فصل ۶

ماتریس

نگاه کلّی به فصل ششم

اهداف کلّی

۱ـ آشنایی با ماتریس و ویژگی‌های آن

۲ـ آشنایی با شرط تساوی دو ماتریس، ماتریس صفر، قرینه یک ماتریس و ویژگی‌های آنها

۳ـ آشنایی با اعمال روی ماتریس‌ها (جمع ماتریس‌ها، ضرب عدد در ماتریس، ضرب ماتریس‌ها)

۴ـ آشنایی با روش به دست آوردن دترمینال و وارون یک ماتریس

۵ـ حل دستگاه دو معادله و دو مجهول با استفاده از ماتریس

عملکرد مورد انتظار دانش‌آموزان

دانش‌آموزان باید بتوانند :

۱ـ ماتریس را تشخیص دهند و با ذکر مثالی ویژگی‌های آن را بیان کنند.

۲ـ درایه‌های یک ماتریس را مشخص و مرتبهٔ آن ماتریس را پیدا کنند.

۳ـ شرط تساوی دو ماتریس را بیان کنند و دو ماتریس مساوی را تشخیص دهند.

۴ـ شرط جمع‌پذیری دو ماتریس را بیان کنند و حاصل جمع دو یا چند ماتریس جمع‌پذیر را به دست آورند.

۵ـ ویژگی‌های ماتریس صفر را با ذکر مثالی بیان کنند.

۶ـ حاصل ضرب یک عدد در یک ماتریس را به دست آورند.

۷ـ قرینهٔ یک ماتریس را به دست آورند و ویژگی‌های آن را بیان کنند.

۸ـ شرط ضرب‌پذیری دو ماتریس را بیان کنند و حاصل ضرب دو ماتریس ضرب‌پذیر را به دست آورند.

۹ـ دترمینال و وارون یک ماتریس را به دست آورند.

۱۰ـ دستگاه دو معادله و دو مجهول را با استفاده از ماتریس حل کنند.

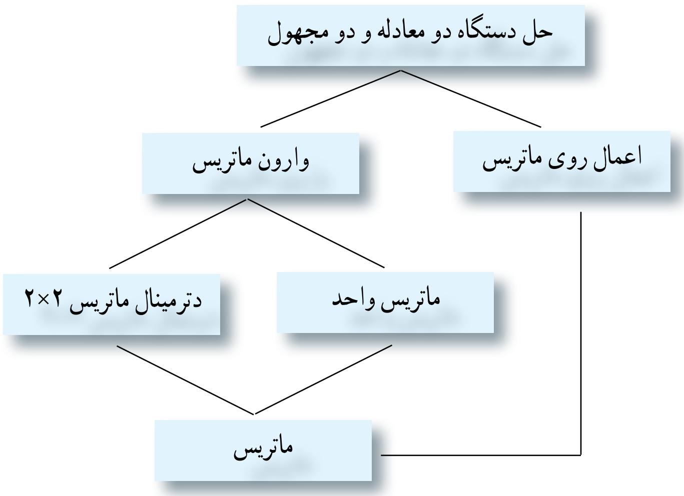
پیش‌نیازها

آشنایی با محاسبات جبری و حل معادلات درجهٔ اول

زمان‌بندی پیشنهادی برای تدریس این فصل

تساوی و جمع ماتریس‌ها	جلسهٔ سی و هشتم
ضرب ماتریس‌ها و حل دستگاه دو معادله و دو مجهول	جلسهٔ سی و نهم
حلّ تمرینات	جلسهٔ چهلم

نقشهٔ مفهومی فصل ششم کتاب درسی



دانستنی برای معلّم

واژهٔ ماتریس اولین بار در سال ۱۸۵۰ میلادی به وسیلهٔ جیمز جوزف سیلوستر، ریاضی دان انگلیسی به کار گرفته شد. مفهوم ماتریس قبل از اینکه ابداع شود، تصدیق و گسترش یافت. چرا که مقدم بر آن، مفهوم دترمینان در مطالعه دستگاه‌های معادلات خطی در اوایل قرن هجدهم میلادی مطرح شده بود. یکی از نقش‌های اصلی ماتریس‌ها آن است که آنها ابزار اساسی محاسبات عملی ریاضیات هستند، یعنی درست همان نقش که سابقاً اعداد برعهده داشتند. از این‌نظر می‌توان گفت نقش امروز ماتریس‌ها همانند نقش دیروز اعداد است. البته ماتریس‌ها به معنایی، اعداد و بردارها را دربردارند، بنابراین می‌توان آنها را تعمیقی از اعداد و بردارها درنظر گرفت.

ماتریس را به عنوان آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی تعریف می‌کنیم، اگر A یک ماتریس با m سطر و n ستون باشد، می‌گوییم ماتریس از مرتبه $m \times n$ است.

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & \cdots & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n۱} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

اعداد داخل مستطیل را درایه‌های ماتریس می‌نامیم. زیرنویس i و j درایه a، برای مشخص کردن سطر و ستونی که a در آنها قرار دارد به کار می‌رود.

سطر i اُم ماتریس A عبارت است از : $[a_{۱} \quad a_{۲} \quad \ldots a_{n}]$

و ستون j اُم ماتریس A عبارت است از : $\begin{bmatrix} a_{۱j} \\ a_{۲j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

برای دو ماتریس A و B، می گوییم A　B، اگر A و B دارای یک مرتبه باشند و درایه‌های متناظر A و B با هم مساوی باشند، یعنی به ازای هر i　۱, ۲, ... , m و j　۱, ۲, ... , n داشته باشیم a　b

ماتریسی که در آن تعداد سطرها و ستون‌ها برابر باشند، یک ماتریس مربعی نامیده می‌شود.

اگر A یک ماتریس مربعی با مرتبه $n \times n$ باشد، آن گاه قطر اصلی A از همـه درایـه‌های $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ تشکیل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها

ضرب ماتریس‌ها عمل بسیار مهم و مفیدی است که در بسیاری از بحث‌ها مطرح می‌شود.

حاصل ضرب دو ماتریس با ضرب عددی یک به یک سطرهای ماتریس اول در یک به یک ستون‌های ماتریس دوم ساخته می‌شود. ضرب سطر i اُم و ستون j اُم :

$$[a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \ldots \;\; a_{in}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

بنابراین ضرب دو ماتریس A و B در صورتی امکان‌پذیر است که مرتبه‌های آنها قابل تطبیق باشند به این معنا که تعداد ستون‌های ماتریس A برابر تعداد سطرهای B باشد.

به بیان کلی‌تر، اگر A یک ماتریس از مرتبهٔ $m \times n$ و B یک ماتریس از مرتبهٔ $n \times K$ با درایه‌های حقیقی باشند، حاصل ضرب ماتریسی A در B که با AB نمایش داده می‌شود، ماتریس C است که در آن هر درایهٔ ماتریس C از رابطهٔ زیر به دست می آید :

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj}$$

ضرب ماتریس‌ها برخلاف ضرب اعداد حقیقی خاصیت جابه‌جایی ندارد. (یعنی برای هر عدد حقیقی a و b داریم $a \times b \quad b \times a$ اما برای ضرب ماتریس‌ها $AB \neq BA$)

از طرف دیگر، ضرب ماتریس‌ها همانند ضرب اعداد حقیقی شرکت‌پذیر است، یعنی برای ماتریس‌های C, B, A

$$(AB)C \quad A(BC)$$

در اعداد حقیقی، عدد ۱ عضو خنثی عمل ضرب نامیده می‌شود و در ماتریس‌ها نیز ماتریس مربعی $n \times n$ که با I نمایش داده و ماتریس همانی نامیده می‌شود، عضو خنثی در ضرب ماتریس‌ها می‌باشد. در ماتریس I همهٔ درایه‌های قطر اصلی ۱ و بقیهٔ درایه‌ها صفر می‌باشد.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

که به صورت زیر نیز نمایش داده می‌شود :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ریاضی دان آلمانی لئوپولدکرونکر (۱۸۹۱ — ۱۸۲۳) نماد δ را برای محاسبهٔ سادهٔ ماتریس معرفی کرد و به افتخار او این نماد، دلتای کرونکر نامیده می‌شود.

