

□ مثال: طول AB در دفعات زیر اندازه گیری شده است، مطلوب است

الف) تعیین خطای متوسط هندسی

ب) تعیین خطای ماکزیمم

ج) تعیین اندازه گیری اشتباه

۱۳۴۷/۴۷, ۱۳۴۷/۵۲, ۱۳۴۷/۴۸, ۱۳۴۷/۴۹, ۱۳۴۷/۵۳

۱۳۴۷/۹۸, ۱۳۴۷/۴۹, ۱۳۴۷/۵۲

حل: به دلیل اختلاف زیاد اندازه ۱۳۴۷.۴۸ با بقیه احتمال اشتباه در این اندازه گیری داده می شود و فعلاً از اندازه ها خارج می شود، در پایان اگر بررسی ها حاکی از مجاز بودن اندازه فوق بود مجدداً عملیات با اندازه فوق تکرار می شود و در غیر این صورت عملیات صحیح می باشد.

۱۳۴۷.۹۸ m (اندازه مشکوک) x'

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

$$= \frac{1347/47 + 1347/52 + 1347/48 + 1347/49 + 1347/53 + 1347/49 + 1347/52}{7}$$

$$x = 1347/50$$

جدول ۱-۷- مختصات نقاط

شماره	اندازه برحسب متر	$e_i = x_i - x$	e_i^2
x_1	۱۳۴۷/۴۷	-۳	۹
x_2	۱۳۴۷/۵۲	+۲	۴
x_3	۱۳۴۷/۴۸	-۲	۴
x_4	۱۳۴۷/۴۹	-۱	۱
x_5	۱۳۴۷/۵۳	+۳	۹
x_6	۱۳۴۷/۴۹	-۱	۱
x_7	۱۳۴۷/۵۲	+۲	۴
			$\sum e_i^2 = ۳۲$

(الف)
$$e_q = \pm \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{32}{7-1}} = \pm 2/3 \text{ cm}$$

(ب)
$$e_M = 2/5 e_q = 2/5 \times 2/3 = 5/8 \text{ cm}$$

(ج) برای تعیین اندازه اشتباه، تفاوت اندازه مشکوک با مقدار میانگین را تعیین و با خطای ماکزیمم مقایسه می‌کنیم این اندازه‌گیری اشتباه است.

$$48 \text{ cm} > 5/8 \text{ cm} \quad 0/48 \text{ m} \quad 1347/5 \quad 1347/98 \quad x' \times \text{(اندازه مشکوک)}$$

۱۵-۱- روش‌های مجهول‌یابی

در صفحه ۶ کتاب به روش‌های مختلفی اقدام به محاسبه طول بین دو نقطه مشخص شده است که عبارت‌اند از:

(الف) قضیه فیثاغورث

(ب) تشابه شکل‌های هندسی

(ج) نسبت‌های مثلثاتی

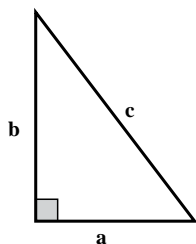
(د) قضیه سینوس‌ها

(ه) قضیه کسینوس‌ها (در کتاب استفاده نشده است).

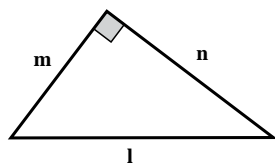
۱۵-۱-۱- محاسبه طول با استفاده از قضیه فیثاغورث:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر

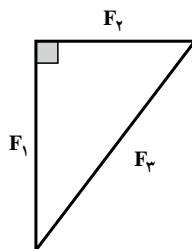
قضیه فیثاغورث فقط در مثلث‌های قائم‌الزاویه (مثلی که دو ضلع آن بر هم عمود هستند) برقرار است و وتر به ضلع روبه‌روی زاویه قائمه گویند.



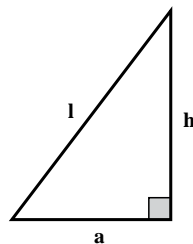
$$c^2 = a^2 + b^2$$



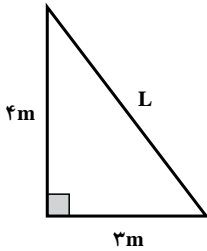
$$l^2 = m^2 + n^2$$



$$F^2 = F_1^2 + F_2^2$$



$$l^2 = a^2 + h^2$$



□ مثال ۱: در مثلث قائم الزاویه نشان داده شده اندازه وتر (L) را

تعیین کنید.

$$L^2 = 3^2 + 4^2 \quad \text{از قضیه فیثاغورث}$$

$$L = \sqrt{25} = 5 \text{ m}$$

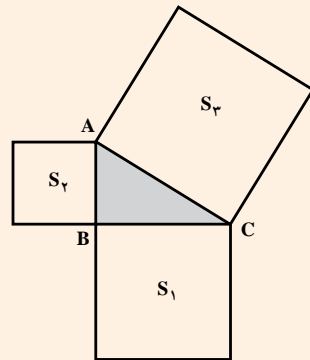
رابطه فیثاغورث: فیثاغورث دانشمند و ریاضی‌دان یونان باستان، هنگامی که بر روی مثلث قائم الزاویه بررسی می‌نمود، متوجه شد که «مساحت مربع حاصل از وتر یک مثلث قائم الزاویه برابر است با مجموع مساحت دو مربع حاصل از اضلاعی که برهم عمود هستند» این قانون بعدها به عنوان قضیه فیثاغورث شناخته شد که «در هر مثلث قائم الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع، مجذور دو ضلع زاویه قائمه».

