

# آموزه هشتم

## تمرین‌های دوره‌ای

## آموزه نهم

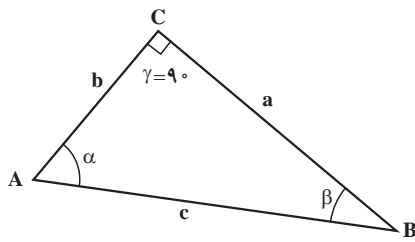
هدف‌های رفتاری را روی تخته بنویسید.

هدف‌های رفتاری: هنرجو با یادگیری این آموزه می‌تواند:

- قضیه اول فیثاغورث را توضیح دهد و مسائل مربوط به آن را حل کند.
- قضیه دوم فیثاغورث را توضیح دهد و مسائل مربوط به آن را حل کند.
- قضیه تالس را توضیح دهد و مسائل مربوط به آن را حل کند.

### ۹-۱- اشکال هندسی، زوایا، مباحث عمومی هندسه

قضیه فیثاغورث (صفحه ۴۰)



شکل ۹-۱ (شکل ۲-۹ کتاب)

شکل ۹-۱ را روی تخته رسم نماید و توضیح دهد گوشه‌های مثلث را بیشتر با حروف بزرگ A, B, C و اضلاع مثلث را با حروف کوچک a, b, c و زوایای مثلث را با  $\alpha, \beta, \gamma$  مشخص می‌نمایند.

توضیح دهید: «اگر مساحت مربعی که یک ضلع آن a باشد با مساحت مربعی که یک ضلع آن b است جمع شود، حاصل جمع برابر مساحت مربعی می‌شود که ضلع آن برابر c است و رابطه زیر بین اضلاع آن سه مربع برقرار است:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه شکل ۹-۲، دو ضلع مجاور زاویه قائمه به ترتیب

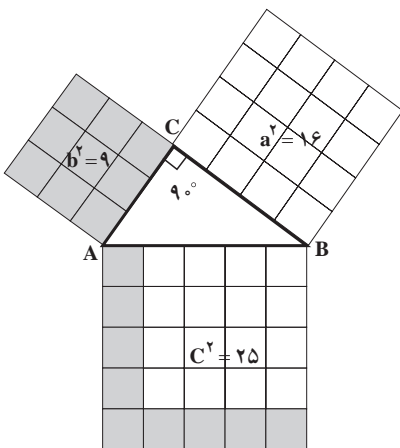
$a=4$  و  $b=3$ . اندازه وتر آن مثلث را به دست آورید.

پاسخ: اندازه وتر آن (c)، با توجه به شکل ۹-۲، مشخص می‌گردد که

مساحت مربع ضلع c برابر مساحت مربع ضلع a است، به علاوه مساحت مربع ضلع b.

برای نشان دادن درستی این موضوع، از هنرجویان خواسته شود تعداد

مربع‌های کوچک داخل هر ضلع را در شکل ۹-۲ بشمارند.



شکل ۹-۲ (شکل ۲-۱۰ کتاب)

### ۹-۱-۱- قضیه اول فیثاغورث:

قضیه اول فیثاغورث را روی تخته بنویسید.

پاسخ: در هر مثلث راست گوشه، مربع وتر با مجموع مربع دو ضلع دیگر برابر است.

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = c^2 - b^2 \\ b^2 = c^2 - a^2 \end{cases} \quad \text{روی تخته بنویسید :}$$

مثال (صفحه ۴۱ کتاب): در یک مثلث قائم الزاویه (راست گوشه)، ضلع مجاور به زاویه راست  $a = ۸۵$  میلی متر و وتر آن

$c = ۱۶۰$  میلی متر است. حساب کنید :

(الف) ضلع سوم (b)

(ب) مساحت مثلث بر حسب سانتی متر مربع

پاسخ :

(الف) طول سوم (b)

پاسخ : داریم

$$\begin{array}{lll} a = ۸۵ \text{ mm} & c^2 = a^2 + b^2 & b^2 = ۳۲۸۲۵ \\ c = ۱۶۰ \text{ mm} & ۱۶۰^2 = ۸۵^2 + b^2 & b = \sqrt{۳۲۸۲۵} \\ b = ? & & \boxed{b = ۱۳۵ \text{ mm}} \end{array}$$

(ب) مساحت مثلث بر حسب سانتی متر مربع

$$\begin{array}{ll} g = b = ۱۳۵ \text{ mm} = ۱۳/۵ \text{ cm} & A = \frac{g \cdot h}{۲} \\ h = a = ۸۵ \text{ mm} = ۸/۵ \text{ cm} & A = \frac{۱۳/۵ \times ۸/۵}{۲} = ۵۷/۳۵ \text{ cm}^2 \\ A = ? \text{ cm}^2 & \end{array}$$

تمرین : در مثلث قائم الزاویه ای که ضلع های مجاور به زاویه قائمه آن به ترتیب  $a = ۹$  mm و  $b = ۱۲$  mm است طول وتر و

مساحت آن را بر حسب سانتی متر مربع محاسبه نمایید.

پاسخ :

طول وتر :

$$\begin{array}{ll} a = ۹ \text{ mm} & c^2 = a^2 + b^2 \\ b = ۱۲ \text{ mm} & c = \sqrt{۹^2 + ۱۲^2} \\ c = ? & \\ A = ? \text{ cm}^2 & c = ۱۵ \text{ mm} \end{array}$$

مساحت مثلث :

$$\begin{array}{ll} g = b = ۱۲ \text{ mm} = ۱/۲ \text{ cm} & A = \frac{g \cdot h}{۲} \\ h = a = ۹ \text{ mm} = ۰/۹ \text{ cm} & A = \frac{۱/۲ \times ۰/۹}{۲} = ۰/۵۴ \text{ cm}^2 \end{array}$$

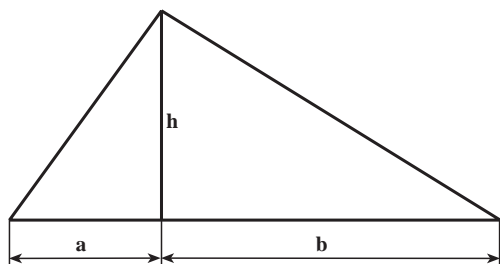
کار در خانه : طول ضلع مثلث قائم الزاویه ای را که وتر آن ۳۵ میلی متر و ارتفاع آن ۲۱ میلی متر است، محاسبه نمایید.

پاسخ:

ارتفاع = a      c = ۳۵ mm

قاعده = b      a = ۲۱ mm       $b^2 = c^2 - a^2$

وتر = c      b = ?       $b = \sqrt{35^2 - 21^2} = 28 \text{ mm}$



$$h^2 = a \cdot b$$

شکل ۳-۹ (شکل ۲-۱۲ کتاب)

۲-۱-۹ قضیه دوم فیثاغورث:

شکل ۲-۱۲ را روی تخته رسم کنید.

