بـا توجه بـه اینکـه نمودار هر تابع با وارونش نسبت بـه نیمساز ربع اوّل و سوّم قرینه مـی‌باشد، نمودار تابع لگـاریتمی نیز معرفی می‌شود.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۰۴ : در این تمرین، دانش‌آموزان علاوه بر آشنایی مختصر با مفاهیمی همچون شکافت هسته‌ای اورانیوم، با یکی از کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی در مسائل طبیعی آشنا می‌شوند.

فعّالیت صفحهٔ ۱۰۵

هدف : به دست آوردن جدول مقادیر توابع $y\ \ 2^x$ و $y = \log_2 x$ و رسم نمودار این تابع با استفاده از جدول مقادیر و یافتن دامنه و برد هر کدام از توابع با استفاده از نمودار آنها

مثال صفحهٔ ۱۰۷

در این مثال، دانش‌آموزان فرا می‌گیرند، برای رسم یک تابع لگاریتمی مانند $y\ \ \log_2 (x\ \ 1)$، لازم است مقادیری از دامنهٔ لگاریتم را انتخاب نمایند و مقدار قابل قبول برای این تابع، مقادیر $x>2$ می‌باشد و در رسم نمودار، خط $x\ \ 1$، مجانب قائم منحنی است.

فعّالیت صفحهٔ ۱۰۷

در این فعّالیت، دو تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = (\frac{1}{2})^x$ با استفاده از جدول مقادیر در یک دستگاه مختصات رسم می‌شود و با توجه به تقارن این دو تابع نسبت به خط $y\ \ x$، به این نتیجه می‌رسیم که این دو تابع معکوس یکدیگرند. بدین ترتیب، دانش‌آموزان باید بتوانند معکوس بودن دو تابع $y = (\frac{1}{3})^x$ و $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ را تشخیص دهند.

در صورتی که مبنای لگاریتم، عددی بزرگتر از یک باشد، تابع لگاریتمی به سمت منفی محور yها نزدیک می‌شود .اگر مبنا، عددی بین صفر و یک باشد، نمودار تابع لگاریتمی به سمت مثبت محور yها نزدیک می‌شود.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۰۹

در این تمرین در کلاس یک نمونه از سؤالات جور کردنی ارائه شده است، که دانش‌آموزان با توجه به آنچه فرا گرفته‌اند، باید ضابطهٔ تابع و نمودار آن را به هم مربوط کنند. در سؤالات جورکردنی، معمولاً تعداد سؤال از پاسخ‌های داده شده بیشتر است، به همین دلیل ۵ ضابطهٔ تابع و ۴ نمودار داده شده است.

با توجه به دامنهٔ تابع $y\ \ \log_2 (x\ \ 2)$ پس ضابطهٔ الف به نمودار ۲ مربوط است و ضابطهٔ $y\ \ 2^{\ x}$ با توجه به اینکه یک تابع نمایی زوال می‌باشد با نمودار ۳ و ضابطهٔ $y = 2 + \log_2 x$ با نمودار ۴ مربوط می‌شوند.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۱۱

هدف : دانش‌آموزان بتوانند با تبدیل عبارت لگاریتمی به یک عبارت توانی، مقدار مجهول را به دست آورند.

در قسمت دوّم این تمرین در کلاس، دانش آموزان فرا می‌گیرند لگاریتم هر عدد در پایه خودش، مساوی یک است.

هدایت کنید : برای حلّ معادلات لگاریتمی به شکل کلّی $\log_a u = \log_a v$ ، پس از محاسبهٔ مقدار مجهول، لازم است بررسی شود آیا جواب قابل قبول است یا خیر؟ و همچنین می‌توان در ابتدا دامنهٔ هر یک از عبارت‌های لگاریتمی را محاسبه و سپس معادلهٔ لگاریتمی را حل کرد و در پایان مشخص کرد که آیا جواب به دست آمده قابل قبول است یا خیر؟

قوانین (قضایای) لگاریتم : دانش‌آموزان با استفاده از تعریف لگاریتم، قضیهٔ مربوط به آن را اثبات می‌کنند. قوانین ارائه شده در این بخش قضایای اصلی لگاریتم‌اند که در محاسبهٔ لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی کاربرد فراوانی دارند.

توصیهٔ آموزشی

با توجه به بحث‌هایی که در خصوص دامنهٔ توابع مطرح شد، دانش‌آموزان باید به این نتیجه رسیده باشند که درحل معادلات به ویژه معادلات لگاریتمی، محاسبهٔ دامنه از اساسی‌ترین بخش حل معادلات لگاریتمی است، که البته می‌توان برای سهولت، پس از حل معادلات لگاریتمی، قابل قبول بودن جواب‌های معادله را بررسی کرد.

هدایت کنید : کاربرد قوانین لگاریتم، در محاسبهٔ لگاریتم اعداد و کاربرد معادلات لگاریتمی، در مسائل مطرح شده است. برای قوانین مطرح شده در مسئلهٔ ۲ صفحهٔ ۱۱۷ نیز می‌توان کاربرد آنها را در حل مسائل نشان داد. به عنوان مثال، می‌توان قانون تغییر مبنا $\log_c a = \frac{\log_e a}{\log_e c}$ را برای محاسبهٔ لگاریتم اعدادی که مبنای غیر از ۱۰ دارند، به کار برد. (ماشین حساب فقط لگاریتم اعداد در مبنای ۱۰ را محاسبه می‌کند).

$$\log_۳ ۲ = \frac{\log_{۱۰} ۲}{\log_{۱۰} ۳}$$

مسائل صفحهٔ ۱۱۵

۱ـ

$$\log_c (ab)d = \log_c ab + \log_c d = \log_c a + \log_c b + \log_c d$$

۳ـ

$$\log_c a^n = \log \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n} = \overbrace{\log_c a + \log_c a + \cdots + \log_c a}^{n} = n \log_c a$$

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۱۵

$$\log_c a^n = n \Rightarrow a = c^n \Rightarrow a^x = (c^n) = c^{nx} \Rightarrow a^x = c^{nx} \Rightarrow a^x = c^{nx} \Rightarrow \log_c a^x = nx \Rightarrow \log_c a^x = x \log_c a$$

مسائل صفحهٔ ۱۱۷

۲ـ

$$۱)\ \log_c \frac{۱}{x} = \log_c ۱ - \log_c x = ۰ - \log_c x = -\log_c x$$

$$۲)\ y = \log_c a \Rightarrow a = c^y \Rightarrow \log_c a = \frac{\log_e a}{\log_e c}$$

$$\frac{\log_e a}{\log_e c} = \frac{\log_e c^y}{\log_e c} = \frac{y \log_e c}{\log_e ۲} = y$$

$$۳)\ y = \log_c a \Rightarrow a = c^y \Rightarrow a = c^{\log_c a}$$

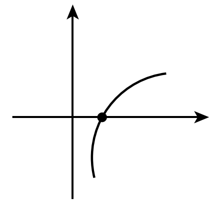
$$۴) \log_c c^a = a \log_c c = a$$

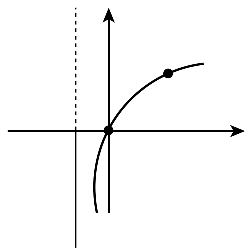
۳ـ

$$۱) \log_{۲۷} ۳ = \log_۳ ۲۷ = \log_{۲۷} ۳ \times \log_۳ ۳^۳ = ۳ \log_{۲۷} ۳ = \log_{۲۷} ۲۷ = ۱$$

$$۳) \log_۳ (\log_۳ (\log_۲ ۸)) = (\log_۳ (۳ \log_۲ ۲)) = \log_۳ (\log_۳ ۳) = \log_۳ ۱ = ۰$$
$$y = \log_۲ x$$

۷ـ





برای رسم نمودار $y \quad \log_{۲}(x \quad ۱)$ ، نمودار تابع $y=\log_{۲} x$ را در امتداد محور xها یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم.