$$S_2 = S_1 + S_3$$

$$S_2 = AC \times AC = AC^2$$

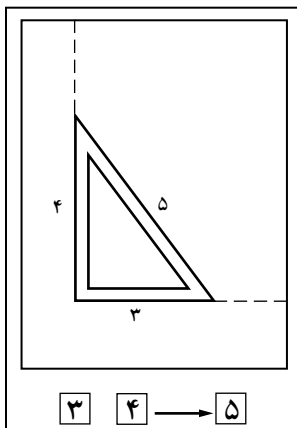
$$S_1 = AB \times AB = AB^2$$

$$S_3 = BC \times BC = BC^2$$



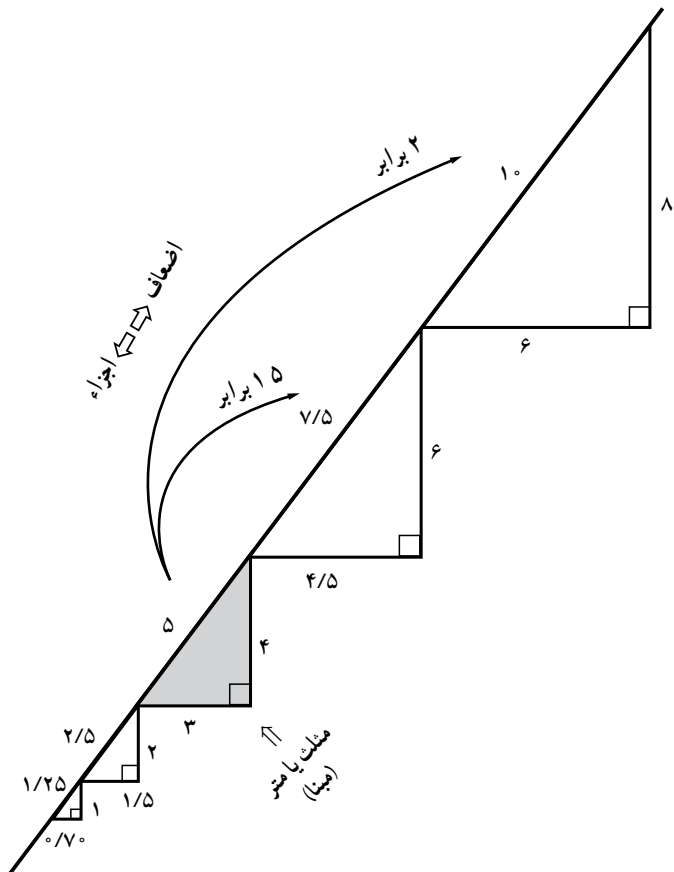
با جایگزینی داریم.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{قضیه فیثاغورث}$$



۱-۱۵-۲ ماشین حساب بنایی: بناها برای گونیا

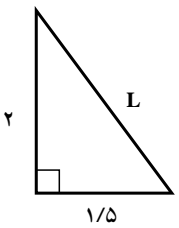
کردن گوشه‌ها از نسبت ۳ و ۴ و ۵ استفاده می‌کنند که می‌توان به سادگی اجزا و اضعاف آن را مورد استفاده قرار داد.



نتیجه: براساس مثلث مبنا می توان آن را به هر نسبتی بزرگ و یا کوچک نمود که هر سه اندازه اضلاع به همان نسبت افزایش یا کاهش می یابند. از این خاصیت برای مسائل و نسبت ها استفاده می شود.

مثال ۲: با توجه به مثلث مبنا (۳ و ۴ و ۵) طول وتر مثلث نشان

داده شده را تعیین کنید.

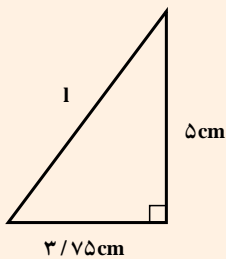


حل: با کمی دقت ملاحظه می شود که مثلث قائم الزاویه است و دو ضلع

آن $\frac{1}{5}$ اندازه های مثلث مبنا است پس طول وتر نصف مثلث مبنا می باشد.

$$L = \frac{1}{5} (2 \text{ و } 2/5) \text{ و } (1/5 \text{ و } 3) \text{ و } (4 \text{ و } 5) \Rightarrow \frac{1}{5}$$

در مثلث بنایی (۵ و ۴ و ۳)، نسبت ضلع بلندتر به ضلع کوچک‌تر (اضلاع قائمه) $\frac{4}{3} = 1/33$ می‌باشد و نسبت عکس آنها $\frac{3}{4} = 0/75$ است. پس در هر مثلث قائم‌الزاویه که نسبت اضلاع قائمه آن $1/33$ و یا $0/75$ باشند مثلث تابع ماشین حساب بنایی است و با پیدا کردن مقیاس تغییر (نسبت به مثلث پایه ۳، ۴، ۵) می‌توان سایر اضلاع موردنظر را تعیین نمود.