توضیح دهید: در هر مثلث راست گوشه ارتفاع وارد بر وتر واسطه

هندسی بین دو قطعه تقسیم شده وتر است.

رابطه زیر را روی تخته بنویسید.

$$h^2 = a \cdot b$$

که در آن h ارتفاع وارد بر وتر است.

اشتباه رایج: برخی از هنرجویان در این رابطه می‌پندارند a و b دو

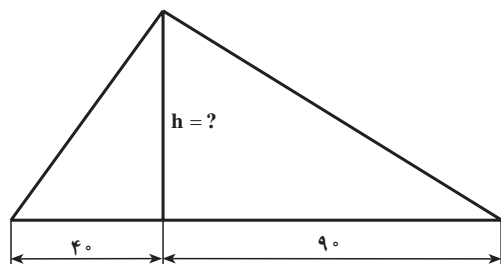
ضلع مثلث است. برای جلوگیری از این اشتباه شاید بهتر باشد این رابطه را

به روش زیر بنویسید.  $h^2 = c_1 \times c_2$ 

مثال (صفحه ۴۲ کتاب): در مثلث راست گوشه شکل ۲-۱۳ ارتفاع وارد بر وتر (h) را حساب کنید.

پاسخ:

شکل ۲-۱۳ کتاب را روی تخته رسم و عدد گذاری کنید.



شکل ۴-۹ (شکل ۲-۱۳ کتاب)

$$a = 40 \text{ mm} \quad h^2 = a \cdot b \quad h = \sqrt{40 \times 90}$$

$$b = 90 \text{ mm} \quad h = \sqrt{a \cdot b} \quad h = \sqrt{3600}$$

$$h = ? \quad h = 60 \text{ mm}$$

تمرین: در مثلث راست گوشه شکل ۲-۱۴ مقادیر h و

b = ۳۰ mm است، مقدار a را به دست آورید.

پاسخ:

h = ۵۰ mm

b = ۳۰ mm

a = ?

$$h^2 = a \cdot b$$

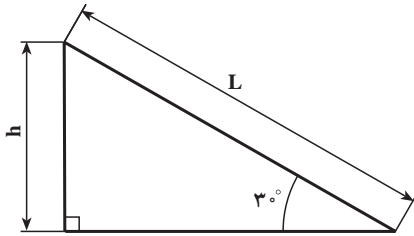
$$a = \frac{h^2}{b}$$

$$a = \frac{50^2}{30} = \frac{2500}{30}$$

$$a = 83 \text{ mm}$$

۹-۲- قضیه تالس (صفحه ۴۲)

شکل ۱۴-۲ (صفحه ۴۲) را روی تخته رسم کند.



$$h = \frac{1}{2}L$$

شکل ۵-۹ (شکل ۱۴-۲ کتاب)

بنویسید و توضیح دهید:

قضیه تالس: در هر مثلث راست گوشه ضلع روبه روی زاویه  $30^\circ$  نصف وتر است.

$$h = \frac{1}{2}L$$

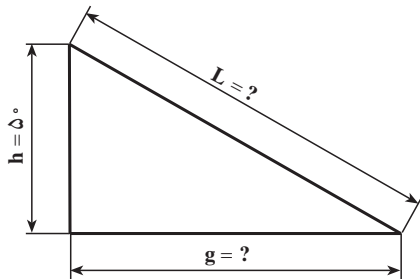
که در آن

L- وتر مثلث قائم الزاویه

h- ضلع مقابل به زاویه  $30^\circ$

مثال (مثال دوم صفحه ۴۲): طول ضلع g را در شکل ۱۵-۲ محاسبه

کنید.



شکل ۶-۹ (شکل ۱۵-۲ کتاب)

L- وتر مثلث راست گوشه

h- ضلع روبه روی زاویه  $30^\circ$  درجه

پاسخ:

توضیح دهید: پاسخ این مسئله را می توانیم از رابطه تالس و فیثاغورث به

دست آوریم. ابتدا اندازه ضلع L را به دست می آوریم.

$$h = 50 \text{ mm}$$

$$L = ?$$

$$g = ?$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$L = 100$$

$$b = 50$$

$$h = \frac{1}{2}L$$

$$L = 2 \times h$$

$$g^2 = L^2 - h^2$$

$$g = \sqrt{L^2 - h^2}$$

$$L = 2 \times 50 = 100 \text{ mm}$$

سپس با قضیه اول فیثاغورث اندازه g را به دست آورید.

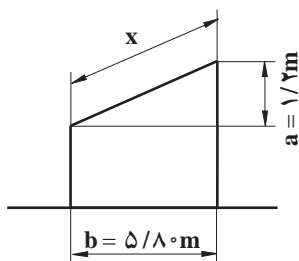
$$g = \sqrt{100^2 - 50^2}$$

$$g = \sqrt{7500} \Rightarrow g = 86/6$$

مثال را به ترتیب زیر، همراه با توضیح دادن، روی تخته حل نماید.

مثال (صفحه ۴۳ کتاب): برای ساخت سقف گاراژی اندازه x مورد نیاز است. با توجه

به ابعاد داده شده، اندازه آن را به دست آورید.



شکل ۷-۹ (شکل ۱۶-۲ کتاب)

پاسخ:

توضیح دهید: اگر بخش بالایی شکل ۱۶-۲ را بررسی کنید در آن مثلثی می بینید که ضلع قاعده آن  $b = 5/8$  m و ارتفاع آن  $a = 1/2$  m است. چون این مثلث راست گوشه است، بنابراین برای به دست آوردن پاسخ می توانید رابطه اول فیثاغورث را به کار ببرید.

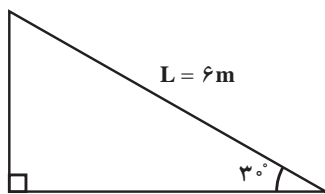
$$a = 1/2 \text{ m} \quad x^2 = a^2 + b^2 \quad x = \sqrt{1/2^2 + 5/8^2} \quad x = \boxed{5/92 \text{ m}}$$

$$b = 5/8 \text{ m} \quad x = \sqrt{a^2 + b^2} \quad x = \sqrt{35/0.8}$$

$$x = ?$$

تمرین: اگر در مثلث راست گوشه ای مانند شکل ۱۴-۲  $L = 6$  m باشد

محیط این مثلث چند متر است؟



شکل ۸-۹

پاسخ: برای محاسبه محیط مثلث باید اندازه هر سه ضلع را به دست آورید. از رابطه تالس خواهیم داشت:

$$L = 6 \text{ m} \quad h = \frac{1}{2}c$$

$$\angle \alpha = 30^\circ \quad h = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ m}$$

$$b = ?$$

$$h = ? \quad \text{ضلع روبرو به زاویه } 30^\circ \text{ درجه}$$

توضیح دهید: برای محاسبه قاعده مثلث قضیه اول فیثاغورث به کار برده می شود.

$$L = 6 \text{ m} \quad b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{محیط مثلث برابر خواهد بود}$$

$$h = 3 \text{ m} \quad g^2 = L^2 - h^2 \quad u = L + h + g$$

$$g = \text{قاعده مثلث?} \quad g = \sqrt{L^2 - h^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} \quad u = 6 + 3 + 5 = 14 \text{ m}$$

$$g = \sqrt{25} = 5 \text{ m}$$

## آموزه دهم

هدف‌های رفتاری را روی تخته بنویسید.