۸ـ

$$PH=-\log_{۱۰}\left[۲/۹\times ۱۰^{-۴}\right]=-(\log_{۱۰} ۲/۹+\log_{۱۰} ۱۰^{-۴})=-(\log\frac{۲۹}{۱۰}-۴\log_{۱۰} ۱۰)$$

$$=(\log ۲۹-\log_{۱۰} ۱۰-۴\log_{۱۰} ۱۰)=-(۱/۴۶-۱-۴)=-۳/۵۴$$

۳)

$$PH=۷\Rightarrow -\log_{۱۰}\left[H_{۳}O^{+}\right]=۷\Rightarrow \log_{۱۰}[H_{۳}O]=-۷\Rightarrow x=۱۰^{-۷}$$

سؤالات تکمیلی

۱) اگر تعداد باکتری‌های موجود در یک نمونه، از فرمول $Q(t)=۲۵۰\times ۳^{\frac{۱}{۴}}$ به دست آید. که t نشان دهندهٔ زمان بر حسب روز است، محاسبه کنید :

الف) تعداد اولیهٔ باکتری‌ها را

ب) تعداد آنها را بعد از گذشت ۴ روز

پ) تعداد آنها را بعد از گذشت ۱۴ روز

۲) اگر یک ایزوتوپ رادیواکتیو، طبق فرمول $Q(t)=Q\times ۲^{\frac{-۱}{۱۲}}$ تجزیه شود که در آن t نشان دهندهٔ زمان برحسب سال است. تعیین کنید چه کسری از مقدار اولیهٔ این ماده پس از گذشت یک سال باقی می‌ماند.

۳ــ با استفاده از روابط بین توابع لگاریتمی، مقدار عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\log_{۳} ۳^{۵}$ | پ) $\log_{۵}(\quad ۲۵)$

ب) $\log_{a} \sqrt[۳]{a^{۲}}$ | ت) $۵^{\ og ۳}$

ث) $۳۶^{\log_{۶} ۷}$ | ج) $۱۰^{(\frac{۱}{۲})\log ۳}$

چ) $۲^{-۳\log_{۲} ۵}$

۴ــ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$y \quad \log_{۳}(x \quad ۲)$

$y \quad ۳ \quad \log_{۲}x$

$y = ۲ \times (\frac{۳}{۲})^{x-۱}$

نمـونه سؤالات ارزشیابی پایانی

۱ــ جملهٔ عمومی دنباله ای به صورت $a_n = \frac{۳n + n^۲}{n^۲ + n}$ می‌باشد، جملهٔ چندم این دنباله عدد $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد؟

۲ــ دنبالهٔ حسابی مثال بزنید که جملات آن به سمت ۲ نزدیک شوند.

۳ــ اعداد $\sqrt[۳]{۴}$ و $\sqrt[۳]{-۴}$ را با فرجهٔ ۶ بنویسید.

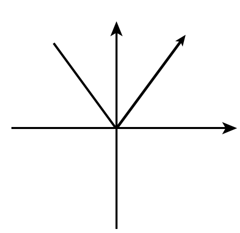
۴ــ واسطهٔ هندسی مثبت بین دو عدد $\sqrt[۶]{۲}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ را به‌دست آورید.

۵ــ سودی که از تولید یک کالا توسط یک شرکت حاصل می‌شود، از معادلهٔ $y \quad ۶x \quad ۲۰۰$ به‌دست می‌آید. در این معادله، x، تعداد کالا و y، سود حاصل بر حسب تومان می‌باشد. این شرکت چه تعداد کالا تولید کند تا سوددهی آغاز شود؟

۶ــ برای یک تابع خطی داریم $f(۰) \quad ۲ \, , f(۱) \quad ۵$، نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

۷ــ تابع $y \quad ۳ \quad ۲x$ با دامنهٔ $\{-۲,۰,\frac{۱}{۲}\}$ مفروض است؛ برد این تابع را به‌دست آورید.

۸ــ نمودار رابطهٔ h(x) در زیر رسم شده است. نمودار وارون آن را رسم کنید.



۹ــ با توجه به نمودار تابع $y \quad ۲^x$، نمودار توابع $y \quad ۲^{x \quad ۱}$ و $y \quad ۲^x \quad ۱$ را رسم کنید. محل تلاقی هر نمودار با محور عرض‌ها را مشخص کنید.

۱۰ــ در جدول زیر آیا تغییرات تابع، نمایی است؛ چرا؟

x	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
y	۱۵	۲۱	۲۷	۳۳	۳۹	۴۵

۱۱ــ با استفاده از قوانین لگاریتمی، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $y \quad \log \sqrt{۳۲}$

ب) $y \quad \log_{۲} \log_{۵} ۲۵$

۱۲ــ نمودار تابع $f(x) \quad \log_{۲} x \quad ۱$ را رسم کنید.

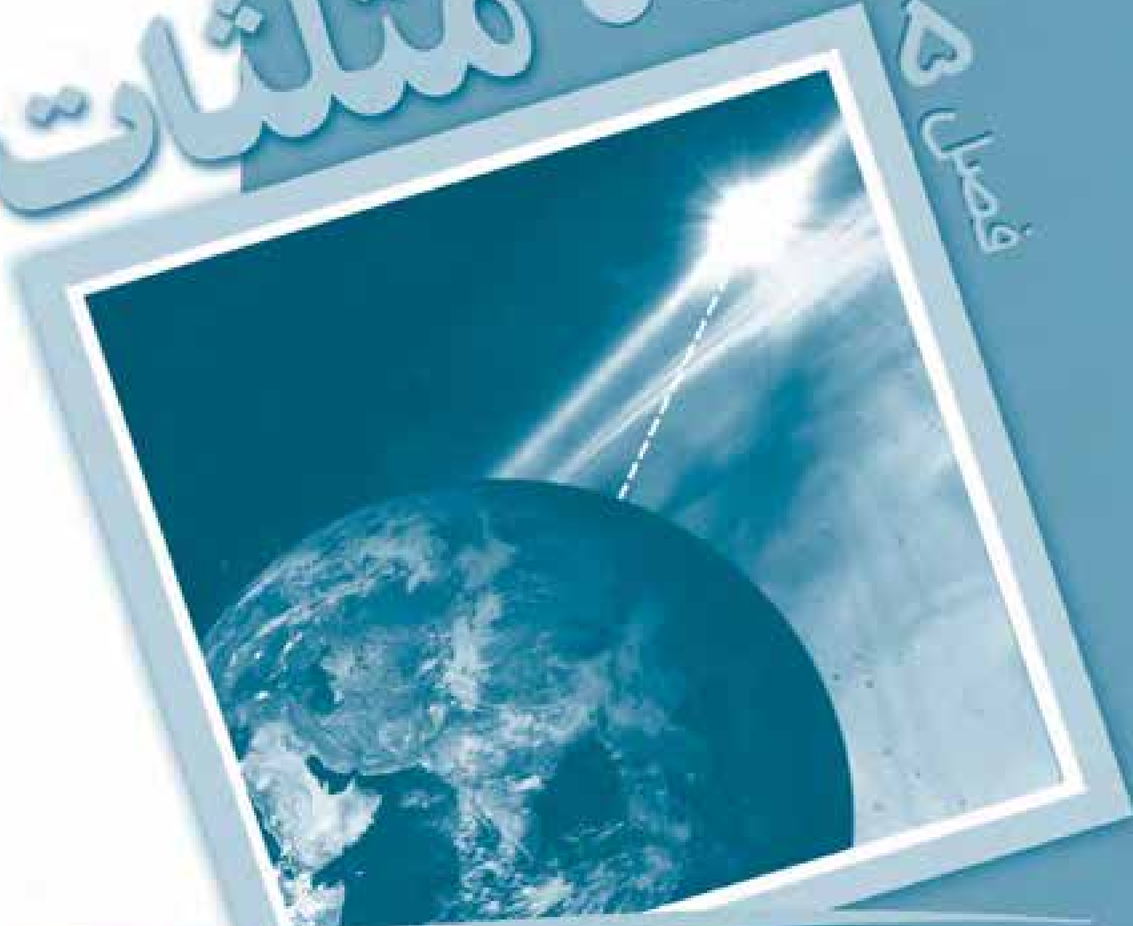
۱۳ــ معادله لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log_{۳} x = \frac{۱}{۴} \log_{۳} ۱۶ + \log_{۳} ۴۹$$

۱۴ــ اگر $\log_{۵} ۷ = a$, $\log_{۵} ۸ = b$ باشد، حاصل لگاریتم $\log_{۸} ۷$ را بر حسب a و b بنویسید.

فصل ۵

مثلثات



نگاه کلّی به فصل پنجم

اهداف کلّی

۱ــ آشنایی با واحدهای اندازه‌گیری زاویه و روش تبدیل آنها به یکدیگر

۲ــ آشنایی با دایرهٔ مثلثاتی

۳ــ به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی tan,cos,sin هر نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی

۴ــ به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های بین صفر تا ۲π رادیان که مقدار یکسانی دارند.

۵ــ به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه، متمم، مکمل و . . . با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی

۶ــ آشنایی با رابطهٔ بین مفهوم شیب خط و تانژانت زاویه

۷ــ آشنایی با توابع مثلثاتی

۸ــ به دست آوردن دامنه و برد برخی توابع مثلثاتی

۹ــ آشنایی با مفهوم دوره تناوب در توابع مثلثاتی

عملکرد مورد انتظار دانش‌آموزان

دانش‌آموزان باید بتوانند :

۱ــ با استفاده از دوران نیم‌خط حول مبدأ، اندازهٔ جبری هر زاویه را نمایش دهند. (زاویه را در موقعیت استاندارد رسم کنند)

۲ــ رادیان را تعریف کنند.

