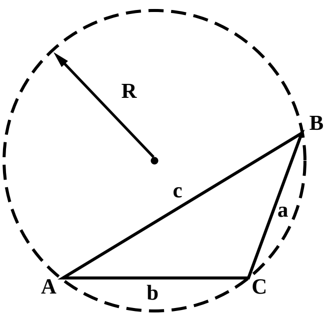
$$a^{۲} \quad y^{۲} \quad H^{۲} \quad (c \quad b\cos A)^{۲} \quad (b\sin A)^{۲}$$

$$a^{۲} \quad (c^{۲} \quad b^{۲}\cos^{۲}A \quad ۲bc\cos A) \quad b^{۲}\sin^{۲}A$$

$$a^{۲} \quad c^{۲} \quad b^{۲}(\cos^{۲}A \quad \sin^{۲}A) \quad ۲b.c\cos A$$

$$a^{۲} \quad c^{۲} \quad b^{۲} \quad ۲b.c\cos A$$

۲ــ۳ــ۳ــ۲ــ رابطهٔ سینوس‌ها : در مثلث غیرمشخص، نسبت هر ضلع به سینوس زاویه مقابلش برابر است با قطر دایرهٔ محیطی آن مثلث



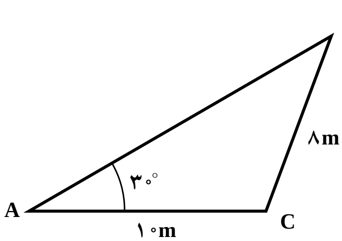
$$\frac{a}{\sin A} = ۲R$$

$$\frac{b}{\sin B} = ۲R$$

$$\frac{c}{\sin C} = ۲R$$

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R} \qquad \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = ۱۸۰^{\circ}$$

❑**مثال :** با استفاده از قانون سینوس‌ها، زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را تعیین کنید.



$$\hat{A} = ۳۰^{\circ}$$

$$\frac{۸}{\sin ۳۰} = \frac{۱۰}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{۱۰ \times \sin ۳۰}{۸} = \frac{۱۰ \times \frac{۱}{۲}}{۸} = ۰/۶۲۵$$

$$\hat{B} = ۳۸/۶۸۲۲ = ۳۸^{\circ}, ۴۰', ۵۶''$$

از آنجایی که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است پس :

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = ۱۸۰ \qquad C = ۱۸۰ - \hat{A} - \hat{B}$$

$$\hat{C}=۱۸۰-۳۰-۳۸^\circ,۴۰',۵۶''=۱۱۱^\circ,۱۹',۴''\Rightarrow$$

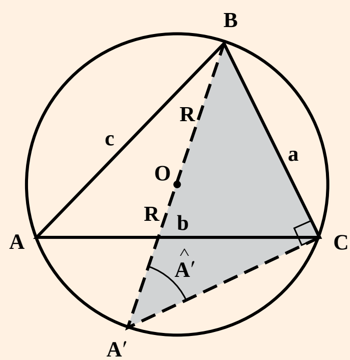
$$\frac{AB}{\sin(۱۱۱^\circ,۱۹',۴'')}=\frac{۸}{\sin ۳۰}\Rightarrow AB=۱۴۹۱m$$

همچنین از روابط کسینوس‌ها می‌توان طول ضلع AB را تعیین نمود.

$$AB^۲ \quad AC^۲ \quad BC^۲ \quad ۲(AB)(BC)\cos C \quad ۱۰^۲ \quad ۸^۲ \quad ۲(۸)(۱۰)\cos(۱۱۱^\circ,۱۹',۴'')$$

$$۲۲۲/۱۶۶\Rightarrow AB \quad ۱۴/۹۱m$$

اثبات رابطهٔ کسینوس‌ها : مثلث ABC را در نظر بگیرید. با ثابت‌نگه‌داشتن رئوس B و C و جابجایی رأس A به نحوی که ضلع AB از مرکز دایره عبور کند مثلث قائم‌الزاویهٔ A′BC حاصل می‌شود که همچنان زاویه A′ با زاویه A برابر است و با نوشتن روابط مثلثاتی داریم :