هدف‌های رفتاری: هنرجو با یادگیری این آموزه می‌تواند:

- روابط مثلثاتی را توضیح دهد.
- روابط بین زوایا را توضیح دهد.
- روابط بین زوایا و اضلاع در مثلث راست گوشه را توضیح دهد.

### ۱-۱- روابط مثلثاتی (۳-۲ صفحه ۴۴)

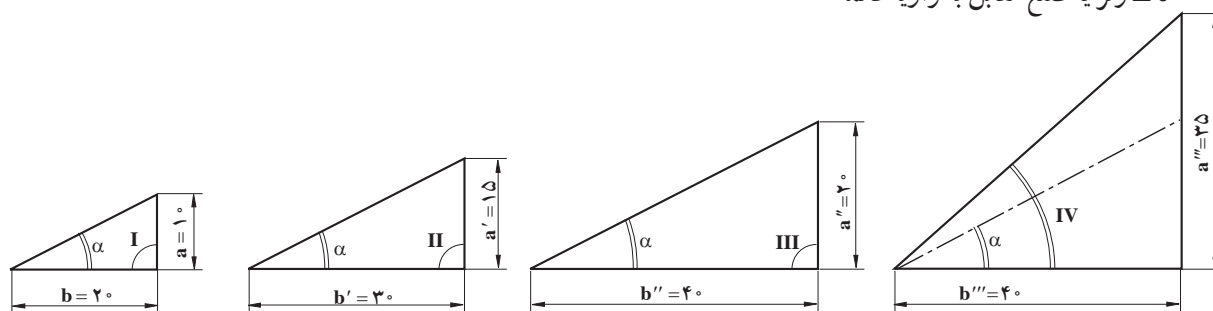
شکل ۲۱-۲ را روی تخته رسم نمایید.

توضیح دهید:

a - ضلع مقابل به زاویه  $\alpha$  و مجاور به زاویه  $\beta$

b - ضلع مقابل به زاویه  $\beta$  و مجاور به زاویه  $\alpha$

c - وتر یا ضلع مقابل به زاویه قائمه



شکل ۱-۱- (شکل ۲۲-۲ کتاب)

به هنرجویان یادآور شوید ترتیب گفته شده اضلاع و زوایا در طول این آموزه تغییر نمی‌کند و بر مبنای آن‌ها مطالب مورد نظر

گفته می‌شود.

روابط بین زوایا و اضلاع در مثلث قائم الزاویه

شکل ۲۲-۲ را روی کتاب توضیح دهد و مشخصات هر مثلث و تفاوت مثلث‌ها را با هم به ترتیب زیر مطرح نماید.

در مثلث I زاویه آن با  $\alpha$  و اضلاع آن با a و b مشخص شده است.

در مثلث II زاویه آن با  $\alpha$  و اضلاع آن با  $a'$  و  $b'$  مشخص شده است.

در مثلث III زاویه آن با  $\alpha$  و اضلاع آن با  $a''$  و  $b''$  مشخص شده است.

در مثلث IV اضلاع آن با  $a'''$  و  $b'''$  مشخص شده، اما همان گونه که در شکل دیده می شود زاویه آن برابر  $\alpha$  نیست. در مثلث I و II و III زاویه  $\alpha$  با همدیگر مساوی اند اما در مثلث IV زاویه  $\alpha$  با زاویه مشابه در دیگر مثلث ها یکی نیست. توضیح دهید: از بررسی سه مثلث می توان فهمید: چون زاویه  $\alpha$  در مثلث های راست گوشه I و II و III با هم برابرند نسبت اضلاع آن ها نیز با هم برابر خواهند بود. روی تخته بنویسید.

در مثلث I	در مثلث II	در مثلث III
$\frac{a}{b} = \frac{1^\circ}{2^\circ} = \frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{a'}{b'} = \frac{1^\circ}{2^\circ} = \frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{b'''}{a'''} = \frac{2^\circ}{1^\circ} = \frac{2}{1} = 2$

و همچنین در نسبت های دیگر

در مثلث I	در مثلث II	در مثلث III
$\frac{b}{a} = \frac{2^\circ}{1^\circ} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{b'}{a'} = \frac{2^\circ}{1^\circ} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{b'''}{a'''} = \frac{1^\circ}{2^\circ} = \frac{1}{2} = 0.5$

به هنرجویان بگویید: با در نظر گرفتن نسبت ها می توان گفت که در سه نسبت اول پاسخ نسبت ها برابر  $0.5$  بود:

$$\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه } \alpha}{\text{ضلع مجاور به زاویه } \alpha} = 0.5$$

$$\frac{\text{ضلع مجاور به زاویه } \alpha}{\text{ضلع مقابل به زاویه } \alpha} = 2$$

و سه نسبت دوم نیز:

$$\frac{\text{ضلع مجاور به زاویه } \alpha}{\text{ضلع مقابل به زاویه } \alpha} = 2$$

$$\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه } \alpha}{\text{ضلع مجاور به زاویه } \alpha} = 0.5$$

هر دو نوع نسبت در مثلث های I و II و III برابر است. بنابراین می توان گفت:

«چون زاویه  $\alpha$  در مثلث های راست گوشه I و II و III با هم برابرند نسبت اضلاع آن ها نیز با هم برابر خواهند بود»

تمرین: اگر در شکل ۲۲-۲ اندازه های داده شده به ترتیب زیر باشند و زاویه  $\alpha$  در هر مثلث برابر باشند، نسبت اضلاع در

مثلث های راست گوشه I و II و III را به دست آورید.