۳ــ واحدهای اندازه‌گیری زاویه(درجه و رادیان) را به یکدیگر تبدیل کنند.

۴ــ اندازهٔ هر زاویه را با معلوم بودن شعاع و طول کمان محاسبه کنند.

۵ــ دایرهٔ مثلثاتی را تعریف کنند.

۶ــ با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی Sin و Cos هر نقطه را به‌دست آورند.

۷ــ بر روی دایرهٔ مثلثاتی، تانژانت هر زاویه را مشخص کنند.

۸ــ نسبت‌های مثلثاتی زوایای بین صفر و ۲π که مقادیر یکسانی دارند را مشخص کنند.

۹ــ با معلوم بودن مختصات هر نقطه، نسبت‌های مثلثاتی آن را به‌دست آورند.

۱۰ــ مقادیر دقیق نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص را به‌دست آورند.

۱۱ــ با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی، زوایای قرینه، متمم، مکمل و . . . را به‌دست آورند.

۱۲ــ شیب خط را با استفاده از تانژانت زاویه محاسبه کنند.

۱۳ــ مفهوم تابع مثلثاتی را درک کنند و مثالی ارائه کنند.

۱۴ــ دامنه و برد توابع $y \quad \sin x$, $y \quad \cos x$ را به‌دست آورند.

۱۵ــ دورهٔ تناوب توابع به‌صورت کلی $y \quad a\sin bx$, $y \quad a\cos bx$ را به‌دست آورند.

۱۶ــ با استفاده از منحنی توابع مثلثاتی، تغییرات تابع را در هر دوره مشخص کنند.

۱۷ــ محل برخورد توابع $y \quad \sin k\theta$, $y \quad (\cos)k\theta$ با محور طول‌ها را پیدا کنند.

۱۸ــ مقادیر حداقل و حداکثر توابع $y \quad a\sin bx$, $y \quad a\cos bx$ را تعیین کنند.

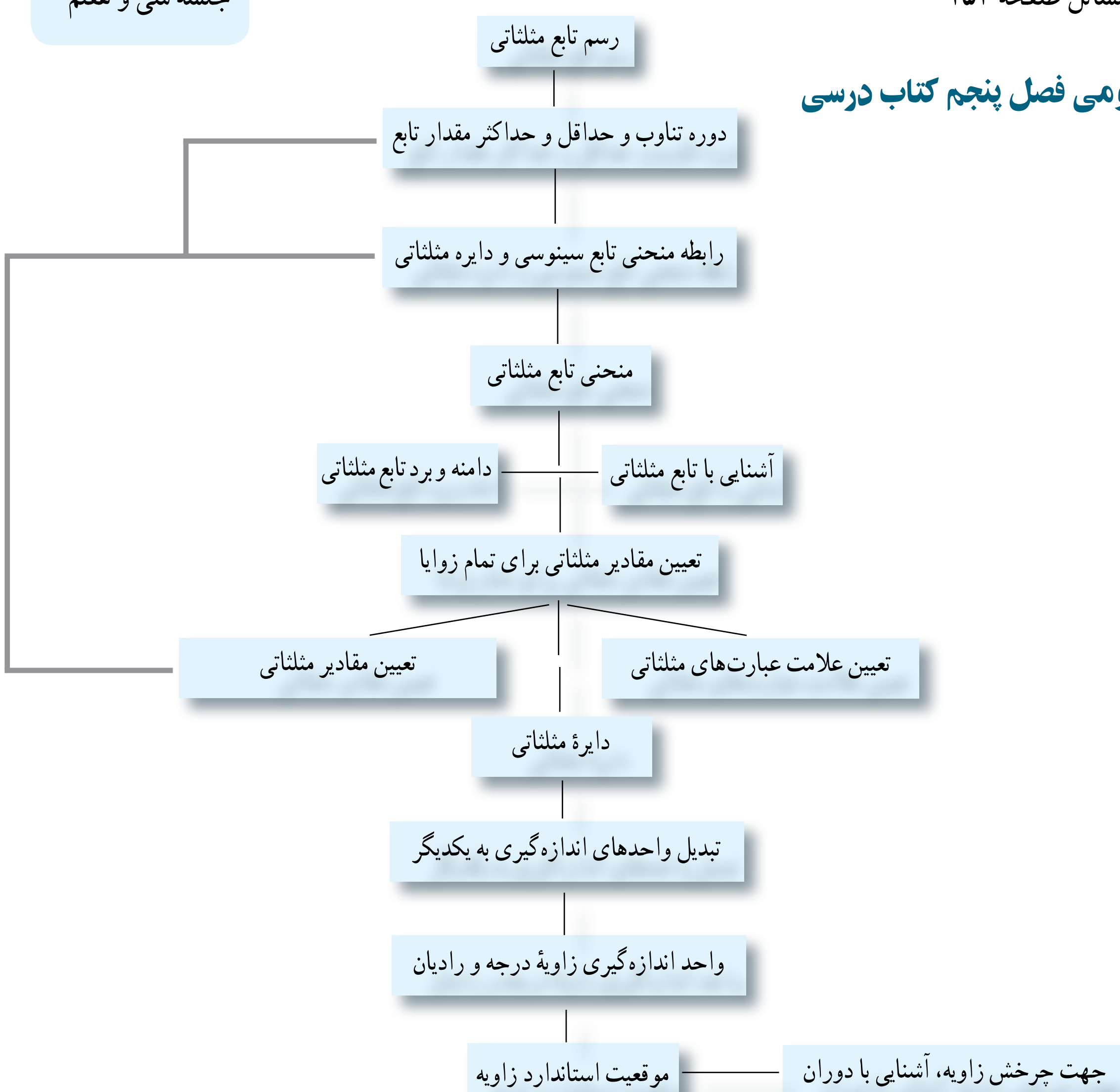
پیش نیازها

ــ آشنایی با مفاهیم اولیهٔ نسبت‌های مثلثاتی و روش به‌دست آوردن آنها برای زوایای یک مثلث قائم‌الزاویه.

زمان‌بندی پیشنهادی برای تدریس این فصل

بیان مفهوم دوران، زاویه، موقعیت استاندارد زاویه و واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه	جلسهٔ بیست و هشتم
حل مسائل صفحهٔ ۱۲۶، شناخت دایرهٔ مثلثاتی	جلسهٔ بیست و نهم
حل مسائل صفحهٔ ۱۳۱، تعیین مقادیر مثلثاتی برای تمام زوایا	جلسهٔ سی‌ام
حل مسائل صفحهٔ ۱۳۶، ارزش‌یابی	جلسهٔ سی و یکم
تابع مثلثاتی، منحنی توابع مثلثاتی تا صفحهٔ ۱۴۱	جلسهٔ سی و دوم
رابطهٔ بین منحنی تابع سینوسی و دایرهٔ مثلثاتی تا پایان صفحهٔ ۱۴۴	جلسهٔ سی و سوم
دورهٔ تناوب، حداقل و حداکثر و رسم نمودار تابع	جلسهٔ سی و چهارم
حل مسائل صفحهٔ ۱۴۷	جلسهٔ سی و پنجم
کاربردهایی از مثلثات	جلسهٔ سی و ششم
حل مسائل صفحهٔ ۱۵۳	جلسهٔ سی و هفتم