□ **مثال:** طول وتر مثلث نشان داده شده چند سانتی‌متر

است؟

بررسی اولیه: $\frac{3}{75} = 0/75$ یا $\frac{5}{3/75} = 1/33$

پس مثلث تابع مثلث بنایی است و چون عدد ۴ به ۵ تبدیل

شده است پس ضریب بزرگنمایی $1/25$ است.

$$(1 \text{ و } 5 \text{ و } 3/75) \quad 1/25 \text{ (} 3 \text{ و } 4 \text{ و } 5)$$

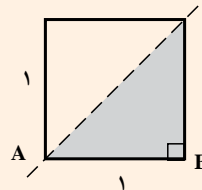
$$1 \quad 1/25 \times 5 \quad 6/25 \text{ cm}$$

ماشین حساب معماری: مبنای هندسه در معماری براساس تکثیر و توسعه مربع می‌باشد اگر اضلاع مربعی واحد فرض شود آنگاه وتر آن $\sqrt{2}$ می‌باشد آن را جمع معماری تعریف می‌کنیم.

$$AB \quad BC \quad 1$$

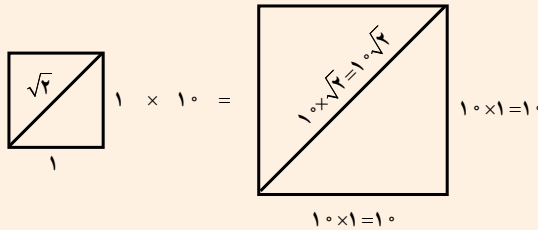
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad 1^2 + 1^2 = 2$$

$$AC = \sqrt{2}$$

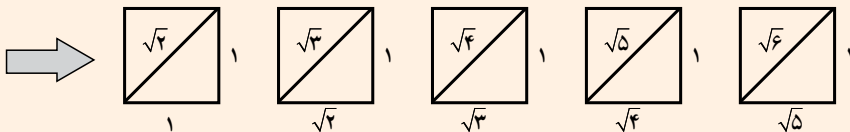


اگر مربع (مثلث حاصل از آن) نشان داده شده را n برابر بزرگ تر و یا کوچک تر نمود
 آنگاه اضلاع و وتر آن n برابر می شوند.

مثال: اگر مربع معماری را 10 برابر کنیم وتر آن چند برابر می شود.



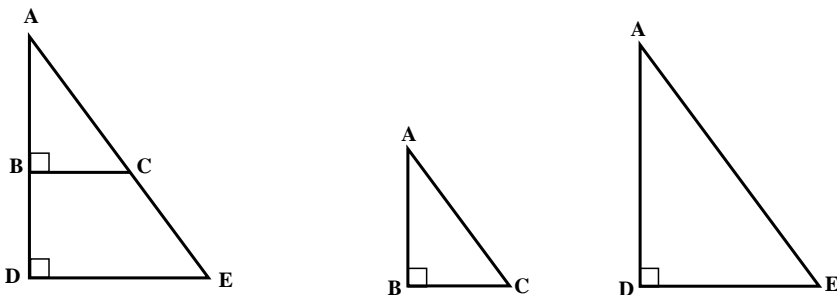
حرکت به سمت مستطیل های زیبا: در اشکال نشان داده نشده قاعده هر مستطیل
 براساس وتر قبلی شکل گرفته است که رابطه ای بین وتر آنها به صورت افزایشی وجود دارد.



۱۶- محاسبه طول با استفاده از نسبت تشابه شکل های هندسی

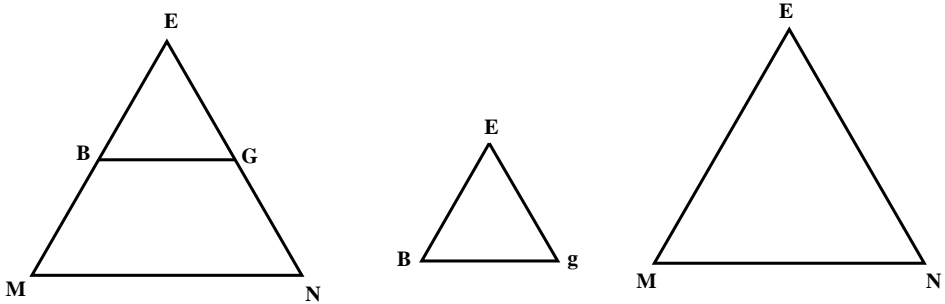
تعریف نسبت تشابه: اگر دو مثلث با هم متشابه باشد، نسبت بین اضلاع مثلث های متشابه با

هم برابر می باشد. دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ADE$ با هم متشابه هستند.