ثابت می‌شود که :

$$\sin A'=\frac{a}{۲R}\ \text{چون}\ \sin A' \quad \sin A$$

$$B\hat{A}C=B\hat{A}'C=\hat{A}$$

$$\sin A=\frac{a}{۲R}\Rightarrow \boxed{\frac{a}{\sin A}=۲R}$$

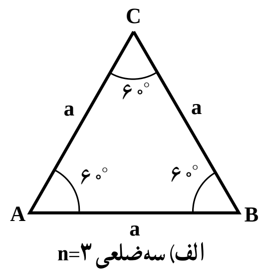
به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که :

$$\frac{b}{\sin B}=۲R \quad , \quad \frac{c}{\sin C}=۲R$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$$

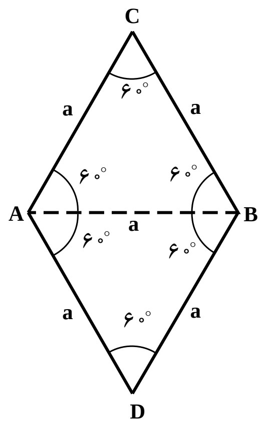
۲ـ۴ـ محاسبهٔ زوایای داخلی یک چندضلعی منتظم

زوایای داخلی برای شکل‌های نشان‌داده‌شده به شرح زیر تعیین می‌شوند.



الف) سه‌ضلعی n=۳

$$\Sigma\theta = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$



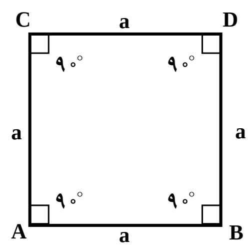
ب) چهارضلعی n=۴

$\Delta ABC \quad \Delta ABD \Rightarrow$

$A \quad B \quad C \quad ۱۸۰ \Rightarrow$

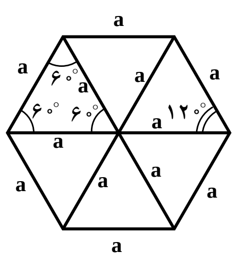
مجموع زوایای داخلی آن دو برابر مثلث ABC است.

$\Sigma\theta \quad ۱۸۰ \times ۲ \quad ۳۶۰^\circ$



ج) چهارضلعی n=۴

$$\sum \theta = ۴ \times ۹۰ = ۳۶۰^\circ$$



د) شش‌ضلعی

$$\sum \theta = ۱۲۰^\circ \times ۶ = ۷۲۰^\circ$$

همان‌طوری‌که از زوایای اشکال برمی‌آید مجموع زوایای داخلی رابطه‌ای با تعداد اضلاع دارد که :

اگر $\rightarrow n \quad ۳ \Rightarrow \Sigma\theta \quad ۱۸۰^\circ \quad ۱ \times ۱۸۰ \quad (n \quad ۲) \times ۱۸۰$

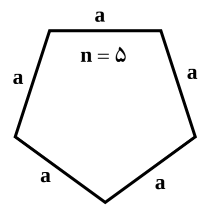
اگر $\rightarrow n \quad ۴ \Rightarrow \Sigma\theta \quad ۳۶۰^\circ \quad ۲ \times ۱۸۰ \quad (n \quad ۲) \times ۱۸۰$

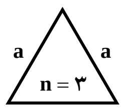
اگر $\rightarrow n \quad ۶ \Rightarrow \Sigma\theta \quad ۷۲۰^\circ \quad ۴ \times ۱۸۰ \quad (n \quad ۲) \times ۱۸۰$

۲ـ۴ـ۱ـ مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با :

$$\boxed{\Sigma\theta = (n-۲)۱۸۰^\circ}$$

مثال : مجموع زوایای n ضلعی‌های نشان داده‌شده را تعیین کنید.





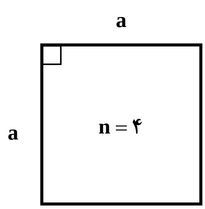
$\Sigma\theta \quad (n \quad ۲)۱۸۰ \quad (۵ \quad ۲)۱۸۰ \quad ۵۴۰^\circ$

$\Sigma\theta \quad (n \quad ۲)۱۸۰ \quad (۳ \quad ۲)۱۸۰ \quad ۱۸۰^\circ$

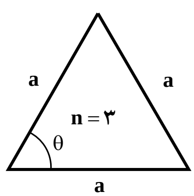
۲ـ۴ـ۲ـ اندازهٔ هر زاویهٔ یک n ضلعی منتظم عبارت است با :

$$\boxed{\theta = \frac{\Sigma\theta}{n} = \frac{(n-۲)۱۸۰}{n}}$$

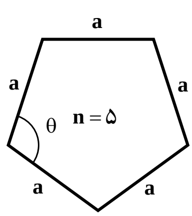
مثال : اندازهٔ زاویهٔ داخلی هر ضلع از اشکال زیر را تعیین کنید.