با توجه به ضرب ماتریس‌ها، در صورتی توان‌های یک ماتریس قابل تعریف است، که بتوان ماتریس را در خودش ضرب کرد. بنابراین، باید تعداد سطرها و ستون‌هایش با هم برابر باشند. پس توان‌های یک ماتریس فقط برای ماتریس‌های مربعی قابل تعریف است.

به بیان کلی‌تر برای هر ماتریس $n \times n$ مانند A، توان‌های A به صورت زیر تعریف می‌شود :

$A^{0} \quad I$

$A^{n} \quad AA^{n\ 1}$

که در آن I یک ماتریس واحد $n \times n$ است.

جمع ماتریس‌ها با توجه به تساوی ماتریس ها تعریف می‌شود. یعنی اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند، در این صورت مجموع آنها که به صورت A B نمایش داده می‌شود، یک ماتریس $m \times n$ است که هر درایهٔ آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$C \quad a \quad b$

همچنین ضرب هر عدد حقیقی r در ماتریس A با مرتبه $m \times n$، به صورت $rA \quad r[a\ ]_{m\times n}$ تعریف می‌شود که از ضرب r در هر درایهٔ ماتریس A به دست آمده است. می‌توان قرینهٔ ماتریس A را نیز تعریف کرد به این صورت که (A)(۱) A ، یعنی قرینهٔ یک ماتریس مانند A از حاصل ضرب عدد ۱ در ماتریس A به وجود می‌آید. لذا بنابر تعریف جمع دو ماتریس، مجموع A و A ماتریسی $m \times n$ است که تمام درآیه‌هایش برابر صفر اند. چنین ماتریسی، ماتریس صفر نامیده می‌شود و آن را به صورت $O_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم.

آموزش بخش‌های فصل ششم

نگاه کلی بر بخش

در این بخش دانش آموزان با مفهوم جدیدی در ریاضی به نام ماتریس آشنا می‌شوند. البته می‌توان گفت در گذشته بدون اشاره به نام ماتریس، تا حدودی با این مفهوم آشنا شده‌اند، ولی در این بخش با این مفهوم و خواص آن به طور کامل‌تری آشنا می‌شوند.

ورود به مطلب : برای آموزش این بخش، همانند کتاب، می‌توان از مثال وزن میوه‌های فروخته شده توسط یک میوه‌فروشی یا مثال‌هایی از این قبیل استفاده کرد و سپس با دسته‌بندی داده‌های مسئله، دانش‌آموزان را با مفهوم ماتریس، درایه و مرتبه و انواع آن آشنا کرد.

تمرین در کلاس صفحه‌های ۱۶۱ و ۱۶۲

هدف : آشنایی دانش‌آموزان با مفاهیم سطر، ستون و جایگاه و روش نام‌گذاری هر درایه در یک ماتریس

با توجه به اینکه در محاسبات جبری روی ماتریس‌ها، مفاهیم فوق‌الذکر اهمیت خاصی دارند، بهتر است با ارائهٔ مثال‌های مختلف و متنوع، از یادگیری این مفاهیم اطمینان حاصل شود.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۶۳

هدف : آموزش برقراری تناظر بین درایه‌های نظیر در دو ماتریس هم‌مرتبه

مثال‌های صفحهٔ ۱۶۵

هدف : آشنایی دانش آموزان با شرط جمع‌پذیری دو ماتریس و روش به دست آوردن حاصل جمع یا تفاضل دو یا چند ماتریس

در این قسمت بهتر است مثال‌هایی ارائه شوند که در آنها چند ماتریس با هم جمع یا از هم کم شوند تا دانش‌آموزان با مفهوم جمع یا تفاضل ماتریس‌ها به درستی آشنا شوند.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۷۱

هدف : بررسی شرایط ضرب‌پذیری دو ماتریس و سپس به دست آوردن حاصل ضرب آنها

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۷۳

هدف : استفاده از ماتریس‌ها در حل معادلات درجهٔ دوم

دانش‌آموزان در گذشته با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول با روش‌های دیگری آشنا شده بودند. در این فصل دانش‌آموزان با استفاده از ماتریس، به حل این نوع معادلات می‌پردازند.

سؤالات تکمیلی

۱ــ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & x-y \\ ۲x+y & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ و $A \quad B$ باشند مقدار x و y را به‌دست آورید.

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ -x+۳y \end{bmatrix}$ و $A \quad B$ باشند مقدار $(x \quad y)$ را به‌دست آورید.

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix} x & ۲y \\ -۴ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+۲ & x-۱ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $A \quad B$ باشند. مقدار $(x \quad y \quad z)$ را به‌دست آورید.

۴ــ ماتریس A را به‌دست آورید، به‌طوری که :

الف) $\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix} + A = I_{۲\times۲}$

ب) $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix} - ۲A = O_{۲\times۲}$

۵ــ فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & a \end{bmatrix}$ باشند، مقدار a را طوری تعیین کنید که $A+B=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$.

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$، آن‌گاه درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $(A \quad B)(A \quad B) \quad A^{۲} \quad B^{۲}$

ب) $(A \quad B)^{۲} \quad A^{۲} \quad ۲AB \quad B^{۲}$

۷ــ اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس‌های A^{100} و A^{101} را به‌دست آورید.

۸ــ از تساوی‌های زیر مقادیر x و y و z را به‌دست آورید :

الف) $[1\ \ x\ \ 2]\begin{bmatrix}3x\\ -1\\ 5\end{bmatrix}=6$

ب) $\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 2 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & x\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -3\\ y & 1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-2 & z\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

۹ــ اگر $A=\begin{bmatrix}ab & b^2\\ -a^2 & -ab\end{bmatrix}$ باشد، ثابت کنید $A^2 \quad 0$.

۱۰ــ اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A \quad 2A^{\ 1}$ را به‌دست آورید.

۱۱ــ مقدار a را چنان پیدا کنید که دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & a\end{bmatrix}$ برابر صفر باشد.

۱۲ــ وارون ماتریس‌های زیر را در صورت وجود به‌دست آورید :

الف) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -4 & 2\end{bmatrix}$ ج) $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{bmatrix}$

۱۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ باشد، مقدار a و b را طوری بیابید که $2A^2 \quad aA \quad 3bI \quad 0$

۱۴ــ دستگاه‌های دو معادله و دو مجهولی زیر را با استفاده از ماتریس معکوس ضرائب حل کنید.

الف) $\begin{cases}x+y=2\\ 3x+4y=5\end{cases}$ ب) $\begin{cases}2x+y=7\\ x-2y=1\end{cases}$

ج) $\begin{cases}2x-y=1\\ x+y=2\end{cases}$ د) $\begin{cases}-3x+2y=2\\ x-3y=5\end{cases}$

۱۵ــ اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ و $AX=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ باشند، ماتریس X را بیابید.

۱۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 6\end{bmatrix}$ و $AX=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}$ باشند، ماتریس X را بیابید.

نمونه سؤالات ارزشیابی پایانی

۱ــ در یک مثلث قائم‌الزاویه، کوچک‌ترین ضلع ۳ سانتی‌متر می‌باشد و اضلاع مثلث تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. دو ضلع دیگر را به دست آورید.

۲ــ دنبالهٔ تقریبات اعشاری عدد $\sqrt{۸}$ را بنویسید.

۳ــ تابعی را رسم کنید که به هر عدد حقیقی، عدد ۳ را نظیر می‌کند.

۴ــ در تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x^{۲}+ax+b}$ مقادیر a و b را چنان بیابید که دامنه تابع $R \quad \{۲\}$ باشد.