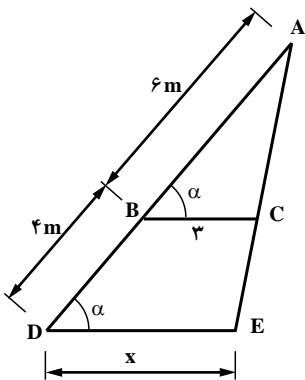


$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

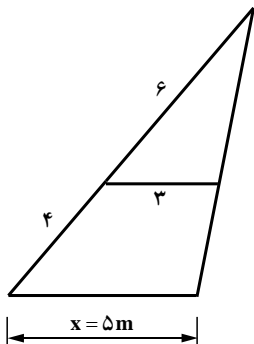
در شکل زیر اگر Bg موازی mn باشد دو مثلث $\triangle BEG$ و $\triangle EMN$ با هم متشابه می‌باشند.



$$\frac{BE}{ME} = \frac{EG}{EN} = \frac{BG}{MN} \Rightarrow \triangle_{EBg} \sim \triangle_{EMN}$$



روش ترسیمی



مثال ۱: در مثلث نشان داده شده اگر اضلاع BC و DE موازی باشند از طریق ترسیمی اندازه ضلع مجهول (X) را تعیین و سپس نتیجه را با نسبت تشابه شکل‌های هندسی کنترل نمایند.

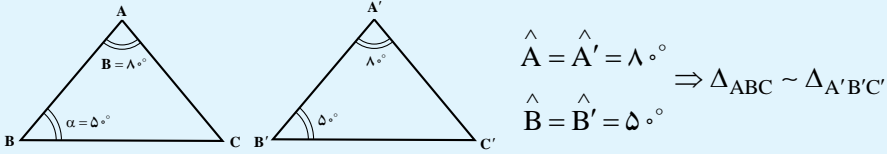
روش تشابه هندسی

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

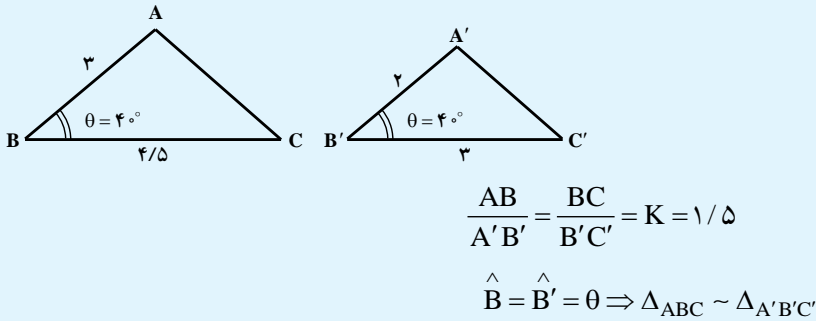
$$\frac{6}{6+4} = \frac{3}{X} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{3}{X} \Rightarrow X = \frac{3 \times 10}{6} = 5m$$

یادآوری از حالات تشابه دو مثلث

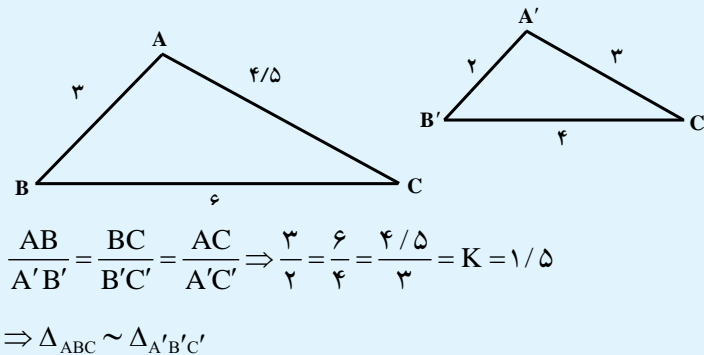
۱- هرگاه در دو مثلث، دو زاویه از یکی با دو زاویه از دیگری برابر باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند و تشابه به حالت تساوی دو زاویه گویند.



۲- هرگاه در دو مثلث، دو ضلع از یک مثلث، با دو ضلع از دیگر نسبت برابر داشته باشند و زاویه بین آن اضلاع در دو مثلث با هم برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند و تشابه به حالت دو ضلع متناسب و زاویه مساوی بین، گویند.

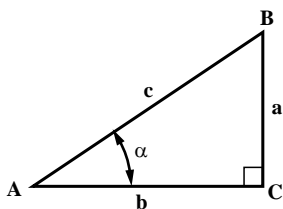


۳- هرگاه در دو مثلث، سه ضلع از یکی با سه ضلع از دیگری متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند و تشابه به حالت سه ضلع متناسب گویند.