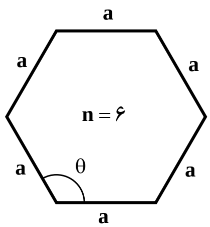
$$\theta = \frac{(n-۲)۱۸۰}{n} = \frac{(۴-۲)۱۸۰}{۴} = \frac{۲}{۴}\times ۱۸۰ = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰^\circ$$



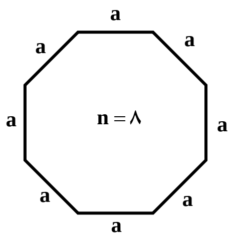
$$\theta = \frac{(n-۲)۱۸۰}{n} = \frac{(۳-۲)۱۸۰}{۳} = ۶۰^\circ$$



$$\theta = \frac{(n-۲)۱۸۰}{n} = \frac{(۵-۲)۱۸۰}{۳} = ۱۰۸^\circ$$

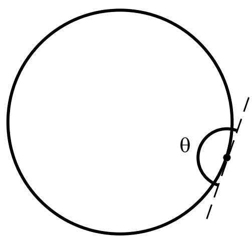


$$\theta = \frac{(n-۲)۱۸۰}{n} = \frac{(۶-۲)۱۸۰}{۶} = ۱۲۰^\circ$$



$$\theta = \frac{(n-۲)۱۸۰}{n} = \frac{(۸-۲)۱۸۰}{۸} = ۱۳۵^\circ$$

نکته : دایره یک n ضلعی منتظم است که تعداد اضلاع آن به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و هر اندازه تعداد اضلاع زیادتر شود زاویه داخلی ضلع به سمت ۱۸۰ درجه میل می‌کند.



اگر $n \to ۱۰۰۰ \Rightarrow \theta = \frac{(n-۲)۱۸۰}{n} = \frac{(۱۰۰۰-۲)۱۸۰}{۱۰۰۰} = ۱۷۹/۶۴^\circ$

اگر $n \to ۱۰۰۰۰ \Rightarrow \theta \quad ۱۷۹/۹۶^\circ$

اگر $n \to ۱۰۰۰۰۰ \Rightarrow \theta \quad ۱۸۰^\circ$

فصل سوم

محاسبهٔ ابعاد دیوار

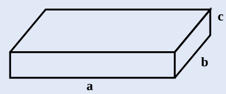
خلاصهٔ فصل

این فصل از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا دانش‌آموزان می‌توانند با تعیین تعداد آجرهای مصرفی در یک دیوار و یا ساختمان، هزینه خرید آجرها را برآورد نمایند. و براساس نوع دیوار ساخته‌شده مبادرت به محاسبه آجرهای مصرفی آنها نمایند.

اهداف فصل

دانشی	مهارتی	نگرشی
۱ــ آشنایی با ابعاد آجر استاندارد ۲ــ محاسبهٔ طول دیوار در تلاقی یکطرفه ۳ــ محاسبه طول دیوار آزاد ۴ــ محاسبه طول دیوار در تلاقی دوطرفه ۵ــ محاسبه ارتفاع دیوار ۶ــ محاسبه تعداد آجر مصرفی	۱ــ دلیل نسبت‌های ابعادی آجر را یاد می‌گیرد ۲ــ توانایی محاسبهٔ طول دیوار درتلاقی یکطرفه به‌دست می‌آورد ۳ــ توانایی محاسبهٔ طول دیوارهای آزاد را کسب می‌نماید ۴ــ توانایی محاسبه طول دیوارها در تلاقی دوطرفه را کسب می‌نماید ۵ــ براساس تعداد رج‌های آجرچینی توانایی محاسبه ارتفاع دیوار را کسب می‌نماید ۶ــ براساس نوع دیوار توانایی محاسبهٔ آجرهای مصرفی را به‌دست می‌آورد	۱ــ با مفهوم تکثیر و تکثر آشنایی پیدا می‌کند ۲ــ با توسعه براساس نظم آشنایی پیدا می‌کند ۳ــ در شکل‌گیری نظم کوچک‌ترها و بزرگ‌ترها مکمل هم هستند و بدون وجود هم نظام متنوعی ایجاد نمی‌شود و فهم این موضوع که در جهان هستی با وجود اختلافات در ابعاد و اندازه‌های عناصر باز هم نظم حاکم است