۵ــ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

الف) اگر $f(x) \quad ۲x$ آن‌گاه $f(۱) \quad ۱$

ب) رابطه $۲x^{۲} \quad x \quad ۱ > ۰$ به ازای هر عدد حقیقی x همواره برقرار است.

پ) اگر $y \quad f(x \quad ۱)$، آن‌گاه می‌توان نوشت $y \quad f(x) \quad ۱$.

۶ــ معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log(۲x-۱)+\frac{۱}{۲}\log x^{۲}=\log ۳$$

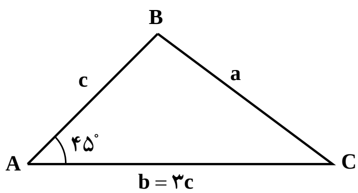
۷ــ نمودار تابع $y \quad \log_{۲}(x \quad ۲)$ و معکوس آن را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و دامنه هر یک را مشخص کنید.

۸ــ چه مدت طول می‌کشد تا عقربهٔ دقیقه شمار به اندازه $۱/۵\pi$ رادیان دوران کند.

۹ــ خط $y \quad ax \quad ۱$ با محور xها زاویه ۱۳۵° می‌سازد، مقدار a را مشخص کنید.

۱۰ــ نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}\sin(\pi x)$ را رسم کنید.

۱۱ــ در شکل زیر اگر مساحت مثلث $\sqrt{۳۲}$ باشد، اندازهٔ اضلاع مثلث را به دست آورید.



۱۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۹ & -۶ & ۳ \\ ۳ & ۰ & ۱۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$، ماتریس $A \quad ۲B$ را پیدا کنید.

۱۳ــ به ازای چه مقدار از m ماتریس $A=\begin{bmatrix} m-۱ & ۲ \\ -۳ & m \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نیست؟

۱۴ــ دستگاه $\begin{cases} ۲x+۳y=۴ \\ x-۵y=۲ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس معکوس حل کنید.

۱۵ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$، در این صورت $(A^{\;۱})^{\;۱}$ را مشخص کنید.

۱۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{\;۱}B^{\;۱}$ را پیدا کنید.

فصل ۷
ترکیبات

نگاه کلّی به فصل هفتم

اهداف کلّی

۱ــ آشنایی با اصل ضرب در انتخاب اشیاء
۲ــ آشنایی با مفهوم فاکتوریل یک عدد و روش محاسبهٔ آن
۳ــ آشنایی با مفهوم جایگشت r شیء از n شیء
۴ــ آشنایی با مفهوم ترکیب r شیء از n شیء

عملکرد مورد انتظار دانش‌آموزان

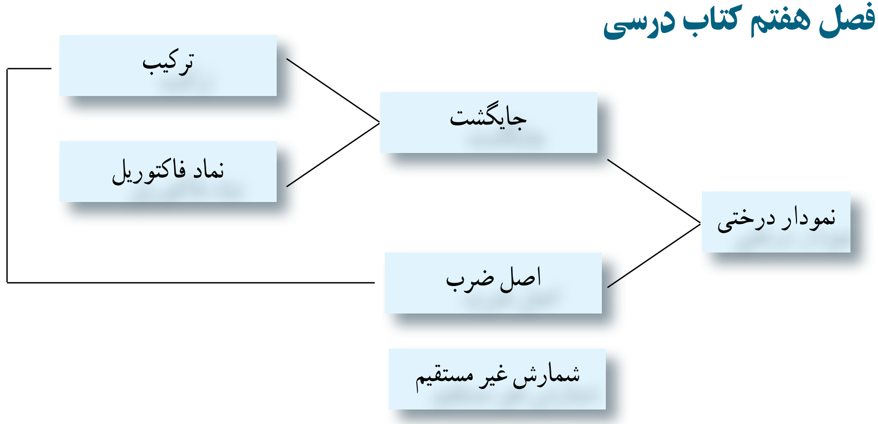
دانش‌آموزان باید بتوانند :

۱ــ اصل ضرب را در مسائل مربوط به کار ببرند.
۲ــ نمودار درختی یک آزمایش را رسم کنند.
۳ــ فاکتوریل یک عدد صحیح مثبت را محاسبه کنند.
۴ــ جایگشت r شیء از n شیء را محاسبه کنند.
۵ــ ترکیب r شیء از n شیء را به دست آورند.

زمان‌بندی پیشنهادی

اصل شمارش، اصل ضرب	جلسهٔ چهل و یکم
جایگشت	جلسهٔ چهل و دوم
ترکیب	جلسهٔ چهل و سوم
حل تمرینات	جلسهٔ چهل و چهارم

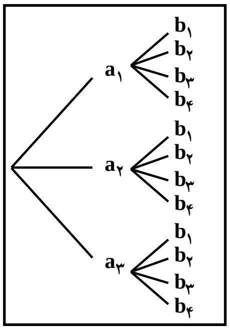
نقشهٔ مفهومی فصل هفتم کتاب درسی



دانستنی برای معلّم

در این فصل برای شمارش تعداد نتایج محتمل برای یک آزمایش خاص یا تعیین مقدار عناصر مجموعه‌ای بدون شمارش مستقیم، روش‌هایی ارائه می‌شود. چنین روش‌هایی غالباً به عنوان آنالیز ترکیبی مورد ملاحظه قرار می‌گیرند. موضوع با اصل اساسی شمارش آغاز می شود. «اگر عملی به n_1 طریق مختلف انجام‌پذیر باشد و اگر در پی آن عمل دوم به n_2 طریق مختلف و متعاقب آن عمل سوم به n_3 طریق مختلف و . . . انجام‌پذیر باشند، آن‌گاه تعداد حالت هایی که این عمل‌ها می‌توانند با هم انجام بگیرند، به صورت حاصل ضرب . . . $n_1, n_2, n_3,$ خواهد بود.» یک راه ساده و مفید برای تعیین اصل ضرب، نمودار درختی است.

مثلاً فرض کنیم از شهر A به شهر B، ۳ راه مختلف و از شهر B به شهر C، ۴ راه مختلف وجود داشته باشد. برای تعیین اینکه یک شخص از چند راه می‌تواند از A به C برود، از نمودار درختی استفاده می‌کنیم. سه شاخهٔ اولیهٔ اعضای a_1, a_2, a_3 از مجموعه A را رسم سپس هر یک از این سه شاخه به چهار شاخه تقسیم می‌شوند که عضوهای b_4, b_3, b_2, b_1 از مجموعه B را مشخص می‌کند .برای به دست آوردن عضوهای $A \cup B$ از ریشهٔ درخت و شاخهٔ اول شروع می‌کنیم. انتخاب اولین شاخه، نشان‌دهندهٔ اولین مختصات زوج مرتب است. پس برای تعیین عضو دوم، شاخه دوم را انتخاب می‌کنیم. به همین ترتیب هر مسیر از شاخهٔ اول شروع می‌شود و به شاخهٔ دوم یا برگ درخت ختم می‌شود. سرانجام شاخه‌های با عضوهای $A \cup B$ طبقه‌بندی می‌شوند.



همانند اصل ضرب، اصل جمع را نیز می‌توان برای مجموعهٔ متناهی تعریف کرد، به شرط آنکه مجموعه‌ها دو به دو از هم جدا باشند، که در احتمال به این مجموعه‌ها، پیشامدهای ناسازگار می‌گویند، اگر وقوع آنها به صورت هم زمان ممکن نباشد.

به عنوان مثال اگر سکه‌ای را پرتاب کنیم،ممکن است شیر یا خط بیاید، ولی امکان وقوع هر دوی آنها در یک زمان ممکن نیست.

اگر مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_k$ مجموعه‌های متناهی و دو به دو جدا از هم باشند، داریم :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$$

اگر مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_k$ دو به دو از هم جدا نباشند، چه روی می‌دهد؟

در این حالت فرمول $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|$ پیچیده‌تر می‌شود و اثبات آن به جزئیات بحث ترکیبات نیاز دارد. این فرمول به «اصل شمول و عدم شمول» معروف است که دانش‌آموزان در ریاضیات گسسته با آن آشنا می‌شوند.