پاسخ:

$$\text{در مثلث I} \begin{cases} a = 2^\circ \\ b = 4^\circ \end{cases}$$

$$\text{در مثلث II} \begin{cases} a' = 3^\circ \\ b' = 6^\circ \end{cases}$$

$$\text{در مثلث III} \begin{cases} a'' = 4^\circ \\ b'' = 8^\circ \end{cases}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{4^\circ}{2^\circ} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{b'}{a'} = \frac{6^\circ}{3^\circ} = \frac{2}{1} = 2$$

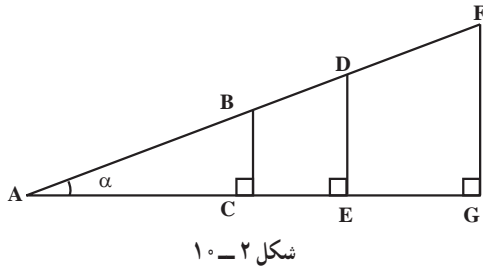
$$\frac{b''}{a''} = \frac{8^\circ}{4^\circ} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2^\circ}{4^\circ} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{3^\circ}{6^\circ} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{a''}{b''} = \frac{4^\circ}{8^\circ} = \frac{1}{2} = 0.5$$





کاردرخانه: در شکل زیر سه مثلث ABC و ADE و AFG رسم شده است که زاویه  $\alpha$  در همه آنها یکی است آیا نسبت اضلاع در آنها برابر است؟  
پاسخ:  
بنویسید و توضیح دهید: چون سه مثلث، راست گوشه هستند و زاویه  $\alpha$  در آنها برابر است، نسبت اضلاع سه مثلث رسم شده نیز با هم برابر است؛ یعنی:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{DE} = \frac{AG}{FG}$$

دومین نتیجه شکل ۲-۲۲ را به صورت زیر بیان کنید:

اگر اندازه زاویه  $\alpha$  در مثلث III مطابق شکل ۲-۲۲ با مثلث IV تغییر کند، نسبت اضلاع آن نیز تغییر خواهد کرد. نسبت‌ها را روی تخته نوشته و توضیح دهید:

$$\frac{a'''}{b'''} = \frac{35^\gamma}{4^\delta} = \frac{7}{8} = 0.875$$

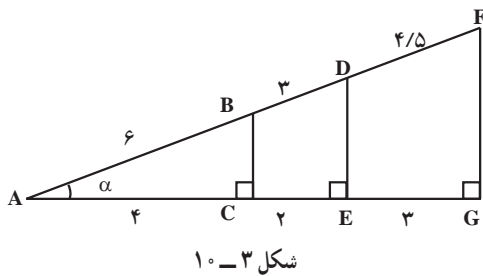
$$\frac{b'''}{a'''} = \frac{4^\delta}{35^\gamma} = \frac{8}{7} = 1.142$$

در مثلث IV

این نسبت‌ها با نسبت‌های اضلاع در مثلث‌های I و II و III یکسان نیست زیرا زاویه  $\alpha$  در مثلث IV تغییر کرده است.

مثال: نسبت‌های  $\frac{AC}{AB}, \frac{AE}{AD}, \frac{AG}{AF}$  را در شکل زیر به دست آورید و اندازه آنها را با هم مقایسه نمایید.

پاسخ:



$$\frac{AC}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

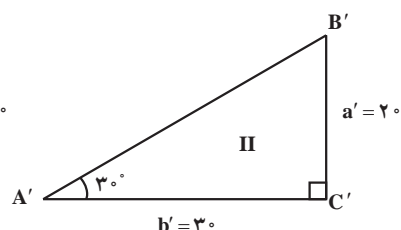
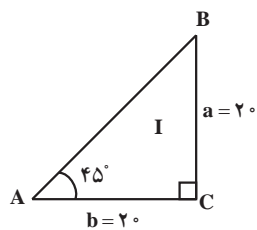
$$\frac{AE}{AD} = \frac{4+2}{6+3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AG}{AF} = \frac{4+2+3}{6+3+4/5} = \frac{9}{13/5} = \frac{2}{3}$$

چون مثلث راست گوشه است و در همه کسرها، نسبت ضلع مجاور به وتر مثلث برابر است پس نسبت‌ها با هم برابرند.  
تمرین: در مثلث‌های زیر نسبت اضلاعی را که اندازه آنها داده شده است بیابید و سپس این نسبت‌ها را با هم مقایسه کنید.

پاسخ: نسبت اضلاع:

در مثلث I



$$\frac{b}{a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{2} = 1$$

شکل ۴-۱۰

$$\frac{b'}{a'} = \frac{3^\circ}{2^\circ} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{2^\circ}{3^\circ} = \frac{2}{3}$$

در مثلث II

نسبت اضلاع مثلث‌ها با هم برابر نیست و علت آن یکی نبودن زاویه  $\alpha$  در آن‌هاست.

توضیح دهید:

■ «در مثلث راست گوشه اندازه زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  و نسبت اضلاع با هم بستگی دارد.»

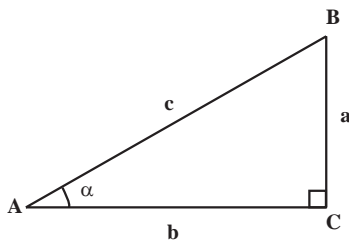
■ «در هر مثلث راست گوشه با داشتن نسبت اضلاع می‌توان اندازه زاویه و با داشتن اندازه زاویه نسبت اضلاع را به دست

آورد.»

■ بنویسید و توضیح دهید:

«هم بستگی نسبت‌های اضلاع و زاویه در مثلث راست گوشه را روابط مثلثاتی گویند.»

شکل ۲۳-۲ را رسم کنید و روابط مثلثاتی را روی تخته بنویسید و روی شکل توضیح دهید.



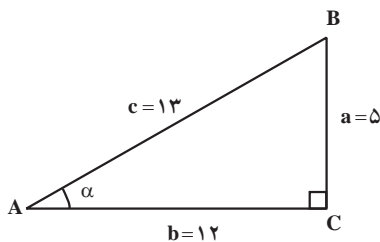
شکل ۵-۱۰ (شکل ۲۳-۲ کتاب)

$$\text{ضلع مجاور} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{ضلع مقابل} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{ضلع مجاور} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{ضلع مقابل} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{a}{b}$$



شکل ۶-۱۰

مثال: در مثلث راست گوشه زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

پاسخ:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{12}{13}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{12}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{5}{12}$$

تمرین: نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\beta$  را در مثلث راست گوشه زیر به دست آورید.

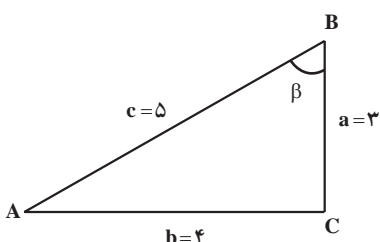
پاسخ:

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}$$

$$\cot \beta = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$



شکل ۷-۱۰

تمرین : در مثلث راست گوشه زیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  را با ماشین حساب به دست آورید.

پاسخ :

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0.866$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0.866$$

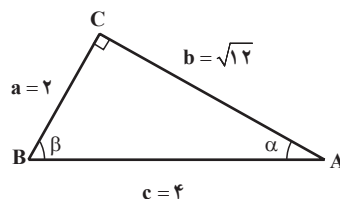
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$\cos \beta = \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{12}} \approx 0.577$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{12}}{2} \approx 1.732$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{12}}{2} \approx 1.732$$

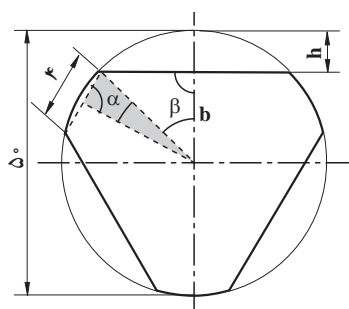
$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{12}} \approx 0.577$$



توضیح دهید : روابط مثلثاتی در حل بسیاری از مسائل فنی به کار برده می‌شوند.