روابط و فرمول‌های کلی فصل سوم

روابط و فرمول‌ها	تعریف اجزاء روابط و فرمول‌ها	روابط پایه مورد نیاز
ابعاد آجر استاندارد a = ۲۱cm b = ۱ cm c = ۵/۵cm  a = ۲b+۱	 a ــ طول آجر یا طول راسته b ــ عرض آجر یا عرض کله	متر ــ خط‌کش
(۱cm× تعداد بند ملات) + (عرض یک آجر (cm) × تعداد کله) = طول دیوار (cm)	تعداد کله با n نمایش می‌دهند	متر ــ خط‌کش
محاسبهٔ طول دیوار در تلاقی یک‌طرفه : n ــ تعداد کله یا سرنمای آجر $\quad$ L = ۱۱n	n ــ تعداد کله	متر ــ خط‌کش
محاسبهٔ طول دیوار آزاد : L = ۱۱n−۱	n ــ تعداد کله	متر ــ خط‌کش
محاسبهٔ طول دیوار در تلاقی دوطرفه : L = ۱۱n+۱	n ــ تعداد کله	متر ــ خط‌کش
محاسبهٔ ارتفاع دیوار : H = ۶/۵n	n ــ تعداد رج	

جدول بودجه‌بندی فرآیند اجرای برنامه درسی فصل سوم

جلسه آموزشی	موضوعات و عناوین	شماره صفحه کتاب درسی	اهداف آموزشی	امکانات و تجهیزات مورد نیاز
جلسهٔ هفتم	۱ــ کلیاتی در مورد ابعاد آجر و ابعاد دیوار	۳۲ و ۳۳	+ شناخت ابعاد آجر استاندارد + رابطه ابعادی آجر با هم + تعیین طول دیوار با شمارش آجرها	آجر ــ خط کش ــ متر
	۲ــ محاسبهٔ طول دیوار در تلاقی یک طرفه	۳۳	+ تعیین طول دیواری که از یک طرف محدودیت دارد	آجر ــ خط کش ــ متر
	۳ــ محاسبهٔ طول دیوار آزاد	۳۴	+ تعیین طول دیواری که از دو طرف آزاد است	آجر ــ خط کش ــ متر
	۴ــ محاسبهٔ طول دیوار در تلاقی دوطرفه	۳۴	+ تعیین طول دیواری که از دو طرف محدودیت دارد	آجر ــ خط کش ــ متر
	۵ــ محاسبهٔ ارتفاع دیوار	۳۵	+ تعیین ارتفاع دیوار با شمارش تعداد رج‌ها	

جدول زمان‌بندی فرآیند تدریس در جلسات آموزشی

جلسه آموزشی	موضوعات و مطالب	مدت تدریس (دقیقه)	اقدامات لازم برای جلسه‌بندی	شماره صفحه کتاب
جلسه هفتم	مروری بر مطالب جلسه گذشته		تکرار مختصر مطالب جمع‌بندی شده در جلسه قبل	
	تشریح مقدمه جهت ورود به موضوع		تشریح اهمیت و ضرورت موضوع جهت ایجاد انگیزه و افزایش تمرکز دانش‌آموزان	
	تحلیل محتوای کتاب درسی		با پرورش مهارت و آموختن راه یادگیری از طریق مشارکت دانش‌آموزان سعی در انتقال مطالب شود	
	تشریح مثال‌های کتاب درسی		مثال‌ها به بحث گذاشته تا راه‌حل‌های دیگر هم مشخص شوند	
	حل مثال‌های پیشنهادی و ضروری		با هدف انگیزش و ایجاد توسعه فکری دانش‌آموز مثال‌های اضافی حل شوند	
	تشریح مطالب فوق برنامه		فعالیت‌های متناسب با موضوع تدریس شده به دانش‌آموزان واگذار شود و در جلسهٔ بعدی به بحث گذاشته شوند	
	حل تمرینات مربوط و خارج از کلاس		تمرینات کتاب و یا طراحی شده توسط معلم، با مشارکت دانش‌آموزان حل می‌شوند	
	جمع‌بندی مطالب تدریس شده		با یک نگاه کلی مطالب تدریس شده را بار دیگر جمع‌بندی تا باعث افزایش تمرکز دانش‌آموزان شود	
	ارزیابی مطالب تدریس‌شده از دانش‌آموزان		با سؤالات کوتاه از دانش‌آموزان سعی شود که تعداد بیشتری از آنها مورد ارزیابی قرار گیرند تا مطالب درسی در حافظه آنان ماندگار گردد	