جایگشت

در بسیاری از مباحث آنالیز ترکیبی، با انتخاب چند شیء روبه‌روییم و گاهی در این انتخاب‌ها آرایش اشیاء و نحوه قرار گرفتن آنها کنار یکدیگر اهمیت دارد که این نوع انتخاب را جایگشت می‌نامیم. در واقع جایگشت ترتیبی از مجموعهٔ n شیء با آرایش معین می‌باشد. جایگشت هر $r \le n$ مقدار از این اشیاء با آرایش معین، جایگشت r تایی از n شیء نامیده می‌شود.

به طور مثال، تعداد جایگشت ۳ تایی از ۶ شیء حروف a، b، c، d، e، f را می‌خواهیم پیدا کنیم. اگر هر کلمه سه حرفی را با سه کادر نشان دهیم :

$$\begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ ۶ & ۵ & ۴ \end{array}$$

حرف اول می‌تواند به ۶ حالت مختلف انتخاب شود و در پی آن حرف دوم به ۵ حالت مختلف و متعاقب آن نیز حرف آخر به ۴ حالت متفاوت می‌تواند انتخاب شود. طبق اصل شمارش،نوشتن $۱۲۰ = ۴ \times ۵ \times ۶$ واژه سه حرفی از شش حرف فوق، بدون حرف تکراری ممکن می‌شود.

فرمول جایگشت از دستورالعمل مثال فوق استنتاج می‌شود. عنصر اول در جایگشت r شیء از n شیء می‌تواند به n طریق مختلف انتخاب شود. متعاقب آن عنصر دوم جایگشت به $n-۱$ طریق مختلف و به دنبال آن عنصر سوم جایگشت به $n-۲$ روش متفاوت انتخاب می‌گردد. با ادامهٔ این روش، عنصر r اُم در جایگشت r تایی به $n-(r-۱) = n-r+۱$ روش مختلف انتخاب می‌شود. جایگشت r تایی از n شیء را با $P(n,r)$ نشان می دهیم.

قضیه :

$$p(n,r) = n(n-۱)(n-۲)...(n-r+۱) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

طرف دوم فرمول فوق از رابطهٔ زیر حاصل شده است :

$$n(n-۱)(n-۲)...(n-r+۱) = \frac{n(n-۱)(n-۲)...(n-r+۱)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

در حالت خاص که $r = n$ داریم :

$$p(n,n) = n(n-۱)(n-۲)\ ...\ ۳ \times ۲ \times ۱ = n!$$

یعنی n جایگشت برای n شیء وجود دارد.

جایگشت‌های با تکرار

گاهی جایگشت‌هایی از اشیائی را می‌خواهیم که تعدادی از آنها متشابه هم هستند،که طبق قضیهٔ زیر به دست می‌آیند.

قضیه : تعداد جایگشت‌های n شیء که $n_۱$ تا از آن از نوع اول و $n_۲$ تا از آن از نوع دوم و ... ,$n_۲$ تا از آن از نوع r اُم است، عبارت است از :

$$\frac{n!}{n_۱!n_۲!...n_۳!}$$

قضیهٔ فوق را با یک مثال نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم ساخت تمام کلمات ۵ حرفی ممکن از حروف واژهٔ DADDy مطلوب باشد، در اینجا $۱۲۰ = ۵!$ جایگشت برای اشیاء $D_۱AD_۲D_۳y$ وجود دارد به طوری که سه تا از Dها از هم متمایز هستند.

در این ۱۲۰ جایگشت، ۶ در جایگشت زیر :

$$\begin{array}{ccccc} D_۱D_۲D_۳Ay & , & D_۲D_۱D_۳Ay & , & D_۳D_۱D_۲Ay \\ D_۱D_۳D_۲Ay & , & D_۲D_۳D_۱Ay & , & D_۳D_۲D_۱Ay \end{array}$$

اگر اندیس‌های حرف D در آنها برداشته شود، واژه‌های یکسانی را به وجود می‌آورند .عدد ۶ از این حقیقت نتیجه شده است که برای سه حرف $D_۱, D_۲, D_۳$ در سه بخش اول کلمات تعداد $۶ = ۱ \times ۲ \times ۳ = ۳!$ روش مختلف برای جای‌گیری وجود دارد.

این امر برای هر کدام از بخش‌های دیگر که حرف D ظاهر می‌شود نیز برقرار است، بنابراین به تعداد $\frac{۵!}{۳!} = ۲۰$ واژه متفاوت ۵ حرفی وجود دارد که با استفاده از DADDy قابل ساخت است.

ترکیب

اگر در یک مجموعه، r شیء از n شیء را انتخاب کنیم به طوری که ترتیب آنها مورد توجه نباشد، آن‌گاه ترکیب r شیء از n شیء را به دست آورده‌ایم و این تعداد با $C(n,r)$ نشان داده می‌شود.

به طور مثال، تعداد ترکیبات دو تایی از حروف a، b و c را تعیین می‌کنیم.

بدین ترتیب تعداد ترکیبات در !۲ که برابر تعداد جایگشت‌های هر کدام از آنها است، ضرب می‌شود.

جایگشت	ترکیبات
ab ،ba	ab
ac ،ca	ac
bc ،cb	bc

بنابراین : $p(۳,۲) = C(۳,۲).۲! \Rightarrow C(۳,۲) = \frac{p(۳,۲)}{۲!}$

از آنجا که هر ترکیب r تایی از n شیء تعداد!r جایگشت برای اشیاء معین می‌سازد، بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که :

$$P(n,r) \quad C(n,r).r!$$

$$\Rightarrow C(n,r) = \frac{p(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-۱)!}$$

که البته در بسط دو جمله‌ای داریم :

$$n = \sum_{r=۰}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^{r}$$

ضریب هر جمله $\binom{n}{r}$ برابر است با $\frac{n!}{r!(n-r)!}$، بنابراین :

$$C(n,r) = \binom{n}{r}$$

آموزش بخش‌های فصل هفتم

نگاه کلّی به بخش

در این بخش از کتاب، مفهوم شمارش غیرمستقیم با روش‌های نمودار درختی، جایگشت و ترکیب مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ورود به مطلب : روش‌های شمارش با مثال‌هایی از محیط پیرامون دانش‌آموزان از قبیل شماره شناسنامه، کد ملی و... آغاز شده است. ارائهٔ مثالی از علم زیست‌شناسی، ارتباط ریاضی با علوم دیگر را مشخص می‌کند. در تمامی این مثال‌ها سؤال اصلی این است که چگونه می‌توان حالت‌های مختلف یک آزمایش خاص را مشخص کرد؟

فعّالیت صفحهٔ ۱۷۷

هدف : تعداد حالت‌های دو حرفی یک رشتهٔ چهار حرفی را مشخص کنید.

در این فعالیت، قبل از آموزش روش‌های شمارش، از دانش‌آموزان خواسته شده است تمام رشته‌های دو حرفی چهار باز آلی G , A , T , C را مشخص کنند.

نمایش‌های مختلفی که دانش‌آموزان با دسته‌بندی، رسم جدول و یا نمودار و... ارائه می‌دهند، معنای روشن‌تری از مفهوم روش‌های شمارش ایجاد می‌کنند.

فعّالیت صفحهٔ ۱۷۸

هدف : دانش‌آموزان بتوانند نمودار درختی یک آزمایش را رسم کنند.

برای تعیین همهٔ نتایج محتمل در مورد یک سری آزمایش که هرکدام می‌تواند به صورت‌های محدود انجام گیرد، از طرح نمودار درختی استفاده می‌شود. روش رسم نمودار درختی در ضمن فعالیت تشریح شده است. در نمودار درختی هر مسیر از شاخهٔ اول شروع می‌شود و به شاخهٔ دوم و یا برگ درخت ختم می‌شود. مسیرها را به صورت زوج مرتب می‌توان نوشت.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۷۹

هدف : دانش‌آموزان با استفاده از نمودار درختی و یا جدول، تعداد حالات در هر مسئله را به دست آورند.