مثال صفحه ۴۶ کتاب را با رسم شکل و توضیح چگونگی تشکیل مثلث راست گوشه و محاسبه زوایای  $\alpha$  و  $\beta$

توضیح دهید.



شکل ۸-۱۰ - (شکل ۲-۲۴ کتاب)

مثال : از میله گردی به قطر  $d = 50 \text{ mm}$ ، قطعه‌ای مانند شکل ۲۴-۲ ساخته خواهد

شد. اگر پهنای سطوح تخت شده با هم برابر باشد، عمق بار (h) را حساب کنید.

پاسخ :

توضیح دهید : پاسخ این گونه مسائل بیشتر با تشکیل مثلث راست گوشه و روابط

مثلثاتی به دست می‌آید.

شکل ۲۴-۲ را بررسی کنید یک مثلث با زاویه  $\alpha$  که یک رأس آن روی مرکز دایره

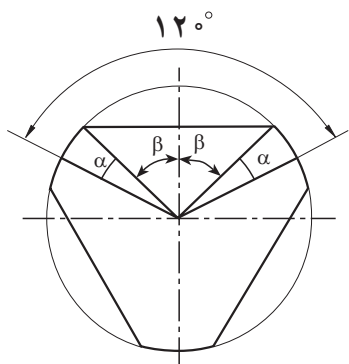
است و ضلع مقابل زاویه  $\alpha$  نزدیک به محیط دایره قرار گرفته، اندازه این ضلع برابر ( نصف اندازه آن قسمت از محیط دایره که برابر  $\frac{4}{2}$  در شکل نشان داده شده) است.

اندازه طول وتر مثلث برابر شعاع دایره یا  $\frac{50}{2}$  (نصف قطر دایره) است،

که در شکل ۲۵-۲ مشخص شده و  $\frac{1}{3}$  محیط دایره با زاویه  $120^\circ$  مشخص شده است. در

این قسمت دو زاویه  $\alpha$  و دو زاویه  $\beta$  وجود دارد.

برای به دست آوردن زاویه  $\alpha$  از رابطه مثلثاتی سینوس استفاده می‌شود.



شکل ۹-۱۰ - (شکل ۲-۲۵ کتاب)

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \left| \quad \sin \alpha = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{50}{2}} = 0.08 \quad \right| \quad \Rightarrow \alpha = 4^\circ, 30'$$

توضیح دهید : اندازه  $\alpha = 4^\circ, 30' \Rightarrow \sin \alpha = 0.08$  را می‌توانید از جداول مثلثاتی یا با ماشین حساب به دست آورید.

توضیح دهید : برای به دست آوردن اندازه زاویه  $\beta$ ، در شکل ۲۵-۲، داریم.

$$2\beta + 2\alpha = 120^\circ$$

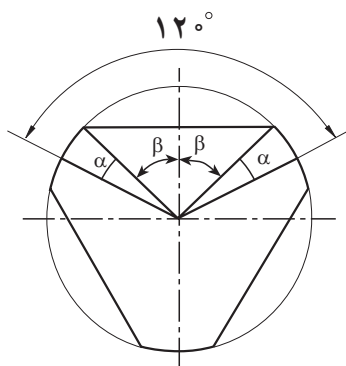
$$2\beta = 120^\circ - 2\alpha$$

$$\alpha = 4^{\circ}, 30'$$

$$\beta = \frac{12^{\circ} - 2\alpha}{2} = 6^{\circ} - \alpha$$

$$\beta = 6^{\circ} - (4^{\circ}, 30')$$

$$\beta = 55^{\circ}, 30'$$



شکل ۱۰-۱۰ (قسمت  $\beta$  از  
شکل ۲۵-۲ کتاب)

توضیح دهید: از رابطه کسینوس زاویه  $\beta$  مقدار  $b$  در شکل ۲۴-۲ به دست می‌آید.

$$\beta = 55^{\circ}, 30'$$

$$\cos \beta = \frac{b}{r}$$

$$\cos \beta = 0.5664$$

$$b = \cos \beta \times r$$

$$r = \frac{D}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$b = 0.5664 \times 25 = 14.16 \text{ mm}$$

$$h = ?$$

$$h = r - b = 25 - 14.16 = 10.84 \text{ mm}$$

کار در خانه: از هنرجویان بخواهید تمرین صفحه ۴۷ کتاب را در خانه انجام دهند و در جلسه آینده ارائه نمایند.

منابع برای مطالعه بیشتر هنرآموز:

کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال، تألیف کرودیس، ترجمه ابوالقاسم لاله، مرکز نشر دانشگاهی تهران.

## آموزه یازدهم

هدف‌های رفتاری را روی تخته بنویسید.

هدف‌های رفتاری: با یادگیری این آموزه، هنرجو می‌تواند:

- حرکت را تعریف کند و انواع حرکت را نام ببرد.
- سرعت را تعریف کند و انواع سرعت را نام ببرد.
- رابطه سرعت خطی را در مسائل به کار برد.
- رابطه سرعت دورانی (زاویه ای، محیطی) را در مسائل به کار برد.

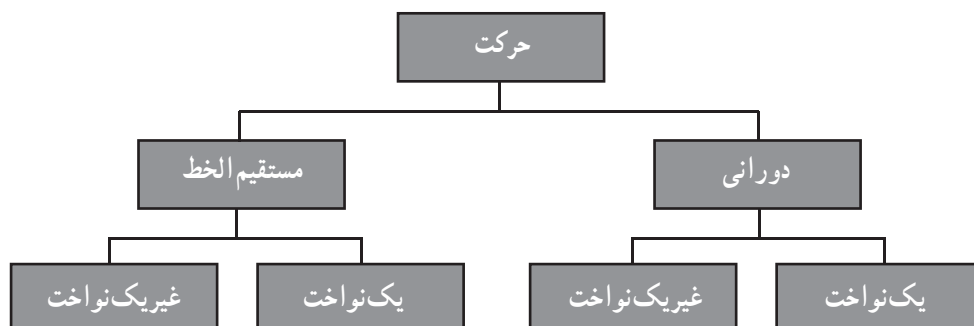
### ۱-۱۱- حرکت (۱-۳ صفحه ۴۸)

از هنرجویان بخواهید تا حرکت را تعریف کنند. پاسخ‌های هنرجویان را با توضیح خود تکمیل کنید.