نقشهٔ مفهومی فصل پنجم کتاب درسی



دانستنی برای معلّم

علم مثلثات، یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی می‌باشد که در علوم دیگر نیز کاربرد فراوانی دارد و مانند هر علم دیگر در ابتدای آموزش لازم است دانش‌آموزان با مفاهیم، اصول، واژه‌ها و تعاریف آن آشنا شوند. نگاه اجمالی به کتاب درسی سال گذشته نشان می‌دهد که در ورود به مطلب، بدون اینکه دانش‌آموزان شناختی از زاویه‌های جهت‌دار و واحدهای اندازه‌گیری داشته باشند، به تعریف دایرهٔ مثلثاتی پرداخته شده است و از آنجایی که دانش‌آموزان با واحد اندازه‌گیری رادیان آشنا نشده‌اند و از نماد π و $\frac{\pi}{2}$ و ... به عنوان قراردادهایی برای زوایای ۱۸۰ و ۹۰ درجه استفاده می‌کردند، همواره این سؤال در ذهن دانش‌آموزان بدون پاسخ باقی می‌ماند که ۳/۱۴ π چه ارتباطی با ۱۸۰ درجه دارد؟ در واقع بدون اینکه مفهوم رادیان و رابطهٔ بین درجه و رادیان را بدانند از نماد π استفاده می‌کردند. بیان صرف تعاریف، قراردادها و قوانین نه تنها ابزاری برای حل مسئله فراهم نکرده، بلکه پیچیدگی و مبهم بودن علم مثلثات را برای اغلب دانش‌آموزان در پی داشته است. از طرف دیگر، از دایرهٔ مثلثاتی تنها به عنوان معرفی نسبت‌های مثلثاتی و قوانین مربوط به آن استفاده می‌شده، در صورتی که از این دایره می‌توان برای بررسی ارتباط بین واحدهای اندازه‌گیری، حل بعضی از معادلات ساده مانند $\sin x = \frac{1}{2}$ ، دامنه و برد تابع، دورهٔ تناوب y sinx , y cosx و رابطهٔ بین تغییرات منحنی بر روی دایرهٔ مثلثاتی استفاده کرد. رسم توابع مثلثاتی در دوره‌های بالاتر و با استفاده از جدول تغییرات و مفهوم مشتق انجام می‌گیرد، در صورتی که با روش بسیار ساده‌ای بر مبنای دورهٔ تناوب، حداقل و حداکثر مقدار تابع و ریشه‌های توابع y asinbx , y acosbx، می‌توان پیچیدگی رسم منحنی را به ویژه برای دانش‌آموزان هنرستان آسان کرد. این موضوع یکی از مزایای معرفی مثلثات به صورت تحلیلی می‌باشد، به طوری که دانش‌آموزان به این سطح از توانایی دست می‌یابند که با نگاه به یک منحنی مثلثاتی، نوع آن را تشخیص دهند، مقادیر حداقل و حداکثر و دورهٔ تناوب منحنی را پیدا کنند، به عبارت دیگر در پایان، دانش‌آموزان می‌توانند منحنی خوانی کنند. هر کتاب درسی باید به گونه‌ای باشد که دانش‌آموزان در هنگام یادگیری و حل مسئله، مطالب را جذاب بیابند و با کاربرد مطالب در دنیای واقعی و پیرامون خود آشنا شوند که هدف اصلی کتاب نیز همین موضوع بوده است.

آموزش بخش‌های فصل پنجم کتاب درسی
زوایا و اندازهٔ زوایا

اهداف

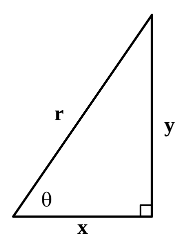
در پایان آموزش این بخش دانش‌آموزان باید بتوانند :

ــ با استفاده از دوران نیم‌خط حول مبدأ، زاویه را در موقعیت استاندارد رسم کنند.

نگاه کلّی به بخش

در سال اوّل دبیرستان، دانش‌آموزان با مفهوم مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه آشنا شده‌اند و مقادیر نسبت‌های ۳۰، ۴۰، ۶۰ درجه را به‌دست آورده‌اند. همچنین با روابط زیر آشنا هستند :

$$\sin\theta = \frac{y}{r}\ ,\ \cos\theta = \frac{x}{r}\ ,\ \tan = \frac{y}{x}$$



اما با توجه به اینکه یک مثلث قائم‌الزاویه، زاویهٔ بزرگتر از ۹۰ درجه ندارد، باید تعریفی ارائه داد که بر مبنای آن بتوان نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه را به‌دست آورد .به همین دلیل در این بخش به تعریف نسبت‌های مثلثاتی و دایرهٔ مثلثاتی می‌پردازیم.

فعّالیت صفحهٔ ۱۲۳

هدف :

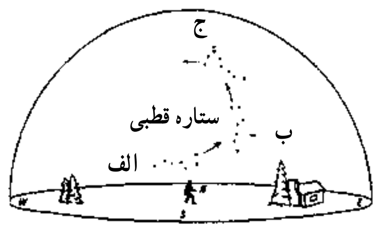
۱ــ هر نسبتی از دوران را به چرخش تبدیل کنند.

۲ــ زاویه و جهت چرخش زاویه را تعریف کنند.

توسعه دهید : به منظور ایجاد انگیزه و آشنایی با کاربرد مثلثات در علم نجوم، حرکت ظاهری ستارهٔ قطبی حول محور زمین ارائه شده است که توضیح کامل مطلب به صورت زیر است :

توضیحات بیشتر راجع به وضعیت ستارهٔ قطبی

کره آسمان : اگر فضانوردی از سفینهٔ خود خارج شود، به هر طرف که نگاه کند، اجرام آسمانی را می‌بیند. حتی ستارگان و خورشید و ماه و . . . را با هم می‌تواند ببیند و چنین تصور می‌کند که داخل کرهٔ بسیار بزرگی قرار گرفته که اجرام آسمانی به سطح داخلی این کره چسبیده‌اند. این کره را تصوری فرضی از کرهٔ آسمان گویند که بسیاری از اندازه‌گیری‌های نجومی روی آن انجام می‌گیرد.



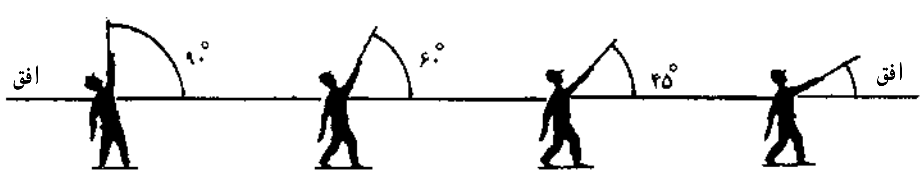
قطب آسمان : قطب آسمان جایی است در فاصلهٔ بسیار نزدیکی از ستارهٔ قطبی که به آن قطب شمال سماوی گویند. قطب شمال سماوی حدود ۰/۷۵ درجه با ستارهٔ قطبی فاصله دارد. (این فاصله اندک باعث شده که عملاً قطب آسمان را در نیمکرهٔ شمالی ستارهٔ قطبی در نظر می‌گیریم). قطب آسمان در آسمان هر محل نقطهٔ ثابتی است که ارتفاع آن از سطح افق ثابت است و هرکس به طرف آن بایستد رو به شمال ایستاده است و ستارگان بدور آن می‌چرخند. در شکل روبه‌رو حرکت صورت فلکی دب اکبر به دور ستارهٔ قطبی در سه حالت مختلف نمایش داده شده است.

مختصات افقی (سمت و ارتفاع) : یک فرد همواره نیمی از کرهٔ آسمان را در بالای سر خود می‌بیند. در واقع آسمان نیمکره یا گنبدی است که از دایرهٔ افق شروع می‌شود و به بالای سرمان در آسمان می‌رسد.

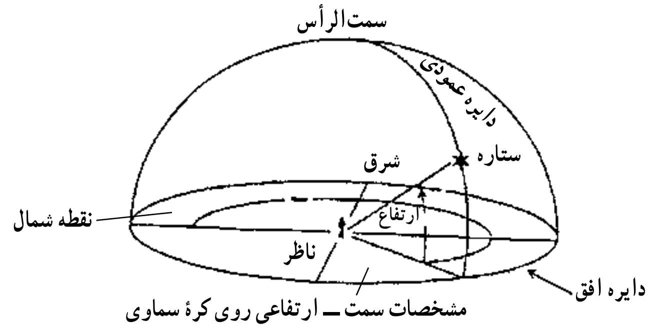
دایرهٔ افق : جایی که به نظر می‌آید آسمان و زمین به یکدیگر رسیده‌اند را افق می‌گویند. این افق (در جایی که موانعی مانند کوه و درخت و ساختمان وجود ندارد، مانند وسط دریا) دایره‌ای را ایجاد می‌کند که آن‌را دایرهٔ افق می‌گویند و صفحه‌ای که روی آن، ایستاده‌ایم و آخرین حد آن دایرهٔ افق است را صفحهٔ افق می‌نامند.

سمت الرأس : نقطه‌ای فرضی در آسمان که درست بالای سر ناظر قرار می‌گیرد را سمت الرأس گویند.

ارتفاع : زاویهٔ بین خطی که ستاره را به محل ایستادن ناظر وصل می‌کند و صفحهٔ افق را ارتفاع ستاره گویند. ارتفاع یک ستاره در آسمان از صفر (لب افق) تا ۹۰ درجه (سمت الرأس) می‌تواند باشد. در شکل با اشاره دست چند ارتفاع مختلف نمایش داده شده است.