۱۷-۱- محاسبه طول با استفاده از روابط مثلثاتی (نسبت‌های مثلثاتی)

با تعریف روابط مثلثاتی برای یک مثلث قائم‌الزاویه به شرح زیر می‌توان به نسبت‌هایی جهت حل مثلث قائم‌الزاویه دست یافت.



$$\sin = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \quad \text{۱- تعریف سینوس :}$$

$$\cos = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \quad \text{۲- تعریف کسینوس :}$$

$$\text{tg} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \quad \text{۳- تعریف تانژانت :}$$

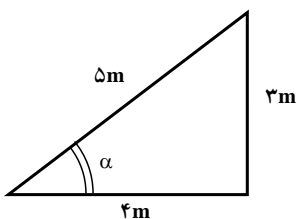
$$\text{cotg} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} \quad \text{۴- تعریف کتانژانت :}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$$



□ **مثال ۱:** نسبت‌های مثلثاتی برای مثلث نشان داده شده را تعیین کنید.

حل: با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی داریم:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0/6$$

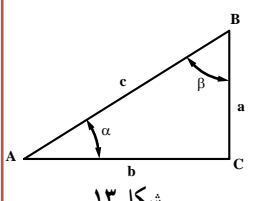
$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0/8$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0/75$$

$$\text{cotg} \alpha = \frac{4}{3} = 1/33$$

تحلیل مثال صفحه ۱۲ کتاب درسی :

مثال : در مثلث قائم الزاویه ABC شکل ۱۳، روابط اصلی مثلثاتی برای زاویه α چنین تعریف می شود :



$\sin \alpha = \frac{a}{c}$	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$	$\operatorname{cot} \alpha = \frac{b}{a}$
-----------------------------	-----------------------------	--	---

تحلیل مثال : با توجه به قائمه بودن زاویه C می توان از نسبت های مثلثاتی استفاده نمود و به سادگی می توان برای نسبت $\operatorname{tg} \alpha$ و $\operatorname{cot} \alpha$ به صورت زیر عمل نمود.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{cot} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a}$$

حل تمرین صفحه ۱۲ کتاب درسی :

تمرین : در مثلث قائم الزاویه ABC شکل ۱۳، روابط اصلی مثلثاتی را برای زاویه β در جدول بنویسید.

$\sin \beta = \text{---}$	$\cos \beta = \text{---}$	$\operatorname{tg} \beta = \text{---}$	$\operatorname{cot} \beta = \text{---}$
---------------------------	---------------------------	--	---

حل تمرین : با توجه به مثلث نشان داده شده.

$$\begin{array}{lll} \sin \beta = \frac{b}{c} & \cos \beta = \frac{a}{c} & \text{ب ضلع مقابل زاویه B} \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} & \operatorname{cot} \beta = \frac{a}{b} & \text{ب ضلع مجاور زاویه B} \\ & & \text{وتر c} \end{array}$$

در زیر جدول نسبت‌های مهم‌ترین زوایا داده شده است که ضرورت دارد، دانش‌آموزان نسبت به حفظ آنها و سپردن به حافظه اهتمام ورزند.

روش تنظیم جدول:

برای سینوس: مخرج ثابت و برابر ۲ و صورت زیر رادیکال و افزایشی از صفر تا ۴
 برای کسینوس: مخرج ثابت و برابر ۲ و صورت زیر رادیکال کاهشی از ۴ تا صفر
 برای تانژانت: از حاصل تقسیم نسبت سینوس به کسینوس
 برای کتانژانت: از حاصل تقسیم نسبت کسینوس به سینوس

جدول ۸-۱

نسبت مثلثاتی \ زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
sin α	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos α	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
tga		$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده = $\frac{1}{0}$
cotg α	تعریف نشده = $\frac{1}{0}$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	

یادآوری

۱- تأثیر رادیکال

$$\sqrt{0} = 0$$

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{4} = 2$$

۲- حاصل تقسیم

$$\frac{0}{\text{عدد}} = 0$$

$$\frac{\text{عدد}}{0} = \infty \text{ تعریف نشده یا مبهم}$$

۳- گویا کردن: اگر در مخرج کسری عبارت رادیکالی وجود داشته باشد با ضرب کردن

عبارت رادیکالی در صورت و مخرج کسر، مخرج گویا می‌شود، به‌عنوان مثال:

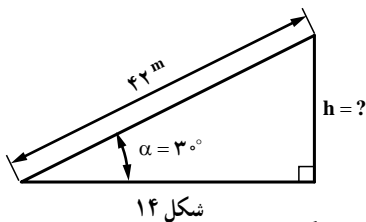
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴- برای نسبت‌های مثلثاتی $\cot \alpha$ ، $\operatorname{tg} \alpha$ به‌صورت زیر عمل می‌شود.