اصل ضرب

ورود به مطلب

در بخش قبل، دانش‌آموزان با روش‌های نمودار درختی و جدول برای شمارش آشنا شده‌اند که درک مفهوم اصل ضرب را ساده‌تر می‌کند.

در اصل ضرب بیان می‌شود که هرگاه عملی از دو جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق مختلف قابل اجرا باشد. (که این جزء اول تنه و شاخهٔ اول در نمودار درختی می‌باشد.) و در پی آن جزء دوم به n طریق مختلف انجام می‌شود. (این جزء دوم، شاخه‌های دوم درخت می‌باشند) آن‌گاه انجام آن عمل $m \times n$ حالت مختلف دارد.

و در حالتی که با جدول و یا کادر، تعداد حالات را محاسبه نماییم ؛آن‌گاه :

کادر اول با تعداد m حالت جزء اول عمل و کادر دوم با تعداد n حالت جزء دوم عمل پر می‌شود. بنابراین، آن عمل $m \times n$ حالت مختلف دارد.

$$\frac{\text{جزء دوم عمل}}{n} \times \frac{\text{جزء اول عمل}}{m}$$

در تمام مسائل و مثال‌های مطرح شده تکرار مجاز است مگر آنکه خلاف آن گفته شده باشد.

مسائل صفحهٔ ۱۸۱

۲ــ الف) کد ۱۰۰۱ متناظر با $\{۱,۲,۵,۶\}$

کد متناظر تهی $\{\dots\ \dots\ \dots\}$

ب) تعداد کدهای ۶ تایی را با شش کادر در نظر می‌گیریم هر کادر دو حالت ۰ و ۱ را دارد.

تعداد کدها = $\underset{۲}{\_\_}, \underset{۲}{\_\_}, \underset{۲}{\_\_}, \underset{۲}{\_\_}, \underset{۲}{\_\_}, \underset{۲}{\_\_} \Rightarrow ۲^۶$

تعداد زیرمجموعه $۲^۶$

ج) در حالت کلی تعداد زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, \dots, n\}$ برابر تعداد کدهای n تایی ۱ و ۰ است.

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی ۲^n تعداد کدهای n تایی

۳ــ در تعداد اعداد سه رقمی متقارن خانهٔ اول و خانهٔ آخر باید یکسان باشند. خانهٔ اول با یکی از اعداد یک تا ۹ پر می‌شود پس ۹ حالت دارد. خانهٔ آخر باید شبیه خانهٔ اول باشد، پس یک حالت دارد و خانهٔ وسط ده حالت دارد. $\underset{9}{\underline{\quad}}\ \underset{10}{\underline{\quad}}\ \underset{1}{\underline{\quad}} = 90$

۴ــ الف) پرانتز اول، دو جمله و پرانتز دوم سه جمله دارد، پس :

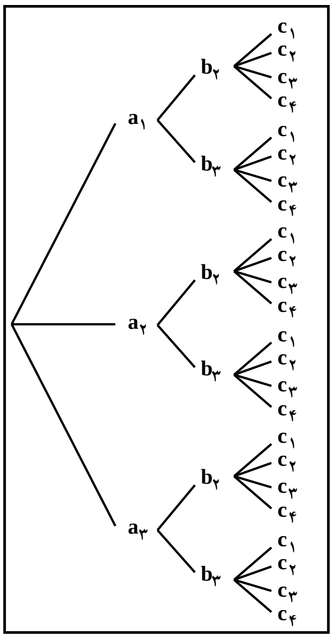
جمله ۶ $\quad 2 \times 3$

ب) جمله ۱۲ $\quad 2 \times 2 \times 3$

۵ــ عدد سه رقمی بدون رقم ۸ است. بنابراین، خانهٔ اول ۸ و ۰ نمی‌توانند باشند، پس ۸ حالت دارد و خانهٔ دوم فقط عدد ۸ را نمی‌تواند داشته باشد، پس به ۹ حالت و خانهٔ سوم نیز ۹ حالت یعنی : $8 = 9 \times 9 \times 8 = \underset{9}{\underline{\quad}}\ \underset{9}{\underline{\quad}}\ \underset{8}{\underline{\quad}}$

۶ــ خانهٔ اول با یکی از سه رنگ، رنگ می‌شود و چون خانهٔ دوم باید با اولی متفاوت باشد، پس برای خانهٔ دوم، دو رنگ داریم و همچنین تا آخر

۴۸ $\quad 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$



۷ــ شاخه‌های انتهایی ۲۲ می‌باشد، پس به ۲۲ طریق این سه نفر را می‌توان رهسپار کرد.

جایگشت

اهداف

دانش‌آموزان بتوانند :

۱) فاکتوریل هر عدد صحیح نامنفی را به دست آورند.

۲) جایگشت r شیء از n شیء را محاسبه نمایند.

پیش‌نیاز

آشنایی با محاسبهٔ تعداد حالات با جدول یا نمودار درختی

ارزشیابی تشخیص

نمودار درختی رسم کنید که حالات مختلف سه بار پرتاب سکه را نشان دهد.

نگاه کلّی به بخش

در این بخش دانش‌آموزان با انجام فعالیت با مثال‌هایی آشنا می‌شوند که در آنها ترتیب انجام اعمال مهم است و جایگشت r شیء از n شیء را ابتدا با جدول سپس با فرمول محاسبه می‌نمایند. همچنین طی یک مثال نماد فاکتوریل معرفی می‌شود.

ورود به مطلب : روش کتاب برای آموزش مفهوم جایگشت، مشخص کردن تعداد حالاتی است که سه دانش‌آموز برای دریافت هدایا می‌توانند بالای سکو روند. با تکمیل جدول و استفاده از اصل ضرب، دانش‌آموزان مفهوم جایگشت را به عنوان ترتیبی از اشیاء یا افراد که در آنان حالات قرار گرفتن کنار یکدیگر، آرایش معینی را به دست می‌دهد، آشنا می‌شوند.

بپرسید : مجموعهٔ حروف a، b، c و d را در نظر بگیرید، آن‌گاه :

الف) تعداد جایگشت‌های چهار حرفی این حروف را پیدا کنید.

ب) تعداد جایگشت‌های سه حرفی این حروف را پیدا کنید.

پ) تعداد جایگشت‌های دو حرفی این حروف را پیدا کنید.

مثال صفحهٔ ۱۸۳

هدف : دانش‌آموزان با نماد فاکتوریل آشنا شوند.

بپرسید : حاصل $۶ \times ۵!$ را به دست آورید.

توسعه دهید : حاصل $n \times (n \quad ۱)!$ را به دست آورید.

بیندیشیم صفحهٔ ۱۸۴

با استفاده از تنها سه رقم صفر و چند نماد فاکتوریل و پرانتز و اعمال ریاضی، عدد ۶ را بسازید.

$$(۰! \quad ۰! \quad ۰!) \quad ۳! \quad ۶$$

مثال صفحهٔ ۱۸۴

هدف : دانش‌آموز با فرمول جایگشت r تایی از n شیء آشنا شوند.

نکتهٔ آموزشی

در کتاب درسی اثبات فرمول جایگشت جزء اهداف آموزشی نمی‌باشد.

در این مثال، ابتدا جایگشت سه تایی از ۱۰ نفر برای دریافت مدال محاسبه می‌شود، سپس به تعداد جایگشت k تایی از n شیء تعمیم داده می‌شود.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۸۵

۳ــ در این سؤال جایگشت سه تایی از ۶ نفر مورد نظر است :

$$P(۶,۳) = \frac{۶!}{۳!} = ۱۲۰$$

مسائل صفحهٔ ۱۸۵

۱ــ الف) تعداد جایگشت پنج تایی از پنج حرف

$$P(۵,۵) \quad ۵! \quad ۱۲۰$$

ب) قرار گرفتن دو حرف a و w کنار هم به دو حالت است که !۲ می‌شود و چون دو حرف را کنار هم قرار بدهیم، پس تعداد جایگشت ۴ تایی از ۴ حرف را داریم :

۲! × ۴!   ۲ × ۲۴   ۴۸

ج) از کل، تعداد جایگشت‌های حالت‌هایی که a و w کنار هم قرار گرفته‌اند را کم می‌کنیم.