سمت : اگر از نقطهٔ سمت الرأس، خطی (ربع دایره‌ای) بکشیم تا از یک ستاره بگذرد و بر صفحهٔ افق عمود شود، این خط را دایرهٔ عمودی گویند (در واقع جزئی از دایرهٔ عمودی است) به هر حال سمت، عبارت است از فاصلهٔ زاویه‌ای بین نقطهٔ شمال روی افق تا محل تقاطع دایرهٔ عمودی یک ستاره با افق. سمت بر حسب درجه بیان می‌شود و از صفر تا ۳۶۰ درجه است. جهت افزایش درجات سمت از شمال به سوی شرق، جنوب و غرب است؛ یعنی دقیقاً سمت نقطهٔ شرق ۹۰ درجه، جنوب ۱۸۰ و غرب ۲۷۰ درجه است. شکل زیر سمت و ارتفاع یک ستاره را نشان می‌دهد.



مشخصات سمت ــ ارتفاعی روی کرهٔ سماوی

مثال صفحهٔ ۱۲۳

اهداف

۱ــ دانش‌آموزان بتوانند هر زاویهٔ معلوم را در موقعیت استاندارد رسم کنند. (مثال ۱)

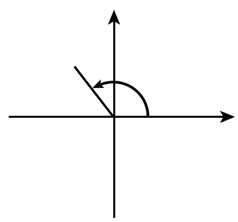
۲ــ زوایای بزرگتر از $۹۰^\circ, ۱۸۰^\circ, ۲۷۰^\circ, ۳۶۰^\circ$، را با تبدیل به $(۹۰^\circ \;\; \alpha), (۳۶۰^\circ \;\; \alpha), (۱۸۰^\circ \;\; \alpha)$ که در آن $۰<\alpha<۹۰$، رسم نمایند. (مثال ۲)

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۲۴

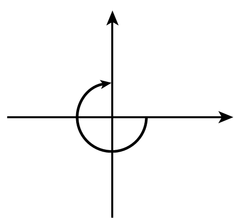
به منظور ارزشیابی تکوینی از اهداف فعّالیت و مثال صفحهٔ ۱۲۳، تمرین در کلاس ارائه شده است.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۲۴

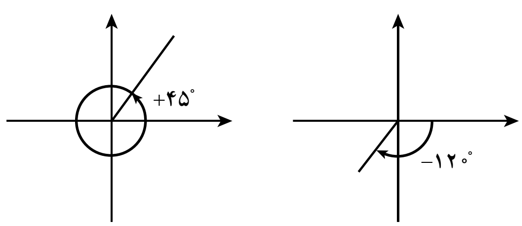
الف) دور کامل $\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۳}\times ۳۶۰ = ۱۲۰^\circ$



ب) دور کامل در جهت عقربه‌های ساعت $\frac{۳}{۴} \Rightarrow -\frac{۳}{۴}\times ۳۶۰ = -۲۷۰^\circ$



۲) ۴۵° یک دور کامل $۴۵^\circ \;\; ۳۶۰^\circ \;\; ۴۰۵^\circ$



واحد دیگری برای اندازه‌گیری

اهداف : دانش آموزان بتوانند :

۱ــ با معلوم بودن شعاع دایره، اندازهٔ کمان مقابل به هر زاویهٔ مرکزی را به‌دست آورند.

۲ــ رادیان را تعریف کنند.

۳ــ واحدهای اندازه‌گیری زاویه (درجه و رادیان) را به یکدیگر تبدیل کنند.

۴ــ اندازهٔ هر زاویه را با معلوم‌بودن شعاع و طول کمان محاسبه کنند.

۵ــ دایره مثلثاتی را تعریف کنند.

۶ــ با استفاده از دایره مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی sin و cos هر نقطه را به‌دست آورند.

۷ــ بر روی دایره مثلثاتی، تانژانت هر زاویه را مشخص کنند.

۸ــ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های بین صفر و ۲π رادیان که مقادیر یکسانی دارند را مشخص کنند.

۹ــ با معلوم‌بودن مختصات هر نقطه، نسبت‌های مثلثاتی آن را به‌دست آورند.

۱۰ــ مقادیر دقیق نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص را به‌دست آورند.

۱۱ــ با استفاده از دایره مثلثاتی، زاویه‌های قرینه، متمم، مکمل و ... را به‌دست آورند.

ورود به مطلب

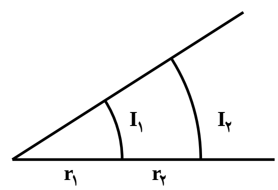
دانش‌آموزان با انجام فعّالیت به روش استقرایی، با مفهوم رادیان که یکی از مفاهیم اساسی در مثلثات است، آشنا می‌شوند. در مرحله‌های ۱ تا ۳، با معلوم بودن شعاع دایره و اندازهٔ مرکزی، اندازهٔ کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی به‌دست می‌آید، سپس در مرحلهٔ چهارم، دانش‌آموزان با استفاده از روش استقرایی رابطهٔ بین کمان و زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن را در هر دایره پیدا می‌کنند، دبیران گرامی، پس از انجام این فعالیت باید واحد اندازه‌گیری رادیان را تعریف کنند.

توسعه دهید : اگر اندازهٔ زاویهٔ مرکزی θ و شعاع دایره r باشند، طول کمان برابر است با :

$$L=\frac{\theta}{۱۸۰}\pi.r \Rightarrow \frac{L}{r}=\frac{\theta}{۱۸۰}\pi$$

پس نسبت $\frac{L}{r}$ تنها به θ بستگی دارد. این نسبت برای تمام کمان‌ها و اندازه θ، ثابت است.

$$\frac{L_۱}{r_۱}=\frac{\theta}{۱۸۰}\pi=\frac{L_۲}{r_۲} \Rightarrow \frac{L_۱}{r_۱}=\frac{L_۲}{r_۲}$$

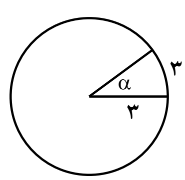


نسبت $\frac{L}{r}$ را اندازهٔ کمان بر حسب رادیان می‌نامیم.

$\frac{L}{r}$ اندازهٔ زاویهٔ مرکزی بر حسب رادیان می‌باشد.

بنابراین هرگاه در دایره، طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی برابر طول شعاع دایره باشد، اندازهٔ این زاویهٔ مرکزی رادیان است.

مثلاً اگر شعاع دایره ۳ باشد، α یک رادیان است.



فعّالیت صفحهٔ ۱۲۵

۱ــ اگر زاویه‌ای که علی چرخیده است، ۹۰ درجه باشد :

مسافت پیموده شده : **محیط دایره** $\frac{۹۰}{۳۶۰}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{۴}\times۲\pi\times۱=\frac{\pi}{۲}=۱/۵۷\,km$

۲ــ مسافت پیموده شده : **محیط دایره** $\frac{۳۱۵^\circ}{۳۶۰}=\frac{۷}{۸}\Rightarrow\frac{۷}{۸}\times۲\pi\times۱=\frac{۷}{۴}\pi=۵/۵\,km$

۳ــ ۴۵ درجه یک هشتم محیط دایره است :

$$۷۶۵۰=۲(۳۶۰)+۴۵=۲(۲\pi)+\frac{۱}{۴}\pi=\frac{۱۷\pi}{۴}=۱۳/۲۵km$$

۴ــ در حالت کلّی :

زاویه طی شده $\theta \Rightarrow \frac{\theta}{۳۶۰}$ **محیط دایره** $\Rightarrow$ مسافت پیموده شده $=۲\pi\times\frac{\theta}{۳۶۰}$

تذکر (فعّالیت صفحهٔ ۱۲۵) : دانش‌آموزان، مقدار ۲πرا برابر ۳۶۰ درجه نشناخته‌اند، بنابراین نباید در عبارت قبلی این دو مقدار را ساده کرد. مسافت پیموده شده برابر است با $۲\pi r \times \frac{\theta}{۳۶۰}$

مثال صفحهٔ ۱۲۶

هدف : دانش‌آموزان بتوانند با استفاده از رابطهٔ درجه و رادیان، هر یک از زاویه‌ها را به دیگری تبدیل کنند. با استفاده از فعالیت صفحهٔ ۱۲۵، دانش‌آموزان در دایرهٔ به شعاع واحد، هریک از زاویه‌های ۹۰ و ۱۸۰ و ۴۵۰ درجه را بر حسب رادیان بنویسند. در پایان توضیحات ارائه شده، رابطهٔ بین درجه و رادیان بیان شده است.

$$R = \frac{\pi . D}{۱۸۰} \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{D}{۱۸۰}$$

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۲۷

هدف : تمرین‌های ارائه شده، هر یک اهداف مطرح شده در مثال صفحهٔ ۱۲۶ را ارزشیابی می‌کنند. در تمرین شمارهٔ ۳، دانش‌آموزان، علاوه بر اینکه هر یک از واحدهای درجه و رادیان را به یکدیگر تبدیل می‌کنند، نسبت به مفهوم دایرهٔ مثلثاتی که در بخش بعدی به آن پرداخته خواهد شد نیز شناخت پیدا می‌کنند.