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

تحلیل مثال‌های حل شده صفحه ۱۳ کتاب درسی:



مثال ۱: در شکل ۱۴ ارتفاع h را محاسبه

می‌کنیم:

برای شکل موردنظر از رابطه سینوس استفاده

می‌نماییم (دلیل آن را توضیح دهید).

$$\sin \alpha = \frac{h}{42}$$

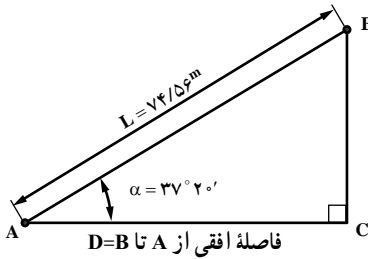
$$\sin 30^\circ = \frac{h}{42 \text{ متر}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{42 \text{ متر}} \quad h = \frac{42 \times 1}{2} = 21 \text{ متر}$$

تحلیل مثال ۱: از نسبت‌های مثلثاتی برای حالتی که یک زاویه و یک ضلع داشته

باشیم به‌سادگی قابل تعمیم جهت تعیین سایر اضلاع و یا از روی اضلاع جهت تعیین زوایا به‌کار

برده می‌شود و استفاده از نوع نسبت مثلثاتی بستگی به معلومات و مجهولات موردنظر دارد.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\text{وتر}} \Rightarrow h = \operatorname{tg} \alpha \times \text{وتر}$$



فاصله افقی از A تا B تا D

شکل ۱۵

مثال ۲: طول شیب دار AB را $74/56\text{m}$ در روی زمین اندازه گیری کرده ایم. در صورتی که زاویه شیب $37^\circ 20'$ باشد، فاصله افقی بین A و B چند متر است؟

حل: با توجه به شکل ۱۵ داریم: $\cos \alpha = \frac{D}{L}$

بنابراین داریم:

$$D = L \cdot \cos \alpha$$

با استفاده از جدول های مثلثاتی انتهای کتاب داریم:

$$\cos \alpha = \cos 37^\circ 20' = 0.7951$$

با جای گذاری آنها در فرمول داریم:

$$D = 74/56 \text{ m} \times 0.7951 = 59/28 \text{ m}$$



تحلیل مثال ۲: پس از تبدیل زاویه بر حسب درجه از طریق جداول کتاب و یا ماشین

حساب از نسبت مثلثاتی کسینوس ها استفاده می شود.

$$\alpha = 37 + \frac{20}{60} + \frac{0}{3600} = 37.3333$$

$$\cos \alpha = \cos (37^\circ \text{ و } 20') = 0.795121$$

$$\cos \alpha = \frac{D}{L} \quad D = L \times \cos \alpha$$

$$D = 74/56 \times 0.795121 = 59/28 \text{ m}$$

نحوه تبدیل درجه به دقیقه و ثانیه با استفاده از ماشین حساب برای 37° و $20'$ و $0''$ در ماشین حساب های CASIO دکمه ای وجود دارد که وظیفه تبدیل به درجه اعشاری و یا درجه، دقیقه و ثانیه دارد.

تبدیل به درجه، دقیقه و ثانیه 37° و $20'$ و $0''$

تبدیل به اعشار 37.3333 ← shift 37° و $20'$ و $0''$

درجه (D): $\frac{1}{360}$ پیرامون دایره را یک درجه و $\frac{1}{60}$ درجه را دقیقه و $\frac{1}{6}$ دقیقه را ثانیه گویند که با علامت " و ' و نمایش داده می‌شود.

گراد (G): $\frac{1}{400}$ پیرامون دایره را یک گراد و $\frac{1}{100}$ گراد را سانتی‌گراد (دقیقه گرادی) و $\frac{1}{10000}$ سانتی‌گراد را ثانیه گرادی گفته می‌شود که با علامت " و ' و G نمایش داده می‌شود.

رادیان (R): $\frac{1}{2\pi}$ پیرامون دایره را یک رادیان گویند و هر رادیان زاویه‌ای در حدود $44/9''$ و $17'$ و $57''$ یا $19/7''$ و $66'$ و 63^G می‌باشد.

مثال: زاویه $57/29577951$ را بر حسب درجه و دقیقه و ثانیه تبدیل کنید.

$$57/29577951 \times 60 = 57 \text{ و } 29577951/29577951 \times 60$$

$$57 \text{ و } 17/74677077$$

$$57 \text{ و } 17' \text{ و } 74677077/29577951 \times 60$$

$$57 \text{ و } 17' \text{ و } 44/81''$$

مثال: $24/9''$ و $42'$ و 14 را بر حسب درجه بیان کنید.

$$14 \text{ و } 42' \text{ و } 24/9'' = 14 + \frac{42}{60} + \frac{24/9}{3600} = 14/70691667^\circ$$

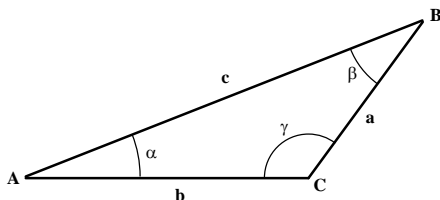
تبدیل زوایا از تناسب زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

۱۸- محاسبه طول با استفاده از قضیه سینوس‌ها

در هر مثلث غیر مشخص رابطه زیر برقرار است.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