توضیح دهید که انواع حرکت از نظر نوع مسیر بر دو نوع است، در راه راست (مستقیم‌الخط) و دورانی. برای حرکت مستقیم‌الخط نمونه‌هایی مانند حرکت قطار روی ریل مستقیم، حرکت جسم روی نقاله تسمه‌ای و حرکت پیاله‌های نقاله پیاله‌ای در طول مسیر و برای حرکت دورانی نمونه‌های حرکت چرخ تراکتور، حرکت تسمه در نقاله تسمه‌ای و پیاله‌ها در نقاله پیاله‌ای در انتهای مسیر، حرکت چرخ‌زنجیرها و چرخ دنده‌ها و چرخ تسمه‌ها و مانند آن‌ها.

حرکت یک‌نواخت و غیر یک‌نواخت را با طرح سؤال و پاسخ توضیح دهید. برای مثال بپرسید: «آیا کسی می‌داند تفاوت حرکت یک‌نواخت با حرکت غیر یک‌نواخت چیست؟»

پس از پاسخ‌گویی چند هنرجو، توضیح دهید: «حرکت یک‌نواخت، حرکتی است که در زمان‌های مساوی، مسیرهای برابر طی می‌گردد مانند حرکت قطار با سرعت ثابت روی ریل.»  
در پی آن انواع کلی حرکت را با نمودار زیر دسته‌بندی کنید.



## ۲-۱۱- سرعت (۲-۳ صفحه ۴۸)

پرسش از کلاس «سرعت را تعریف کنید». با بیان این پرسش دانش آموزان پاسخ می‌دهند. سپس بیان کنید: «یکی از کمیت‌های مهم در اندازه‌گیری حرکت، اندازه‌گیری سرعت است. اگر مسافت طی شده را بر زمان حرکت تقسیم کنیم عدد به دست آمده کمیت سرعت خواهد بود که یک کمیت فرعی است.»

توضیح دهید: «سرعت چندین گونه است که در این کتاب چهار نوع آن که عبارت‌اند از: سرعت خطی، سرعت دورانی، سرعت محیطی و سرعت زاویه‌ای، بررسی می‌شوند.»

## ۳-۱۱- سبب سرعت خطی (صفحه ۴۹)

در کلاس این سؤال را مطرح کنید: «سرعت خطی را تعریف کنید». پس از تعریف درست، از هنرجویان بخواهید تا در زمینه استفاده از سرعت خطی در ماشین‌های کشاورزی نمونه‌هایی را بیان کنند.

پرسش: «با ذکر مثال، اهمیت اندازه‌گیری یا محاسبه سرعت خطی را در ماشین‌های کشاورزی بیان کنید.»

پاسخ: «اندازه‌گیری یا محاسبه سرعت خطی در انجام فعالیت‌های کشاورزی، که توسط ماشین‌های مختلف انجام می‌گیرد، برای تخمین زمان یا تعداد ماشین‌های مورد نیاز یا محاسبه عملکرد ماشین و دیگر موارد کاربرد دارد. برای نمونه، هنگامی که کارهای گوناگون زراعی در مزرعه با دنباله‌بندها یا ماشین‌های کشاورزی انجام می‌شود، با مشخص بودن سرعت پیشروی ماشین، مساحت مزرعه و عرض کار ماشین، می‌توان زمان مورد نیاز را برآورد کرد. با محاسبه سرعت خطی تسمه یک نقاله تسمه‌ای، می‌توان عملکرد نقاله را در ساعت محاسبه کرد.»

رابطه سرعت خطی (رابطه ۱-۳ کتاب) را روی تخته بنویسید و آن را شرح دهید:

$$V: \text{سرعت بر حسب متر بر ثانیه } \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$S: \text{مسافت طی شده بر حسب متر } (m)$$

$$t: \text{زمان طی شده بر حسب ثانیه } (s)$$

$$V = \frac{S}{t}$$

بیان کنید: «سرعت نیز مانند سایر کمیت‌ها یکایی دارد. یکای سرعت در سیستم متریک، متر بر ثانیه  $\left(\frac{m}{s}\right)$  است. ما از این یکا هنگامی استفاده می‌کنیم که مسافت با متر و زمان با ثانیه تعیین شده باشد. در رابطه سرعت، یکای انتخاب شده برای سرعت متناسب با یکای به کار رفته برای مسافت و زمان است. در مواردی شاید به کار بردن یکای دیگر برای سرعت بهتر باشد. برای نمونه برای تعیین سرعت وسایل حمل و نقل مثل ماشین یا قطار، چون مسافت با کیلومتر و زمان با ساعت سنجیده می‌شود سرعت با یکای کیلومتر بر ساعت  $\left(\frac{km}{h}\right)$  تعیین می‌شود.»

چند یکای سرعت رایج را روی تخته بنویسید و با بیان کاربردهای آن‌ها را شرح دهید.

$$\blacksquare \text{سرعت نور- کیلومتر بر ثانیه } \left(\frac{km}{s}\right)$$

$$\blacksquare \text{سرعت برش در سوراخ کاری، تراش کاری- متر بر دقیقه } \left(\frac{m}{min}\right)$$

$$\blacksquare \text{سرعت صوت- متر بر ثانیه } \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\blacksquare \text{سرعت پیشروی در ماشین‌های فرز و سنگ‌زنی- میلی متر بر دقیقه } \left(\frac{mm}{min}\right)$$

کار در کلاس: از هنرجویان بخواهید تا فاصله‌ای را در کلاس بر حسب متر تعیین کنند. سپس از یک هنرجو بخواهید تا در ابتدای مسیر بایستد. حال از او بخواهید تا طول مسیر را قدم بزند و همزمان دیگر هنرجویان زمان راه رفتن وی روی مسیر را با ساعت اندازه‌گیری کنند. اکنون از هنرجویان بخواهید سرعت وی را برآورد کنند.

کار در خانه: از هنرجویان بخواهید تا پنج مورد از یکای سرعت در ماشین‌های کشاورزی و کاربرد آن را بیان کنند.

مثال صفحه ۴۹ کتاب را بخوانید و با روشن کردن پیچیدگی هایش، آن را حل کنید.

مثال ۱: تراکتوری هنگام کار در مزرعه، طول ۱۵۵ متری زمین را در مدت یک دقیقه و ۴۰ ثانیه می پیماید. سرعت خطی این

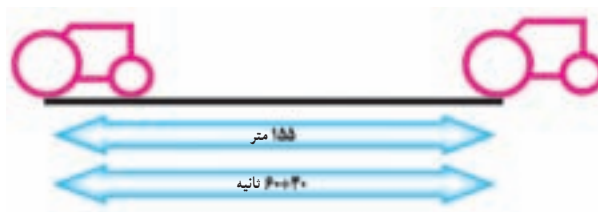
تراکتور چقدر است؟

پاسخ:

$$s = 155 \text{ m}$$

$$t = 1' + 40'' = 100 \text{ s}$$

$$V = ? \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



شکل ۱-۱۱

$$V = \frac{s}{t} = \frac{155}{100} \Rightarrow V = 1/55 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

روش تبدیل واحد  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  به  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  را با به کار بردن رابطه زیر شرح دهید.

$$1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \times \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} = 3/6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

یکای مثال حل شده را با روش زیر به  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  تبدیل کنید.