در تمرین در کلاس شمارهٔ ۵، دانش‌آموزان با استفاده از نتیجه‌ای که در فعالیت صفحهٔ ۱۲۵ $(l = \frac{\theta}{۳۶۰} \times ۲\pi . r)$ و برابری ۳۶۰° ۲π که در مثال صفحهٔ ۱۲۶ فرا گرفته‌اند، به رابطه $\theta = \frac{L}{r}$ می‌رسند. مثال صفحهٔ ۱۲۷ کاربرد این رابطه را نشان می‌دهد.

۱) یک دور کامل و یا ۳۶۰° :

$$D = ۲۰۰ \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{۲۰۰}{۱۸۰} \Rightarrow R = \frac{۱۰}{۹}\pi$$

۳)

درجه	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۸۰	۲۱۰	۲۲۵	۲۴۰	۲۷۰	۳۰۰	۳۱۵	۳۳۰
رادیان	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$

۴) درجه $۲۷۰ = \frac{۳\pi}{۲}$ رادیان

درجه $-۳۰ = -\frac{\pi}{۶}$ رادیان

۵) $L = \frac{۷\pi}{۲} \Rightarrow L = ۲\pi r \times \frac{\theta}{۳۶۰} = \frac{۷}{۲}\pi \Rightarrow \theta = \frac{۷}{۲}\pi = ۶۳۰^{\circ}$

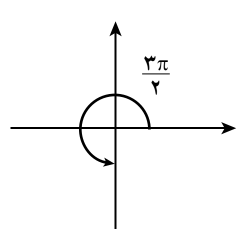
بنابراین، اگر زاویهٔ θ در دایره‌ای به شعاع R، کمانی به طول L را طی کند، در این صورت

$$L = ۲\pi r \times \frac{\theta}{۳۶۰} \Rightarrow L = \theta . r \Rightarrow \theta = \frac{L}{r}$$

حلّ مسائل صفحهٔ ۱۲۸ : دانش آموزان در مسائل ۱ و ۲ باید بتوانند هر یک از زاویه‌های درجه و رادیان را به یکدیگر تبدیل کنند که از نظر سطوح شناختی در سطح درک و فهم می‌باشد.

مسائل شمارهٔ ۳، ۴، ۵ کاربرد مفاهیم درجه و رادیان را مورد ارزشیابی قرار می‌دهد، مسئلهٔ شمارهٔ ۶ درک و فهم دانش‌آموزان از رابطهٔ $\theta = \frac{L}{r}$ را ارزشیابی می‌کند.

۱) الف



ب) $\frac{۳}{R} = \frac{D}{۱۸۰} \Rightarrow D \approx ۱۷۲^\circ$

۲) درجه ۱۷۲ ≈ ۳ رادیان

یک دور کامل و ۱۸۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت برابر است با ۳π رادیان

۳) رادیان $\frac{\pi}{۳} = ۶۰^\circ = ۳۶۰ \times \frac{۲}{۱۲} \Rightarrow$ عقربه از ساعت یک بعد از ظهر تا ساعت ۳ بعد از ظهر $\frac{۲}{۱۲}$ دور کامل ساعت را طی می‌کند.

چون عقربه در جهت منفی می‌چرخد پس زاویه $\frac{\pi}{۳}$ رادیان است.

۴) ۹۰ ۳۶۰ ۴۵۰ درجه π ۲/۵ رادیان ⇐ عقربهٔ دقیقه شمار، هریک ساعت ۳۶۰ درجه را طی می‌کند.

۵) درجه ۹ ۴۰ ÷ ۳۶۰ زاویه بین دو کابین متوالی

(زاویه کابین شماره ۳) ۲۷° $۹^\circ \times ۳$

زاویهٔ طی شده $\frac{۴۷\pi}{۱۰} = ۸۴۶^\circ \Rightarrow ۸۴۶^\circ + ۲۷^\circ = ۸۷۳^\circ$

کابین شماره: ۱۷ ۹ ÷ ۱۵۳ ⇐ ۱۵۳ (۲ × ۳۶۰) ۸۷۳

۶) رادیان $\theta = \frac{L}{r} = \frac{۱۰۰۰}{۶۴۴۰۰۰۰} = \frac{۱}{۶۴۴۰} = ۰/۱۵۵$

حل یک مسئلهٔ صفحهٔ ۱۲۸

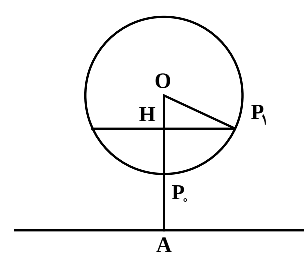
هدف : شناخت دایرهٔ مثلثاتی از طریق معرفی زوایای بیشتر از ۹۰ درجه (انتقال مفاهیم نسبت‌های مثلثاتی از زوایای کمتر از ۹۰ درجه به زوایای بیشتر از ۹۰ درجه)

در این مسئله، کابین چرخ و فلک به اندازهٔ ۳۰ درجه، خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران داده شده و با معلوم بودن شعاع چرخ و فلک (op ۲۰m) و فاصلهٔ مرکز چرخ تا زمین (OA ۲۱) فاصلهٔ کابین P_1 تا سطح زمین به‌دست می‌آید.

$OA\ \ ۲۱, OP_{\circ}\ \ ۲۰, AP_{\circ}\ \ ۱, OH\ \ X, AH\ \ h$

$OA\ \ OH\ \ AH \Rightarrow ۲۱\ \ X\ \ h \Rightarrow X\ \ ۲۱\ \ h$

$\cos ۳۰۰^\circ = \frac{x}{۲۰} = \frac{۲۱-h}{۲۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow h = ۲۱ - ۱۰\sqrt{۳}$



پس از حل مثال، این سؤال مطرح می‌شود که اگر زاویهٔ چرخش کابین بیش از ۹۰ درجه باشد، چگونه می‌توان فاصلهٔ بین کابین تا سطح زمین را به‌دست آورد؟

بنابراین دانش‌آموزان با حالتی مواجه می‌شوند که دیگر نمی‌توانند از مثلث قائم‌الزاویه برای به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی استفاده کنند و در نتیجه باید روشی ارائه کرد که بر مبنای آن، مقادیر مثلثاتی هر زاویهٔ دلخواه محاسبه شود.

فعّالیت صفحهٔ ۱۲۹

هدف : با معلوم بودن مختصات هر نقطه، نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس زاویه را به‌دست آورند.

مرحله اوّل : نیم خط op با زاویه ۵۷/۳ درجه را بر روی دایره جدا می‌کنیم.

بپرسید

مرحلهٔ اوّل : چرا زاویهٔ (۵۷/۳ درجه)؟ از دانش‌آموزان بخواهید ۵۷/۳ درجه را به رادیان تبدیل کنند.

مرحلهٔ دوّم: اندازه‌گیری مختصات نقطه : p (۰/۵۴) p و ۰/۸۴)

مرحلهٔ سوّم: استفاده از ماشین حساب :۰/۸۴ $\sin 57/3$ ، ۰/۵۴ $\cos 57/3$

مرحلهٔ چهارم: دانش‌آموزان با ۲، ۳و۴ برابر کردن اندازهٔ زاویه، به طور شهودی و استقرایی به این نتیجه برسند که طول نقطهٔ p با $\cos\theta$ و عرض نقطهٔ p با $\sin\theta$ برابر است.

توصیهٔ آموزشی

برای درک مفهوم دایرهٔ مثلثاتی و رابطهٔ بین مختصات نقطه و نسبت‌های مثلثاتی، لازم است دانش‌آموزان به طور شهودی با انجام فعالیت به نتیجه‌گیری بپردازند و سپس دایرهٔ مثلثاتی تعریف شود.

مثال صفحهٔ ۱۳۰

اهداف

۱ــ دانش‌آموزان سینوس و کسینوس زوایای ۰، ۹۰، ۱۸۰، ۲۷۰و۳۶۰ درجه را با معلوم بودن مختصات نقطه، به دست آورند.

۲ــ با استفاده از ماشین حساب، مقادیر دقیق سینوس و کسینوس بعضی از زوایای خاص را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنند.

۳ــ با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی که مقادیر یکسانی دارند را مشخص کنند.