جلسهٔ هفتم: محاسبهٔ ابعاد دیوار

مقدمه : یکی از فعالیت‌های مهندسی عمران، متره و برآورد است که در این بحث ابتدا اقدام به محاسبه حجم عملیات نموده و سپس براساس واحد خرید یا واحد کار هزینه‌های آن محاسبه می‌شود. دانستن تعداد آجرهای مصرفی در یک ساختمان یا دیوار از اهمیت زیادی برخوردار است، زیرا می‌توان به اندازهٔ کافی سفارش خرید داد و یا با دانستن وزن یک آجر می‌توان تُناژ حدودی آجرها را تعیین نمود. پیشنهاد می‌شود دانش‌آموزان با اندازه‌گیری آجرهای دیوار حیاط مدرسه و یا کارگاه تعیین و تفاوت ابعادی آنها با آجر استاندارد یک عملیات واقعی اجراء نمایند.

۳ـ۱ـ کلیاتی در مورد ابعاد آجر و دیوار

نماهای آجری، یکی از زیباترین نماها بی‌شمار می‌روند زیرا مواد آجر که خاک رس باشد، یک ماده طبیعی است و رنگ آن با جذب رطوبت و آب تغییر می‌یابد و همچنین یکی از رنگ‌های ملایم و بدون زمینه حساسیت‌زایی است سازگاری آن با اقلیم و میزان عایق‌بودن آن از اهمیت خاصی برخوردار است. لذا انتخاب ابعاد آجر بستگی به مدول‌های معماری دارند و ابعاد پایه‌ها، جرزها، پنجره‌ها و حتی ارتفاع ساختمان متأثر از ابعاد آجر می‌باشند.

انتخاب ابعاد آجر تابع مدول معماری، وزن آن و تناسب و زیبایی می‌باشد، وزن آجر باید به اندازه‌ای باشد که به راحتی توسط شاگرد بنا برای بنا پرتاب و بدون کش‌آمدن کتف بنا دریافت و نصب گردد.

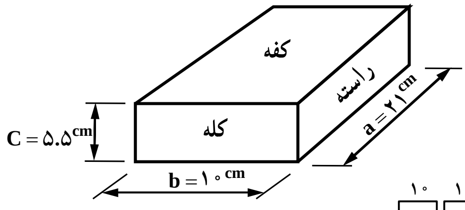
در کتاب درسی ابعاد آجر به‌صورت ۵/۵×۱۰×۲۱ سانتی‌متر پیشنهاد شده است که از اصل زیر تبعیت می‌کنند.

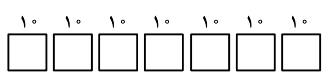
طول آجر   دو برابر عرض آجر   درز ملات به اندازه یک سانتی‌متر ⇐ a   ۲b   ۱

a   طول آجر (اندازه راسته)

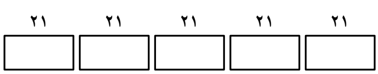
b   عرض آجر (اندازه کله)

اصطلاحات و مشخصات آجر :

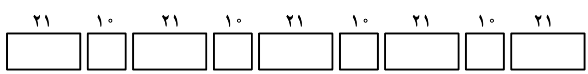




دیوارچینی با نمای کله

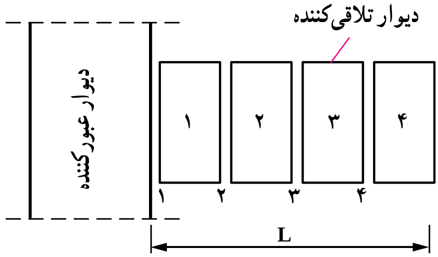


دیوارچینی با نمای راسته



۳ــ۲ــ محاسبه طول دیوار در تلاقی یک‌طرفه

برای دیوارهایی که از یک طرف با دیوار دیگر تلاقی پیدا کرده باشند، تعداد سر نما (کله) و بند عمودی مساوی دارند، رابطهٔ محاسبه طول با اندازه آجر داده شده (۲۱×۱۰×۵/۵cm) عبارت است از :