۱۲۰   ۴۸   ۷۲

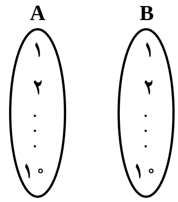
۲ــ اگر com را به عنوان یک حرف در نظر بگیریم، پس تعداد جایگشت‌های شش تایی از شش حرف را می‌خواهیم.

P(۶, ۶)   ۶!

com p u t e r

۳ــ برای عضو ۱ از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B ، ۱۰ حالت وجود دارد وقتی ۱ به یکی از عضوهای مجموعهٔ B تصویر شود برای عضو ۲ از مجموعهٔ A، ۹ حالت به مجموعهٔ B وجود دارد و به همین ترتیب تا عضو آخر

بنابراین :



$\frac{}{۱۰} \times \frac{}{۹} \times \ldots \times \frac{}{۱} = ۱۰!$

۴ــ وقتی عدد پنج رقمی زوج است که رقم یکان آن زوج باشد، پس دو حالت در نظر می‌گیریم :

حالت اول : رقم یکان صفر باشد، پس برای رقم یکان یک حالت داریم، ۹ عدد دیگر داریم و چون باید متمایز باشند، بنابراین :

رقم یکان

۹ ۸ ۷ ۶ ۱ (عددصفر)

۹ × ۸ × ۷ × ۶   ۳۰۲۴

حالت دوم : اگر رقم یکان یکی از اعداد زوج به غیر از صفر باشد، پس برای رقم یکان ۴ حالت داریم و چون رقم صفر در مکان اول سمت چپ نمی‌تواند قرار گیرد، پس ۸ حالت برای این مکان است. و برای مکان بعدی نیز ۸ حالت

رقم یکان

۹ ۸ ۷ ۶ ۴ حالت

زیرا دو رقم از ده رقم در دو مکان قرار گرفته‌اند و برای مکان بعدی ۷ و بعدی ۶ حالت وجود خواهد داشت.

۸ × ۸ × ۷ × ۶ × ۴   ۱۰۷۵۲

کل حالت‌ها :   ۱۳۷۷۶   ۳۰۲۴   ۱۰۷۵۲

۶ــ برای اینکه کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند پس !۳ تعداد حالات چرخش کتاب‌های فیزیک است و برای ۴ کتاب مختلف ریاضی و یک بسته کتب فیزیک، ۵ مکان داریم که !۵ می‌شود.

کل حالات :   ۵! × ۳!

۷ــ ۶ دانش‌آموز اول در ردیف اول قرار می‌گیرند برای دانش‌آموز اول ۱۰ امکان و دانش‌آموز دوم ۹ و . . . و دانش‌آموز ششم ۵ امکان وجود دارد. پس :

۱۱ × ۱۰ × ۹   ۹۹۰

۱۵۱۲۰۰ × ۷۲۰ × ۹۹۰

بیندیشیم صفحهٔ ۱۸۶

حالت اول : هیچ‌کدام هم‌زمان به خط پایان نرسند. ۳ × ۲ × ۱   ۶

حالت دوم : دو نفر هم‌زمان به خط پایان برسند. ۳ حالت

حالت سوم : هر سه هم‌زمان به خط پایان برسند. یک حالت

حالت چهارم : یک نفر اول و دو نفر بعدی با هم دوم شوند. ۳ حالت

اصل جمع ۶   ۳   ۱   ۳   ۱۳

ترکیب

اهداف بخش

آشنایی با مفهوم ترکیب

پیش‌نیاز

آشنایی با جایگشت r تایی از n شیء

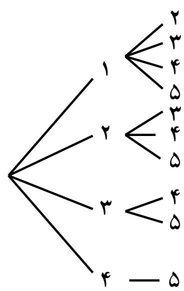
نگاه کلّی به بخش

در این کتاب دانش‌آموزان با مثال‌هایی آشنا می‌شوند که در آنها ترتیب قرار گرفتن اشیاء در انتخاب r شیء از n شیء مورد توجه نیست و با انجام فعالیت‌های آموزشی به فرمول ترکیب می‌رسند.

ورود به مطلب : هدف این بخش آشنایی دانش‌آموزان با مسائلی است که در آنها ترتیب قرار گرفتن اشیاء در انتخاب مهم نیست به همین دلیل مثال‌هایی ارائه می‌شود که ابتدا دانش‌آموزان این مفهوم را درک نمایند درچه مواردی ترتیب اهمیتی ندارد و سپس طی انجام فعالیت‌های آموزشی با فرمول ترکیب آشنا شوند. اثبات فرمول جزء اهداف آموزشی کتاب نیست.

فعّالیت صفحهٔ ۱۸۷

هدف : دانش‌آموزان مسائلی که در آنها ترتیب قرار گرفتن اشیاء مورد توجه نیست را تشخیص دهند.



برای حل این فعالیت می‌توان از نمودار درختی استفاده کرد. شطرنج‌باز شمارهٔ ۱ می‌بایستی با شطرنج‌باز شمارهٔ ۲ و ۳ و ۴ و ۵ بازی کند و شطرنج‌باز شمارهٔ ۲ با شطرنج‌بازهای شماره های ۳ و ۴ و ۵ و شطرنج‌باز شمارهٔ ۳ فقط با شماره‌های ۴ و ۵ و شطرنج‌باز شمارهٔ ۴ فقط با شطرنج‌باز شمارهٔ ۵ بازی می‌کند.

بنابراین هر بازیکن چهار بازی انجام می‌دهد و تعداد کل بازی‌ها را با شمارش شاخه‌های انتهایی که ۱۰ می‌باشد به دست می‌آوریم. واضح است که در قسمت‌های الف، ب و ج ترتیب اهمیتی ندارد.

فعّالیت صفحهٔ ۱۸۷

هدف : دانش‌آموزان با استفاده از جایگشت و تعداد زیرمجموعه‌های ۳ تایی یک مجموعه ۹ عضوی ترکیباتی ۳ تایی از ۹ شیء را به دست آورند.

این فعالیت آموزشی را می‌توان با جدول نیز حل کرد :

زیرمجموعه	جایگشت‌ها
{۱،۲،۳}	۱۲۳،۱۳۲،۲۱۳،۲۳۱،۳۱۲،۳۲۱
{۱،۲،۴}	۱۲۴،۱۴۲،۲۱۴،۲۴۱،۴۱۲،۴۲۱
{۱،۲،۵}	
{۱،۲،۶}	
{۱،۲،۷}	
{۱،۲،۸}	
{۱،۲،۹}	

بنابراین، هر زیرمجموعهٔ سه تایی به تعداد !۳ جایگشت اعداد را دارد.

و برای زیرمجموعه‌های سه تایی مختلف، جایگشت‌های یکسانی وجود ندارد.

بدین ترتیب تعداد زیرمجموعه‌ها در !۳ که برابر تعداد جایگشت‌های هر کدام از آنها ضرب می‌شود و تعداد کل جایگشت‌های ۳تایی از ۹ عضو به دست می‌آید.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ تایی} \times ۳! = P(۹,۳) \Rightarrow a \times ۳! = P(۹,۳) \Rightarrow a = \frac{P(۹,۳)}{۳!} = ۸۴$$

مثال صفحهٔ ۱۸۸

هدف : دانش‌آموزان r ترکیب k تایی از n شیء را با استفاده از فرمول به دست آورند .