توصیهٔ آموزشی

در صفحهٔ ۱۳۱ کتاب، مقادیر دقیق سینوس و کسینوس بعضی از زوایای خاص بر روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش داده شده است. با استفاده از این دایرهٔ مثلثاتی، علاوه بر اینکه می‌توان مقادیر دقیق نسبت‌های مثلثاتی را که بر حسب رادیان هستند به‌دست آورد، همچنین می‌توان معادلات مثلثاتی که در آنها $\sin\theta$ و یا $\cos\theta$ برابر با مقادیری خاص روی دایرهٔ مثلثاتی نیز هستند را حل کرد. البته در ارائهٔ مفاهیم بعدی، برای تعیین دامنه و برد توابع مثلثاتی نیز از این دایرهٔ مثلثاتی استفاده می شود.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۳۱

اهداف

۱ــ دانش‌آموزان با استفاده از رابطه $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ، مقادیر $\tan\theta$ زوایای روی دایرهٔ مثلثاتی صفحهٔ ۱۳۱ را به‌دست آورند.

۲ــ با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی صفحه ۱۳۱، هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را در هر ناحیه تعیین علامت کنند.

$r^۲ \quad x^۲ \quad y^۲ \quad r^۲ \quad \cos^۲\theta \quad \sin^۲\theta \quad ۱$

$r \quad ۱$

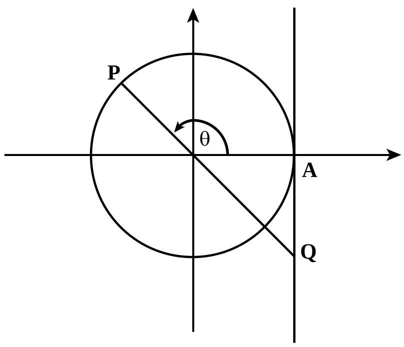
$\cos\theta \quad x$

$\sin\theta \quad y$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$۳)\ \tan(-۲۷۰) = \frac{\sin(-۲۷۰)}{\cos(-۲۷۰)} = \frac{-۱}{۰} = ۰$$

$$\tan\pi=\frac{\sin\pi}{\cos\pi}=\frac{0}{-1}=0$$



۴ــ تانژانت زاویه در حالت $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ در متن درس معرفی شده است که در این تمرین در کلاس، حالت $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ نیز بررسی می‌شود. AQ تانژانت زاویهٔ θ است. (امتداد op محور تانژانت را در نقطهٔ Q قطع می‌کند.)

۵ــ
$0<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \theta$ در ناحیهٔ اوّل $\Rightarrow$ هر دو مثبت $y, x \Rightarrow \cos\theta>0, \sin\theta>0, \tan\theta>0$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\Rightarrow \theta$ در ناحیهٔ دوّم $\Rightarrow$ منفی x مثبت و $y \Rightarrow \cos\theta<0, \sin\theta>0, \tan\theta<0$

$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow \theta$ در ناحیهٔ سوّم $\Rightarrow$ هردو منفی $y, x \Rightarrow \cos\theta<0, \sin\theta<0, \tan\theta>0$

$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi\Rightarrow \theta$ در ناحیهٔ چهارم $\Rightarrow$ منفی y مثبت و $x \Rightarrow \cos\theta>0, \sin\theta<0, \tan\theta<0$

مثال صفحهٔ ۱۳۲

دانش‌آموزان با تعیین علامت نسبت‌های مثلثاتی بر حسب درجه آشنا شده‌اند. در این مثال، نسبت‌های مثلثاتی بر حسب رادیان (در جهت عقربه‌های ساعت) داده شده است که می‌توان این زاویه را به طور مستقیم و یا با تبدیل رادیان به درجه در موقعیت استاندارد رسم کرد.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۳۲

در تمرین در کلاس شمارهٔ ۱، دانش‌آموزان باید هر زاویه را در موقعیت استاندارد رسم کنند.

۱ــ (دو دور کامل ۹۰ درجه) (۹۰ ۷۲۰) ۸۱۰

جهت عقربه‌های ساعت

۶ دور کامل ۱۸۰درجه (180° $6\times360^\circ$) 2340° 13π

در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

۲ــ این تمرین در کلاس، هدف شمارهٔ ۳ مطرح شده در مثال صفحهٔ ۱۳۰ را ارزشیابی می‌کند. دانش‌آموزان باید نسبت‌های مثلثاتی که مقادیر یکسانی دارند را مشخص کنند (با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی صفحهٔ ۱۳۱)

مسائل صفحهٔ ۱۳۳ (با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی صفحهٔ ۱۳۱)

۱ــ
$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan 330=\frac{\sin 330}{\cos 330}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 300=\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin 135=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{۷\pi}{۴}=\cos ۳۱۵=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲ـ

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow \sin^۲\theta=۱-(\frac{۲}{۵})^۲=۱-\frac{۴}{۲۵}=\frac{۲۵-۴}{۲۵}=\frac{۲۱}{۲۵}$$

$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{۲۱}{۲۵}}=\pm\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}$$

۳ـ دانش‌آموزان باید بتوانند با معلوم بودن مختصات یک نقطه، نسبت‌های مثلثاتی $\tan\theta, \cos\theta, \sin\theta$ را به دست آورند.

$$\sin\theta=-\frac{۲}{\sqrt{۵}},\ \cos\theta=\frac{۱}{\sqrt{۵}},\ \tan\theta=\frac{-\frac{۲}{\sqrt{۵}}}{\frac{۱}{\sqrt{۵}}}=-۲$$

۴ـ دایرهٔ مثلثاتی صفحهٔ ۱۳۱

الف) $\sin\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\theta=۳۰^\circ\\ \theta=۱۵۰^\circ\end{cases}$

ب) $\tan\theta=-\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\sqrt{۳}\Rightarrow\theta=۱۲۰\Rightarrow\frac{\sin ۱۲۰}{\cos ۱۲۰}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}=-\sqrt{۳}$

$$\theta=-۳۰۰\Rightarrow\frac{\sin(-۳۰۰)}{\cos(-۳۰۰)}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=-\sqrt{۳}$$

ج) $\cos\theta=۰=\theta=\frac{\pi}{۲}\ \cdot\ \theta=\frac{۳\pi}{۲}$

۵ـ دانش‌آموزان باید بتوانند با استفاده از مفهوم دوران و دایرهٔ مثلثاتی صفحهٔ ۱۲۹، مقدار هر یک از عبارت‌ها را به‌دست آورند.

$$\sin(۲\pi+\frac{\pi}{۳})=\sin(۳۶۰+۶۰)=\sin ۶۰=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(۲\pi+۲\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{۲\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۶})=\cos(۳۶۰-۳۰)=\cos(۳۳۰)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۴})=\sin(۳۶۰-۴۵)=\sin(۳۱۵)\Rightarrow\sin(۳۱۵)=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۶ـ با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی صفحه ۱۳۱

$$-\frac{\pi}{۲}<\theta<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\theta=۶۰^\circ\Rightarrow\cos ۶۰=\frac{۱}{۲}\\ \theta=-۶۰^\circ\Rightarrow\cos ۳۰۰=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

۷ـ الف)

$$\sin\theta=-\frac{۱}{۲}\ ,\ ۰<\theta<۲\pi\Rightarrow\begin{cases}\theta=۲۱۰^\circ\\ \theta=۳۳۰^\circ\end{cases}$$

ب)
$\theta \quad ۲۱۰^\circ \Rightarrow \theta \quad ۱۵۰^\circ$

$\theta \quad ۳۳۰^\circ \Rightarrow \theta \quad ۳۰^\circ$

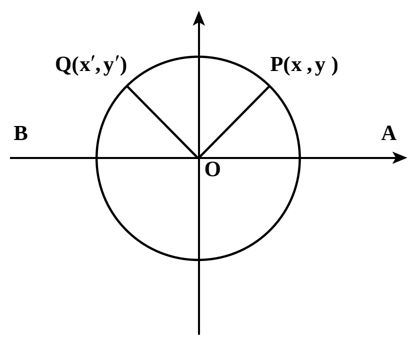
۸ــ $\theta \quad ۴۵^\circ, \theta \quad ۳۱۵^\circ, \theta \quad ۱۳۵^\circ, \theta \quad ۲۲۵^\circ$

فعّالیت صفحهٔ ۱۳۴

هدف : دانش‌آموزان بتوانند با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی، زوایای مکمل را به‌دست آورند.

دانش‌آموزان با مفاهیم تقارن محوری و مرکزی در دورهٔ راهنمایی آشنا شده‌اند و همچنین با استفاده از تشابه مثلث‌ها می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل را به‌دست آورد، ولی اثبات رابطه، هدف کتاب نیست.