شکل ۲

n ــ تعداد کله‌ها در طول دیوار   ۱۱n   (n×۱)   (n×۱۰)   L طول دیوار کله‌چین

آموزش تکمیلی : برای درک بهتر می‌توان دانش‌آموزان را به محوطه مدرسه و یا محلی که دارای دیوار چینی آجری است دعوت نمود و از نزدیک ضمن برداشت ابعاد آجرهای استفاده شده که عموماً دارای اندازه‌های استاندارد و یکنواخت نیستند، آموزش لازم را به آنها داد. درصورتی‌که دیوار آجری در دسترس نباشد با سفارش تهیه قالب‌های چوبی با ابعاد مناسبی (فرض یک چهارم ابعاد آجر) می‌توان مثال‌های عینی جهت تسلط بیشتر دانش‌آموزان به‌کار بست.

مثال : اگر دیواری از یک طرف با دیوار دیگری تلاقی کند و دارای ۱۴ سر نما باشد، طول این دیوار چند متر است؟

۱۵۴÷۱۰۰   ۱/۵۴m   L   ۱۱×۱۴   ۱۵۴cm   L   ۱۱n

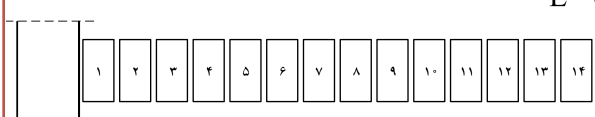
تحلیل : برای تعداد سر کله‌های کم می‌توان از روش ترسیمی بهره جست، در زیر با روش ترسیمی طول محاسبه شده است.

از شمارش نتیجه می‌شود که تعداد سرکله ۱۰ سانتی‌متری برابر ۱۴ و تعداد بندهای قائم یک سانتی‌متری برابر ۱۴ می‌باشد.

L   ۱۴×۱۰   ۱۴×۱   ۱۵۴cm

یا

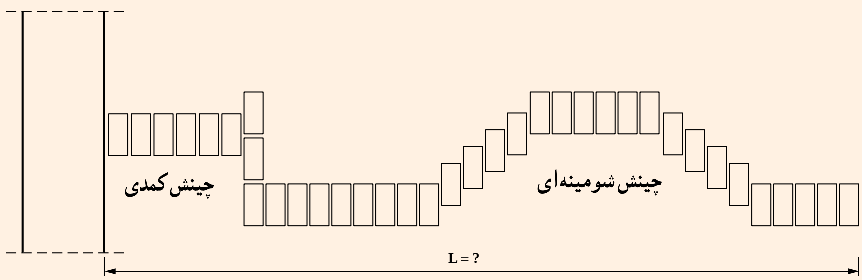
L   ۱۱n   ۱۱×۱۴   ۱۵۴cm



فعالیت

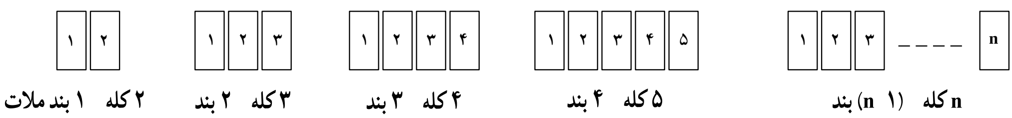
از دانش‌آموزان بخواهید چیدمان‌های جدیدی از آجرها به‌صورت کله (سرنما) روی کاغذ ترسیم و براساس ابعاد آجر پیشنهادی، طول تصویر شده آن را محاسبه نمایند.

به‌عنوان مثال، در طرح زیر طول (L) را محاسبه کنند.



۳ـ۳ـ محاسبهٔ طول دیوار آزاد

در دیوارهایی که از دو طرف آزاد هستند، همواره تعداد عرض درز ملات‌ها (بند عمودی) یکی کمتر از تعداد کله‌ها است. به شکل زیر مراجعه گردد.