همانند فعالیت قبل در این مثال، تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی از یک مجموعه ۱۰ عضوی را پیدا می‌کنیم.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۴ تایی مجموعه ۱۰ عضوی} \times ۴! \quad P(۱۰,۴)$$

$$\Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \frac{P(۱۰,۴)}{۴!} = \frac{\frac{۱۰!}{(۱۰-۴)!}}{۴!} = \frac{۱۰!}{۶!۴!}$$

به همین ترتیب، می‌توان مثال را به تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه n عضوی را که ترکیب k تایی از n شیء تعمیم داد.

$$\binom{n}{k} = C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

شرط $n \geq k$ در این فرمول الزامی است.

بپرسید : اگر $k \quad n$ باشد ؛یعنی $C(n,n)$ چقدر خواهد بود؟

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۸۹

۳ــ ب)

$$\binom{n-۱}{k} + \binom{n-۱}{k-۱} = \frac{(n-۱)!}{k!(n-۱-k)!} + \frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-۱-(k-۱))!}$$

$$= \frac{(n-۱)!}{k!(n-k-۱)!} + \frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-k)!}$$

$$=\frac{(n-k)(n-۱)!+k(n-۱)!}{k!(n-k)!}=\frac{(n-۱)!(n-k+k)}{k!(n-k)!}$$

$$=\frac{n(n-۱)!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-۴)!}=\binom{n}{k}$$

۴ــ انتخاب صفر شیء از n شیء یعنی انتخابی نداشته باشیم، پس $\binom{n}{۰}=۱$
از طرف دیگر :

$$\binom{n}{۰}=\frac{n!}{۰!(n-۰)!}=\frac{n!}{n!}=۱$$

۷ــ

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

مسائل صفحهٔ ۱۹۰

۱ــ طرف اول : تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از مجموعهٔ n عضوی است :

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی $=\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\dots+\binom{n}{n}$

طرف دوم : برای تعیین تعداد زیرمجموعه‌های هر مجموعه ۸ عضوی، برای هر عضو ۲ حالت وجود دارد.

بنابراین :

$$\underset{۲}{\text{عضو اول}}\times\underset{۲}{\text{عضو دوم}}\times\dots\times\underset{۲}{\text{عضو n ام}}$$

تعداد زیرمجموعه‌ها $\Rightarrow ۲^n$

$$\Rightarrow\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\dots+\binom{n}{n}=۲^n$$

۲ــ حداقل یک نفر کشتی‌گیر باشد :

هر سه کشتی‌گیر   دو نفر کشتی‌گیر و یک نفر وزنه‌بردار   یک نفر کشتی‌گیر و ۲ نفر وزنه‌بردار

$$\binom{۵}{۲}\times\binom{۷}{۱}+\binom{۵}{۱}\times\binom{۷}{۲}+\binom{۷}{۳}$$

۳ــ ورزشکاران از ۵ کشور

$$C(۵,۲)=\frac{۵!}{۲!۳!}=۱۰$$

۴ــ $\binom{۱۰}{۰}+\binom{۱۰}{۲}+\binom{۱۰}{۴}+\dots+\binom{۱۰}{۱۰}=۵۱۲$

۵ــ $\binom{۷}{۳}=۳۵$

۶ــ سه شهر از ۵ شهر $\binom{۵}{۳}\underbrace{\binom{۲۰}{۱}\binom{۲۰}{۱}\binom{۲۰}{۱}}$

آن شهر انتخاب یک دانش‌آموز از ۲۰ دانش‌آموز

سؤالات تکمیلی

۱ــ اگر تکرار مجاز نباشد :

الف) با شش رقم ۲، ۳، ۵، ۶، ۷، ۹ چند عدد سه رقمی می‌توان تشکیل داد؟

ب) چه تعدادی از این اعداد کوچک‌تر از ۴۰۰ است؟

پ) چه تعدادی از آنها زوج است؟

ت) چه تعدادی از آنها فرد است؟

ث) چه تعدادی از آنها مضرب ۵ است؟

پاسخ‌ها

الف) ۱۲۰   ۴ × ۵ × ۶

ب) کادر سمت چپ فقط ارقام ۲ یا ۳ است،زیرا تمام اعداد بایستی از ۴۰۰ کوچک‌تر باشند.

$\boxed{۲}\boxed{۵}\boxed{۴}$

پ) کادر سمت راست فقط با ۲ طریق اعداد ۲ یا ۶ پر می‌شود کادر طرف چپ به ۵ طریق و کادر میانی به ۴ طریق پر می‌شوند.   ۴۰   ۲ × ۴ × ۵ $\boxed{۵}\boxed{۴}\boxed{۲}$

ت) چون اعداد بایستی فرد باشند کادر طرف راست فقط به ۴ طریق به وسیلهٔ ارقام ۳، ۵، ۷ و ۹ پر می‌شود کادر طرف چپ به ۵ طریق و کادر میانی نیز به ۴ طریق پر می‌شود.

$\boxed{۵}\boxed{۴}\boxed{۴}$ ۸۰ = ۴ × ۴ × ۵

ث) از آنجا که اعداد بایستی مضرب ۵ باشند، کادر طرف راست فقط به یک طریق به وسیله رقم ۵ پر می‌شود کادر طرف چپ به ۵ طریق و کادر میانی به ۴ طریق پر می‌شود.

$\boxed{۵}\boxed{۴}\boxed{۱}$ ۲۰ = ۱ × ۴ × ۵

۲ــ الف) به چند طریق ۳ دانش‌آموز سال اول و ۲ دانش‌آموز سال دومی در یک ردیف قرار بگیرند.

ب) آنها به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار بگیرند، با این شرط که اولی‌ها کنار هم و دومی‌ها نیز کنار هم قرار بگیرند.

پ) آنها به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار بگیرند، با این شرط که دومی‌ها کنار هم بنشینند.

پاسخ‌ها

الف) ۵ نفر می‌توانند ۱۲۰   ۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ طریق در یک ردیف بنشینند.

ب) در تمام موارد اولی‌ها به ۶   ۱ × ۲ × ۳   !۳ طریق و دومی‌ها به !۲   ۱ × ۲ کنار هم بنشینند؛ از این رو، روی هم رفته ۲۴   !۲ × !۳ × ۲ طریق وجود دارد.

پ) برای افراد مطابق با اینکه دومی‌ها کنار هم باشند !۲ برای دومی‌ها داریم و ۳ کادر برای ۳ دانش‌آموز اول و یک کادر برای دانش‌آموز دوم $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ در نظر می‌گیریم که در این صورت !۲ × !۴ طریق می‌توانند کنار هم بنشینند.

۳ــ در یک امتحان از بین ۱۰ سؤال دانش‌آموز بایستی ۸ سؤال را پاسخ دهد.

الف) او این سؤالات را به چند طریق می‌تواند انتخاب کند؟

ب) اگر او بخواهد حتماً به ۳ سؤال اول پاسخ دهد انتخاب او به چند طریق خواهد بود؟

پ) اگر او بخواهد از ۵ سؤال اول حداقل به ۴ سؤال جواب دهد انتخاب او به چند طریق خواهد بود؟

پاسخ‌ها

الف) $\binom{۱۰}{۸}=۴۵$ ب) $\binom{۷}{۵}=۲۱$

پ) اگر به هر ۵ سؤال اول جواب دهد : $\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۵}=۱۰$

ج) اگر به ۴ سؤال از ۵ سؤال اول جواب دهد : $\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۴}=۲۵$

چ) کلاً انتخاب نماید : ۳۵ ۲۵ ۱۰

۴ــ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب بزرگ، ۴ کتاب متوسط و ۳ کتاب کوچک را در یک قفسه جای داد، با این شرط که کتاب‌های هم‌اندازه با هم قرار بگیرند؟

$(۵!\times ۴!\times ۳!)۳!=$ $\square\square\square$

۵ــ ۱۰ نقطه A، B، . . . روی یک صفحه قرار دارند به طوری که هیچ‌یک از سه تایی آنها روی یک خط قرار نمی‌گیرند.