«در مثلث غیر مشخص، نسبت هر ضلع به

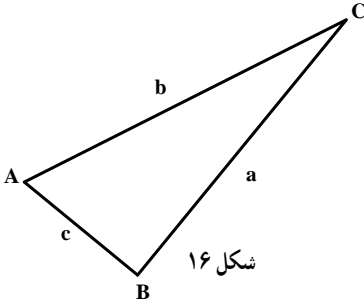
سینوس زاویه مقابلش ثابت و برابر است با قطر دایره محیطی آن مثلث»

تحلیل مثال‌های صفحه ۱۵ کتاب درسی :

مثال ۱: در مثلث ABC (شکل ۱۶)، طول $a = 45\text{m}$ و $\hat{A} = 37^\circ$ و $\hat{B} = 118^\circ$

است. طول b چند متر است؟

حل: رابطه سینوس‌ها را می‌نویسیم :



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{45\text{m}}{\sin 37^\circ} = \frac{b}{\sin 118^\circ}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sin 118^\circ}{\sin 37^\circ} \times 45\text{m} = \frac{0.813}{0.6018} \times 45\text{m}$$

$$b = 66.02\text{m}$$

تحلیل مثال ۱: در مثلث غیرمستقیم به واسطه بسته شدن مثلث و تشکیل سه

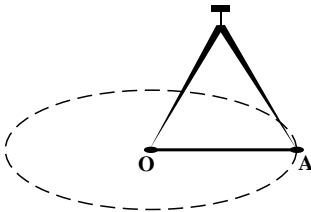
ضلعی باید :

- ۱- و تراز تفاضل دو ضلع دیگر بیشتر باشد.
- ۲- و تراز مجموع دو ضلع دیگر کمتر باشد.
- ۳- مجموع زوایای داخلی آن 180° درجه می‌باشد.
- ۴- شعاع دایره محیطی مثلث به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{45}{\sin 37^\circ} = 2R \quad R = 37.39\text{m}$$

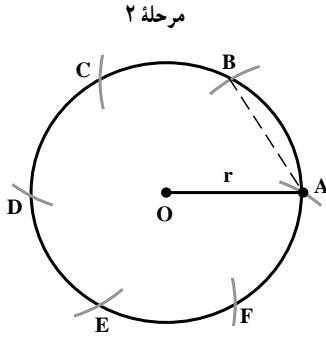
۱-۱۹- محیط دایره

مرحله ۱



مرحله ۱: برای ترسیم یک دایره کافی است پرگاری را

آماده نموده و دهانه آن را به اندازه مناسب باز کنید. آنگاه سوزن پرگار را در نقطه O و مداد آن روی نقطه‌ای نظیر A قرار دهید. بدیهی است که فاصله OA دهانه پرگار و شعاع دایره‌ای است که می‌خواهید ترسیم نمایید.



مرحله ۲: پس از ترسیم دایره به شعاع OA، بدون تغییر در اندازه دهانه پرگار، سوزن آن را بر روی محیط دایره و در نقطه A گذاشته و با همان شعاع قبلی کمانی روی محیط دایره (نقطه B) ترسیم می‌نمائیم و مجدداً با نصب سوزن پرگار در نقطه C را ایجاد می‌نمائیم همان طوری که ملاحظه می‌شود محیط دایره حدوداً ۶ برابر شعاع آن است.

$$U > 6r \text{ (محیط دایره)}$$

با کمی دقت ملاحظه می‌شود که طول‌های مستقیم بین نقاط A و B و ... و F برابر $6r$ است در حالی که به دلیل طول کمان محیط دایره بین نقاط A و B و ... و F، طول واقعی محیط از $6r$ بیشتر است. از طریق انتگرال‌گیری می‌توان ثابت کرد که محیط واقعی دایره برابر است با:

r شعاع دایره

D قطر دایره

$$U = 2\pi r = \pi \cdot D$$

فعالیت

ساخت یک نوار متریک انعطاف‌پذیر جهت اندازه‌گیری محیط اجسام گرد.

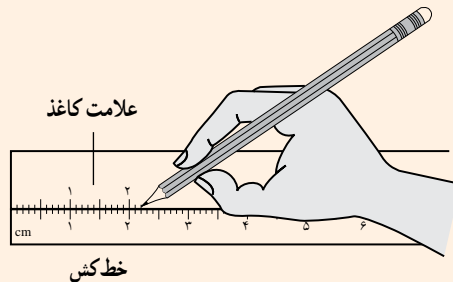
مواد لازم: نوار لاستیکی یا نوار کاغذی بریده شده

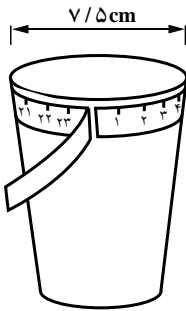
قیچی

خودکار

روش عمل: نوار کاغذی به عرض $1/5$ سانتی‌متر و طول 28 سانتی‌متر برش

داده و سپس با تنظیم در لبه یک خط‌کش اندازه‌ها را روی آن منتقل می‌کنیم.





بحث کنید: در یک اندازه‌گیری مطابق شکل، قطر دهانه لیوان $7/5$ سانتی‌متر اندازه‌گیری شد و متر کاغذی محیط دهانه لیوان را $23/6$ سانتی‌متر نشان داد مطلوب است تعیین عدد π .