طول دیواری که دارای n کله آجر است با احتساب (n ۱) بند یک سانتیمتری (بند قائم) برابر است با :

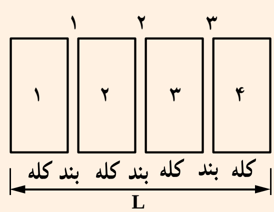
L n×۱۰ (n ۱)×۱ ۱۰n n ۱ ۱۱n ۱

نتیجه‌گیری

اندازهٔ طول دیوارهای آزادی که از دو طرف باز باشند، برابر است با :

L n×۱۰ (n ۱)×۱

L ۱۱n ۱



شکل ۳

تحلیل مثال صفحهٔ ۳۴ کتاب درسی :

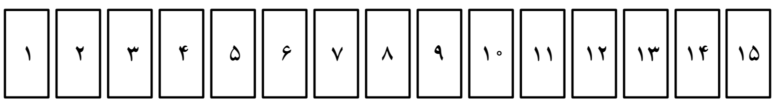
مثال : طول یک دیوار آزاد با ۱۵ سرنما چند متر است؟

L ۱۱n ۱

L ۱۱×۱۵ ۱ ۱۶۴cm

۱۶۴ ÷ ۱۰۰ ۱/۶۴m

تحلیل : از روش ترسیمی می‌توان استفاده کرد.



با شمارش به‌دست می‌آید که تعداد سرکله برابر ۱۵ عدد و مقدار بند قائم برابر ۱۴ (۱ ۱۵) بند است.

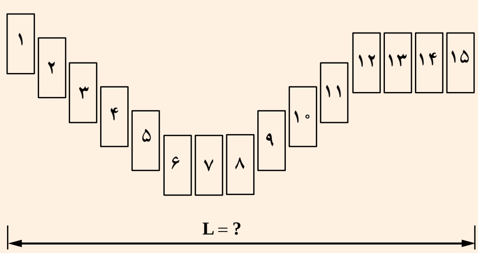
L ۱۵×۱۰ ۱۴×۱ ۱۶۴cm ۱/۶۴m

یا L ۱۱n ۱ ۱۱×۱۵ ۱ ۱۶۴cm ۱/۶۴m

فعالیت بیشتر

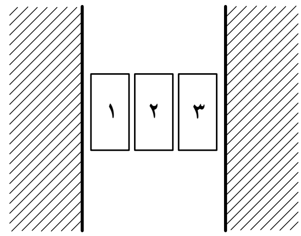
برای تسلط بیشتر می‌توان انواع مختلفی چیدمان کله‌ای را به دانش‌آموزان واگذار نمود تا با تمرین‌های بیشتر آمادگی بهتری برای درک مسائل داشته باشند.

به‌عنوان مثال، دانش‌آموزان طول‌های تصویری، نظیر مثال زیر را به‌دست آورند.

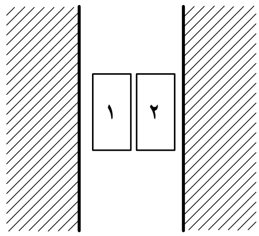


۳ـ۴ـ محاسبهٔ طول دیوار در تلاقی دوطرفه

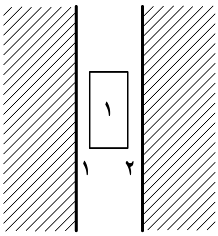
طول دیوارهایی که از دو طرف مسدود (بسته) هستند و یا با دو دیوار دیگر تلاقی می‌کنند با افزودن تعداد یک بند به تعداد کله‌ها تعیین می‌شوند. به نمونه‌های زیر توجه شود.