الف) با این نقاط چند خط مستقیم می‌توان رسم کرد؟ $=\binom{۱۰}{۲}$

ب) چه تعداد از این خطوط از A یا B عبور نمی‌کنند؟ $=\binom{۸}{۲}$

پ) با این نقاط چه تعداد مثلث می‌توان تشکیل داد؟ $=\binom{۱۰}{۳}$

ت) چه تعداد از این مثلث شامل نقطه A می‌شوند؟ $=\binom{۹}{۳}$

ث) چه تعداد از این مثلث‌ها شامل ضلع AB است؟ $=\binom{۸}{۱}$

۶ــ محاسبه کنید :

الف) $\dfrac{(n+۱)!}{n!}=\dfrac{(n+۱)\cancel{(n)!}}{\cancel{n!}}=n+۱$

ب) $\dfrac{n!}{(n-۲)!}=\dfrac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}}=n(n-۱)$

پ) $\dfrac{(n-۱)!}{(n+۲)!}=\dfrac{\cancel{(n-۱)!}}{(n+۲)(n+۱)n\cancel{(n-۱)!}}=\dfrac{۱}{(n+۲)(n+۱)n}$

ت) $\dfrac{(n-r+۱)!}{(n-r-۱)!}=\dfrac{(n-r+۱)(n-r)\cancel{(n-r-۱)!}}{\cancel{(n-r-۱)!}}=(n-r+۱)(n-r)$

نمونه سؤالات ارزشیابی پایانی

۱ــ در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ ششم ۴۲ و جملهٔ دهم ۵۸ می‌باشد، دنباله را مشخص کنید.

۲ــ اگر ۱ $\;۳x\;\; f(x)$ باشد، آن‌گاه $f(\sqrt{۲})$ ، $f(x \quad ۱)$ و $f(x^{۲})$ را به دست آورید.

۳ــ نمودار تابع ۴ $\; x \;\; f(x)$ را طوری رسم کنید که دامنه آن مجموعهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲ باشد.

۴ــ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\sqrt{\dfrac{۱-۲x}{x+۱}}$

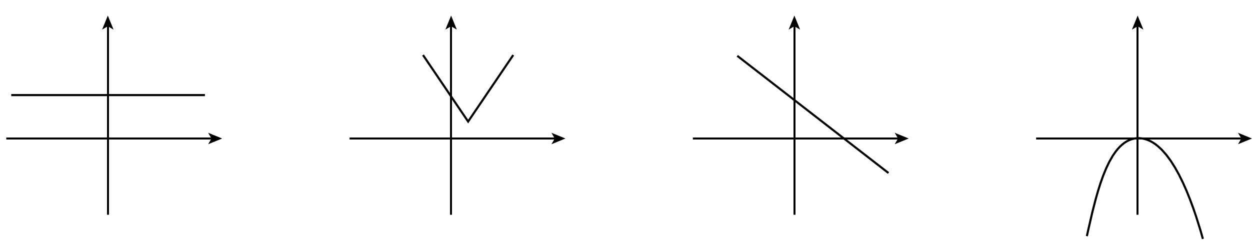
ب) $y=\sqrt{۳x-۱+۵}$

پ) $y=\dfrac{-۳}{x^{۲}-۲}$

ت) $y=۲|x|-\dfrac{۱}{۲}$

۵ــ دو تابع f و g را چنان رسم کنید که هر دو دارای دامنه و برد مساوی باشند، ولی نمودارهای آنها یکسان نباشد.

۶ــ نمودار کدام‌یک از توابع زیر یک به یک است؟ چرا؟

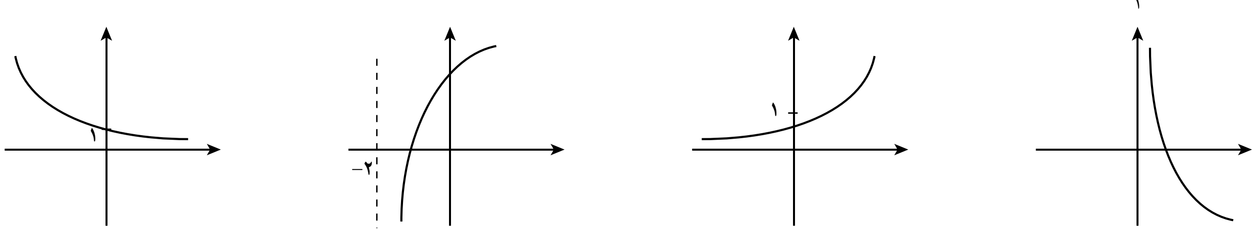


۷ــ دو تابع $f \quad \{(۱, a \quad ۱), (\; ۲, b \quad ۱)\}$ و $g \quad \{(۳, ۱), (a \quad ۱, \; ۲)\}$ معکوس یکدیگرند. a و b را پیدا کنید.

۸ــ نامعادله $\dfrac{-x^{۲}-۲x+۳}{x-۱}>۰$ را حل کنید.

۹ــ با توجه به نمودارها کدام شکل نمودار کدام تابع می‌تواند باشد؟

الف) $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ ب) $y=\dfrac{۱}{۲}\times ۲^{x}$ پ) $y \quad \log_{۲}(x \quad ۲)$ ت) $y=(\dfrac{۱}{۲})^{x}$



۱۰ــ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\log(x^{۲}\quad ۱)\quad \log(x\quad ۲)\quad \log(x\quad ۲)$$

۱۱ــ مقدار عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \log_{۱۰} ۰/۰۰۱ - \log_{۳} ۸۱ - \log_{۲} \frac{۱}{۶۴}$$

۱۲ــ معادلهٔ یک تابع سینوسی $y \quad a\ \sin bx$ را بنویسید که برد آن $[\ ۴, ۴]$ و دورهٔ تناوب آن ۹ است را بنویسید.

۱۳ــ مساحت متوازی‌الاضلاعی که اندازهٔ دو قطر آن ۸ و ۶ و زاویه بین آنها ۱۲۰° است را به دست آورید.

۱۴ــ وزنه‌ای به یک فنر وصل است به گونه‌ای که به طور پیوسته پایین و بالا می‌رود. فاصلهٔ وزنه از نقطهٔ مقابل بعد از t ثانیه از رابطه $d = -۳\cos\frac{b}{۵}t$ به دست می‌آید. بیشترین فاصلهٔ وزنه از نقطهٔ تعادل پس از چند ثانیه برای اولین بار اتفاق می‌افتد؟

۱۵ــ چند جایگشت ۵ تایی از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ می‌توان نوشت؟

۱۶ــ به چند طریق می‌توان ۴ کتاب ریاضی، ۳ کتاب فیزیک و ۵ کتاب ادبیات متمایز را در یک قفس قرار داد به طوری که همه کتاب‌های دارای یک موضوع کنار هم باشند؟

۱۷ــ در رابطهٔ زیر مقدار n را پیدا کنید.

$$P(n, ۴)\quad ۴۲P(n, ۲)$$

۱۸ــ با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد زوج با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۱۹ــ در یک آپارتمان ۱۴ خانوار زندگی می‌کنند. می‌خواهیم یک مدیریت شامل ۵ نفر از آنها تشکیل دهیم از هر خانوار فقط زن یا شوهر می‌تواند عضو مدیریت باشد. به چند طریق می‌توان مدیریت را انتخاب کرد؟

منابع

۱ــ مهارت‌های آموزشی (روش‌ها و فنون تدریس)، حسن، انتشارات سمت، ۱۳۸۹

۲ــ بهبود بخشی دستاورد شاگردان در ریاضیات (مجموعه رویه های آموزشی)، کریستین، داگلاس جی. سبولا، آماگروز، دفتر همکاری‌های علمی بین‌المللی وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۸۰

۳ــ پیش‌نویس راهنمای برنامه درسی ریاضی

۴ــ کتاب معلم ریاضیات ۱، بخشعلی زاده، بروجردیان و ...، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، ۱۳۹۰

۵ــ فرهنگ ریاضیات، گروه ریاضی انتشارات مدرسه، چاپ چهارم، ۱۳۸۶