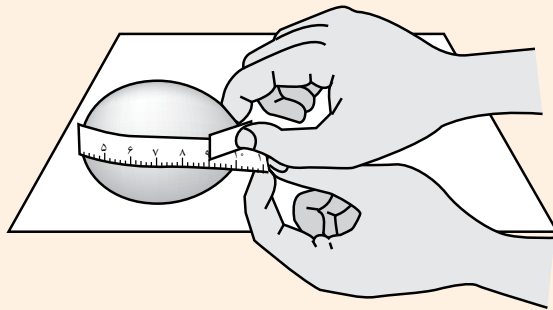
$$u = \pi \cdot D$$

$$23/6 = \pi \times 7/5$$

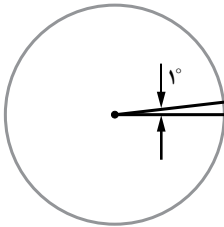
$$\pi = \frac{23/6}{7/5} = 3/14$$

بیشتر بدانید

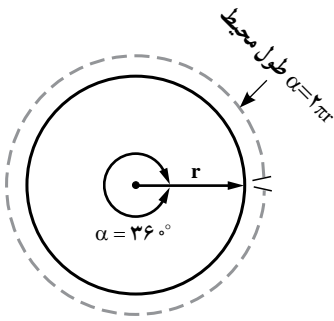
کوچک‌ترین تخم پرنده مربوط به مرغ مگس‌خوار گل‌ماهور جامائیکاست. دور تا دور این تخم مرغ $9/9$ میلی‌متر طول دارد.



۱-۲۰- طول قوس قطاعی از دایره با زاویه مرکزی α (بر حسب درجه)



در دایره مقابل محیط کلی دایره برای 360° درجه چرخش برابر است با $2\pi R$ است. اگر زاویه کامل دایره نصف شود. آنگاه طول محیط نصف و اگر زاویه یک چهارم شود. طول محیط هم یک چهارم می‌شود پس طول و محیط روبروی زاویه یک درجه $\frac{1}{360}$ طول محیط دایره می‌باشد. لذا تناسب حاصل که از نوع مستقیم است، می‌تواند رابطه کلی برای طول کمان به صورت صفحه بعد ثابت نماید.



زاویه

36°

کشش

α

طول کمان

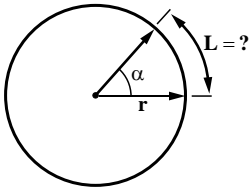
$2\pi r$

کشش

L

$$L = 2\pi r \times \frac{\alpha}{36^\circ}$$

طول کمان روبه روی زاویه مرکزی α



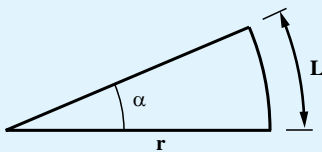
اگر $\alpha = 36^\circ \Rightarrow L = 2\pi r \times \frac{36^\circ}{36^\circ} = 2\pi r$ کنترل رابطه حاصل شده

اگر $\alpha = 0^\circ \Rightarrow L = 2\pi r \times \frac{0^\circ}{36^\circ} = 0$

اگر $\alpha = 18^\circ \Rightarrow L = 2\pi r \times \frac{18^\circ}{36^\circ} = \pi r$

اگر $\alpha = 9^\circ \Rightarrow L = 2\pi r \times \frac{9^\circ}{36^\circ} = \frac{\pi r}{2}$

پناه آوری و دانش انجلی

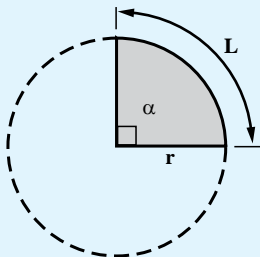


اگر زاویه مرکزی بر حسب رادیان باشد
آنگاه از رابطه زیر طول کمان به دست می آید.

$$L = \alpha \cdot r$$

r شعاع کمان

α زاویه بر حسب رادیان



مثال: طول کمان نشان داده شده را از دو رابطه (درجه و رادیان) بیان شده تعیین و اختلاف آنها را بیان کنید.

الف) محاسبه طول کمان بر حسب درجه :

$$\alpha = 90^\circ \quad L = 2\pi r \times \frac{\alpha}{360^\circ} = 2\pi r \times \frac{90^\circ}{360^\circ}$$

$$\boxed{L = \frac{\pi r}{2}}$$

ب) محاسبه طول کمان بر حسب رادیان :

$$\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \Rightarrow L = \alpha \cdot r$$

$$L = \frac{\pi}{2} \cdot r = \frac{\pi r}{2}$$

$$\boxed{L = \frac{\pi r}{2}}$$

ج) از طریق محاسبه یک چهارم محیط دایره می توان رأساً اقدام نمود.

$$L = \frac{u}{4} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2} \quad \text{ربع دایره} \quad u = 2\pi r \quad \text{دایره کامل}$$