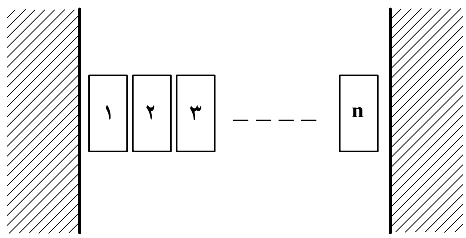
۳ کله ۴ بند



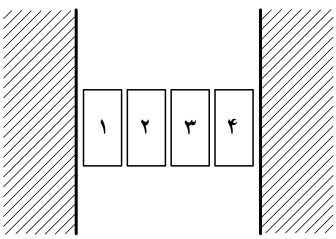
۲ کله ۳ بند



۱ کله ۲ بند



n کله (n ۱) بند

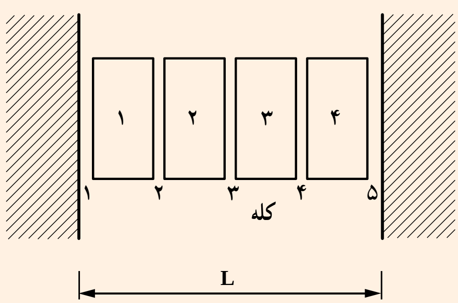


۴ کله ۵ بند

طول دیوار در تلاقی دوطرفه برای n کله L n×۱۰ (n ۱)×۱ ۱۱n ۱

نتیجه‌گیری : طول دیوار در تلاقی دو طرف

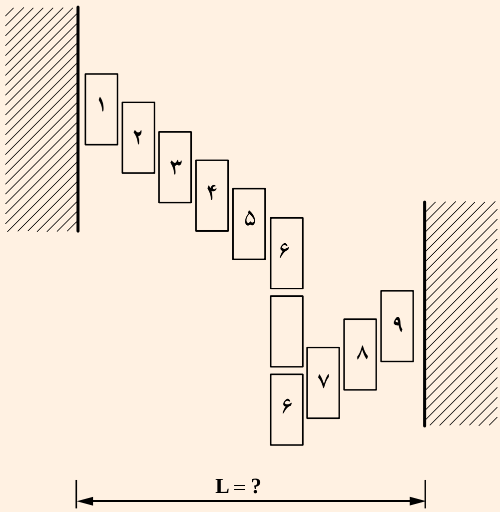
L n×۱۰ (n ۱)×۱⇒L ۱۱n ۱



شکل۴

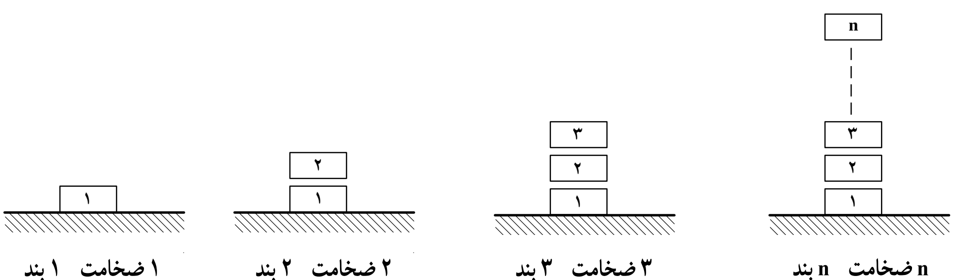
فعالیت نمونه

از دانش‌آموزان بخواهید طول تصویر نمونه‌ای از دیوار با تلاقی دوطرفه مطابق شکل را محاسبه کنند و سپس از نحوه چیدمان هم خط (هم‌محور) و چیدمان پله ای در تعیین طول نتیجه‌گیری کنند.



۳ـ۵ـ محاسبهٔ ارتفاع دیوار

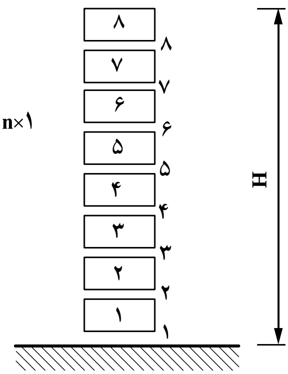
در محاسبه ارتفاع دیوار با انتهای آزاد، باید دقت داشت که تعداد ردیف‌های آجر (با ضخامت ۵/۵ سانتی‌متر) با تعداد بندهای افقی (به ضخامت یک سانتی‌متر) برابر است. به اشکال زیر توجه شود.



اگر ضخامت هر آجر ۵/۵ سانتی‌متر و ضخامت بند افقی یک سانتی‌متر باشند آنگاه برای محاسبهٔ ارتفاع دیواری که دارای n رج می‌باشد، به‌صورت زیر عمل می‌شود.

$H= n\times ۵/۵ \quad n\times ۱$

$H=۶/۵n$



شکل ۵

در شکل زیر انواع دیوارها (آزاد، تلاقی یک‌طرفه و تلاقی دوطرفه) را در حال اجرا مشاهده می‌کنید.

شکل ۶