بیان کنید: اگر بخواهیم سرعت به دست آمده (متر بر ثانیه) را بر پایه کیلومتر در ساعت محاسبه کنیم، آن را باید در عدد ۳/۶

ضرب کنیم.

$$V = 1/55 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \times \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} = 5/6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

مثال دوم صفحه ۴۹ را با روش گفته شده حل کنید.

برای درک بهتر هنرجویان، تمرین‌های بیان شده در این آزمون را در کلاس مطرح کنید و از آن‌ها بخواهید تمرین‌ها را حل کنند.

سپس از داوطلبی درخواست کنید تا مسئله را پای تخته حل کند. در این مرحله اشتباه‌های هنرجو را به او یادآور شوید.

تمرین ۱- برای حمل گندم در یک سیلو نقاله پیاله‌ای به کار می‌رود. اگر سرعت

تسمه نقاله پیاله‌ای ۰/۵ متر بر ثانیه باشد و ۴۰ ثانیه طول بکشد تا هر پیاله از پایین به بالای

مسیر برسد، طول مسیر چقدر است؟

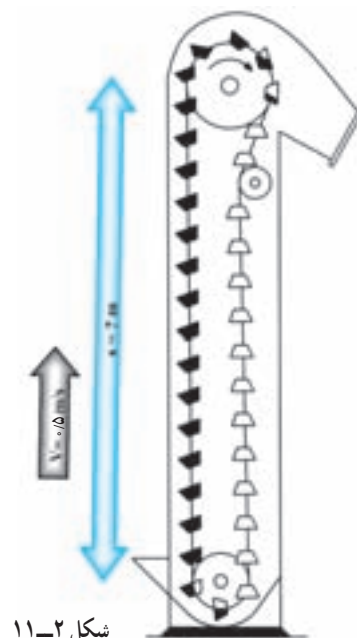
پاسخ:

$$V = 0/5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

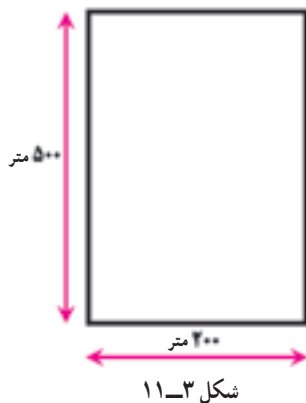
$$t = 40 \text{ s}$$

$$s = ?$$

$$V = \frac{s}{t} \Rightarrow s = V \times t \Rightarrow s = 0/5 \times 40 \Rightarrow s = 20 \text{ m}$$



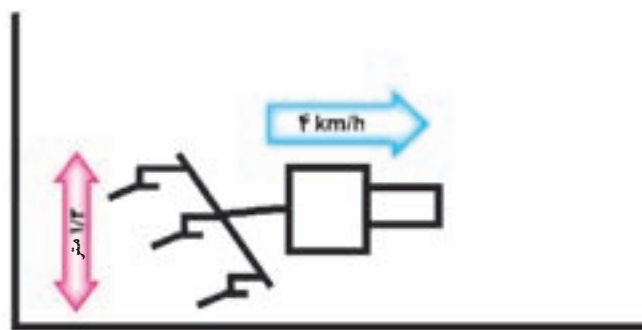
شکل ۲-۱۱



تمرین ۲- مزرعه‌ای به اندازه نشان داده شده در شکل باید شخم زده شود. اگر سرعت پیشروی تراکتور هنگام شخم زدن ۴ کیلومتر در ساعت باشد، با چشم پوشی از زمان دورزدن و با فرض این که شخم زدن با گاواهن سه‌خیش دو طرفه با عرض کار ۱/۳ متر انجام می‌شود، کمترین زمان مورد نیاز برای شخم زدن این زمین بر حسب ساعت را برآورد کنید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} \text{طول زمین} &= 500 \text{ m} \\ \text{عرض زمین} &= 200 \text{ m} \\ \text{عرض کار} &= 1/3 \text{ m} \\ V &= 4 \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ t &= ? \text{ h} \end{aligned}$$



$$s = 500 \text{ m} \times \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} = 0.5 \text{ km}$$

زمان مورد نیاز برای پیمودن درازای زمین:

$$V = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{V} = \frac{0.5}{4} \Rightarrow t = 0.125 \text{ h}$$

تعداد پیمایش زمین با تراکتور برای شخم کل زمین:

$$n = \text{عرض کار گاواهن} \div \text{عرض زمین} \Rightarrow n = 200 \div 1/3 = 154$$

$$T = 0.125 \times 154 = \boxed{T = 19.25 \text{ h}}$$

کل زمان طی شده:

کار در خانه (۱): عملیات کاشت در یک مزرعه به ابعاد  $300 \times 650$  متر مربع قرار است با یک ردیف‌کار نیوماتیک ۴ ردیفه انجام شود. فاصله ردیف‌های کاشت ۷۵ سانتی‌متر و سرعت پیشروی تراکتور ۶ کیلومتر در ساعت در نظر گرفته شده است. با چشم پوشی از زمان لازم برای دور زدن، کمترین زمان لازم را، برای انجام عملیات کاشت در این مزرعه، بر حسب ساعت محاسبه کنید.

کار در خانه (۲): تمرین‌های صفحه ۵۰ و ۵۱ را پاسخ دهید.

### ۱۱-۳- سرعت دورانی (صفحه ۵۱)

از هنرجویان بخواهید تا چند مورد حرکت دورانی را، که در ماشین‌های کشاورزی یا اجزای آن‌ها وجود دارد، بیان کنند. پرسش: اهمیت اندازه‌گیری یا محاسبه سرعت دورانی در ماشین‌های کشاورزی را با یک نمونه بیان کنید.



پاسخ: سرعت دورانی در ماشین‌های کشاورزی و در مکانیزم‌هایی که دارای حرکت دورانی هستند کاربرد دارد. برای نمونه، دنباله‌بندهایی که نیروی مورد نیاز خود را از محور انتقال نیرو می‌گیرند یا ماشین‌هایی که توان مورد نیازشان از الکتروموتور تأمین می‌گردد. سرعت دورانی الکتروموتورها در دامنه ویژه‌ای تعیین شده است و در انجام محاسبات برای ماشین‌هایی که در آنها از الکتروموتور استفاده می‌شود، مورد نیاز است.

از هنرجویان بپرسید: «دور ویژه محور انتقال نیرو در تراکتور MF ۲۸۵ چقدر است؟».

پس از پاسخ‌گویی چند هنرجو توضیح دهید: ۵۴۰ یا ۱۰۰۰ دور در دقیقه، عدد گفته شده معرف سرعت دورانی محور انتقال نیرو است. تعداد چرخشی که یک جسم گردان در ۱ دقیقه انجام می‌دهد معرف سرعت دورانی آن است که با  $n$  یا  $N$  مشخص می‌شود. یکای سرعت دورانی دور در دقیقه است که با rpm یا RPM یا  $\frac{\text{rev}}{\text{min}}$  نشان داده می‌شود. کار در کلاس: یک صفحه مقوایی گرد را با یک میخ از مرکز مقوا روی دیوار قرار دهید. نقطه‌ای روی محیط دایره را با ماژیک علامت‌گذاری کنید. حال از هنرجویان بخواهید تا وقتی که شما صفحه را ۱۰ دور کامل می‌چرخانید، زمان را با ساعت یا زمان‌سنج اندازه‌گیری کنند. سپس از هنرجویان بخواهید سرعت دورانی صفحه را محاسبه کنند.

### سرعت محیطی (صفحه ۵۱)

شکل روبه‌رو را روی تخته رسم و سپس بیان کنید: «این چرخ زنجیر با قطر  $d$  با سرعت دورانی ۱۰۰ دور در دقیقه می‌چرخد».

توضیح دهید: اگر بخواهیم تعیین کنیم که دنده نشان داده شده در شکل یا هر نقطه روی جسم گردان چه مسافتی را در زمان مشخص می‌پیماید باید سرعت محیطی را محاسبه کنیم. سرعت محیطی یک جسم دوار، سرعت نقطه‌ای را مشخص می‌کند که روی محیط آن جسم قرار دارد. یکای این سرعت مانند سرعت خطی است.

رابطه ۲-۳ کتاب را روی تخته بنویسید و اجزای آن را شرح

دهید.

$$V = \frac{d \times \pi \times n}{1000 \times 60}$$

$V$ : سرعت محیطی بر حسب متر بر ثانیه ( $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ )

$d$ : قطر بر حسب میلی‌متر (mm)

$n$ : سرعت دورانی بر حسب تعداد دور در دقیقه (RPM)

شکل ۶-۱ را روی تخته رسم کنید و موارد زیر را با کمک آن شرح دهید.

«محاسبه سرعت محیطی در کار با چرخ زنجیرها، چرخ دنده‌ها،

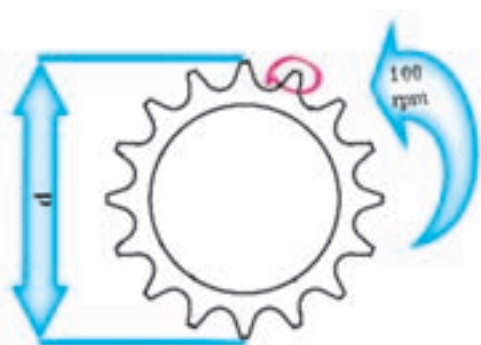
چرخ تسمه‌ها و دیگر اجزای گردنده مورد نیاز است. برای نمونه، اگر

بخواهید سرعت خطی یک زنجیر در حرکت را بیابید بیشتر باید سرعت

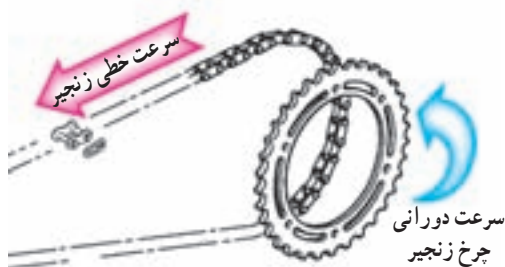
محیطی چرخ زنجیر را محاسبه کنید. محاسبه سرعت تسمه نقاله نیز وابسته

به سرعت محیطی است و بر پایه محاسبه، سرعت دورانی الکتروموتور

محرك آن انجام می‌شود.»



شکل ۵-۱۱



شکل ۶-۱۱

توضیح دهید: «در رابطه سرعت محیطی باید یادآور شد هر چه قطر بیشتر باشد اندازه سرعت محیطی نیز بیشتر می شود. یعنی در دو دایره دوار با سرعت دورانی مساوی، سرعت محیطی دایره ای بیشتر است که قطر بزرگ تری دارد. برای نمونه اگر در یک اتومبیل به جای چرخ های محرک آن، چرخ های با قطر بیشتر بسته شود با این که فشار زیادی به موتور وارد می شود ولی سرعت آن افزایش می یابد.»

اکنون مثال صفحه ۵۲ کتاب را پاسخ دهید.

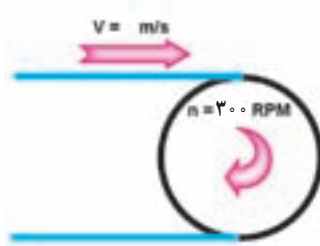
تمرین ۳- چرخ زنجیری با سرعت دورانی  $300^\circ$  دور در دقیقه می چرخد و سرعت خطی زنجیر متصل به آن ۵ متر بر ثانیه است. قطر چرخ زنجیر هچقدر است؟  
پاسخ:

$$n = 300 \text{ RPM}$$

$$V = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V = \frac{d \times \pi \times n}{60000} \Rightarrow d = \frac{60000 \times V}{\pi \times n} = \frac{60000 \times 5}{3.14 \times 300} \Rightarrow d = 318.5 \text{ mm}$$

$$d = ?$$



شکل ۱-۷

تمرین ۴- قطر چرخ عقب تراکتوری  $120^\circ$  سانتی متر است و با سرعت دورانی  $8^\circ$  دور در دقیقه می چرخد. سرعت پیشروی تراکتور را بر حسب کیلومتر در ساعت محاسبه کنید.  
پاسخ:

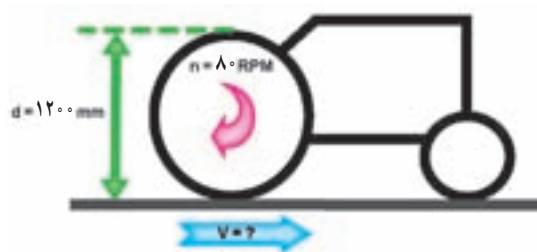
$$d = 120 \text{ mm}$$

$$n = 8^\circ \text{ RPM}$$

$$V = ? \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$V = \frac{d \times \pi \times n}{60000} = \frac{120 \times 3.14 \times 8}{60000} \Rightarrow V = 5.024 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V = 5.024 \times \frac{3600}{1000} \Rightarrow V = 18.1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



شکل ۱۱-۸

کار در خانه (۲): سرعت خطی تسمه یک نقاله تسمه ای  $1/5$  متر بر ثانیه است. اگر قطر پولی محرک  $4^\circ$  سانتی متر باشد، سرعت دورانی پولی محرک را محاسبه کنید.  
از هنرجویان بخواهید تمرین های صفحه ۵۲ کتاب را به منظور کار در خانه پاسخ دهند.