۱و۲ ــ



۳ــ با استفاده از تقارن محوری، می‌توان نتیجه گرفت

$Q\hat{O}A = A\hat{O}P = ۳۰^\circ$

۴ــ

$Q\hat{O}A = A\hat{O}P$

$AOQ = ۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \sin ۱۵۰^\circ = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$

$\cos ۱۵۰^\circ = -\cos ۳۰^\circ = \frac{-\sqrt{۳}}{۲}$

۵ــ از دو بند فوق می‌توان نتیجه گرفت :

$\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$

$\cos ۱۵۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = -\cos ۳۰^\circ = \frac{-\sqrt{۳}}{۲}$

از دانش‌آموزان خواسته شود که فعّالیت فوق را برای زاویهٔ θ در حالت کلّی انجام دهند و نتیجه‌گیری کنند.

$\sin(\pi \quad \theta) \quad \sin\theta$

$\cos(\pi \quad \theta) \quad \cos\theta$

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۳۵

دانش‌آموزان باید بتوانند با استفاده از زوایای مکمّل، مقادیر سینوس و کسینوس زاویه‌های $\frac{۳\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۶}$ را به‌دست آورند.

$\sin\frac{۲\pi}{۳} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۶}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

فعّالیت صفحهٔ ۱۳۵

هدف : دانش‌آموزان نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم را به‌دست آورند.

یک زاویه در نظر گرفته شود و سپس با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی، مقادیر $\cos\theta, \sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)$ به‌دست می‌آید.

توصیهٔ آموزشی

دانش‌آموزان با روش استقرایی و شهودی، درستی رابطه را نتیجه‌گیری می‌کنند، ولی برای دانش‌آموزان قوی‌تر می‌توان اثبات را با استفاده از تقارن نسبت به نیمساز ربع اول و سوّم بیان کرد.

ضلع‌های دو زاویهٔ $\theta, \frac{\pi}{۲}-\theta$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوّم قرینه‌اند، پس :

$$\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cos\theta \begin{cases}P(x,y)\\ Q(x',y')\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}P(\cos\theta,\sin\theta)\\ Q(\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta),\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta))\end{cases}\\ \cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\sin\theta\end{cases}$$

$x \quad y' \; , \; y \quad x'$

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۳۵

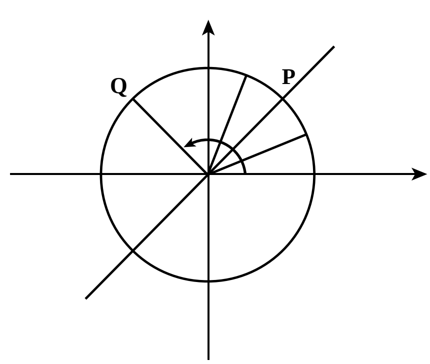
هدف : دانش‌آموزان نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\cos\theta \quad \sin\theta, \sin(۹۰ \quad \theta) \quad \cos(۹۰ \quad \theta)$ را به‌دست آورند.

این فعالیت همانند فعالیت قبلی، با استفاده از پرگار و نقاله، برای هر زاویهٔ دلخواه باید انجام شود. اثبات رابطه، جزء اهداف کتاب نیست، ولی می‌توان اثبات را با استفاده از تقارن به شکل زیر بیان نمود :

ضلع پایانی زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}+\theta$ از ترکیب دو تقارن، نسبت به نیمساز ربع اوّل و سوّم و سپس تقارن نسبت به محور yها، به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}P(x,y) \quad P(\cos\theta,\sin\theta)\\ Q(x',y')=Q(x',y')\Rightarrow Q(\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta),\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta))\end{cases} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\sin\theta \;,\; \sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\cos\theta$$

$x' \quad y \; , \; y' \quad x$



فعّالیت صفحهٔ ۱۳۶

هدف : دانش‌آموزان بتوانند نسبت‌های مثلثاتی $(\pi \quad \alpha)$ را به‌دست آورند (اثبات رابطه، هدف کتاب نیست.)

ضلع‌های پایانی دو زاویه $\pi \quad \theta, \theta$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه‌اند.

$$P(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$Q(\cos(\pi \quad \theta), \sin(\pi \quad \theta))$$

$$\sin(\pi \quad \theta) \qquad \sin\theta$$

$$\cos(\pi \quad \theta) \qquad \cos\theta$$

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۳۶

تمرین‌های ۱ و ۳، هدف تعیین شده در فعالیت فوق را ارزشیابی می‌کند.

در تمرین شماره ۲، دانش‌آموزان باید با استفاده از تعریف $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ مقدار $\tan(\pi \quad \theta)$ را به‌دست آورند.

$$\tan(\pi+\theta) = \frac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta$$

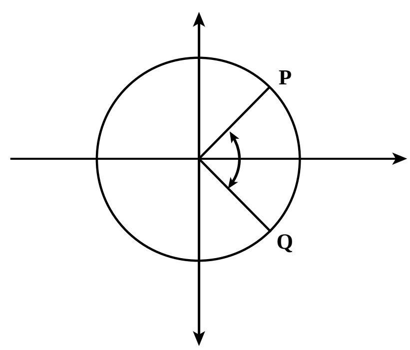
فعّالیت صفحهٔ ۱۳۶

هدف : دانش‌آموزان بتوانند نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه را محاسبه کنند.

در ابتدا دانش‌آموزان درستی رابطه را با استفاده از ماشین حساب نتیجه گیری می‌کنند و سپس با استفاده از شکل رسم شده و مقادیر مختصات نقطهٔ p و قرینهٔ آن نسبت به محور xها، نقطه Q، دلیل درستی رابطه بیان می‌شود.

$$\sin(\quad\theta) \qquad \sin\theta$$

$$\cos(\quad\theta) \quad \cos\theta$$



تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۳۷

۱ــ دانش‌آموزان باید روابط گفته شده را برای $\tan\theta$ به‌دست آورند.

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

۲ــ دانش‌آموزان با استفاده از زوایای قرینه و مکمل، مقادیر خواسته شده را به‌دست آورند.

(دو هدف را ارزشیابی می‌کند)

$$\cos(\theta \quad 180^\circ) \quad \cos \quad (180^\circ \quad \theta) \quad \cos(180^\circ \quad \theta) \qquad \cos\theta$$

رابطهٔ بین شیب خط و تانژانت زاویه

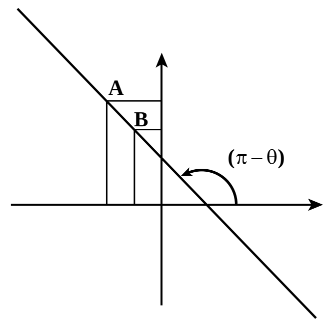
اهداف : در پایان آموزش این بخش دانش‌آموزان باید بتوانند :

ــ رابطه بین شیب یک خط و تانژانت زاویه‌ای که آن خط با محور xها می‌سازد را با ذکر مثال بیان کنند.

در سال گذشته، شیب خط‌هایی که با محور xها، زاویه حاده می‌سازند را برابر با تانژانت همان زاویه تعریف کردیم. اما در مورد

خط‌هایی که با جهت مثبت محور xها زاویه منفرجه می‌سازند، می‌دانیم که با افزایش عرض یک نقطه، طول نقطه کاهش می‌یابد، بنابراین شیب این دسته از خط‌ها منفی می‌باشد، پس تانژانت زاویه‌های منفرجه باید عددی منفی باشد.

$\tan(\pi \quad \theta) \qquad \tan\theta$



بپرسید

۱ــ خط $y \quad x \; ۱$ با محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۲ــ خط d با محور xها زاویه ۳۰ درجه می‌سازد، شیب این خط را به‌دست آورید.

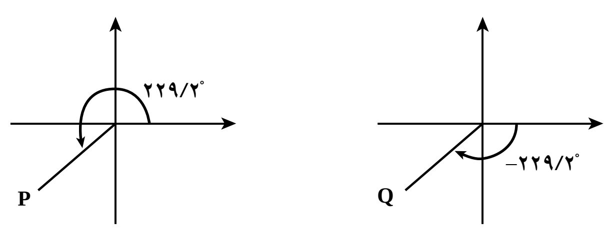
مسائل صفحهٔ ۱۳۸

۱ــ

ب) $x = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow y = -۱ + \frac{۳}{۴}\cos(۲(\frac{\pi}{۶}) - \frac{\pi}{۲}) = -۱ + \frac{۳}{۴}\cos(\frac{\pi}{۶}) = -۱ + \frac{۳}{۴} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = -۱ + \frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$

ج) $x = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow y = ۴ - \frac{۲}{۳}\sin(۳(\frac{\pi}{۶}) - \pi) = ۴ - \frac{۲}{۳}\sin(\frac{\pi}{۲} - \pi) = ۴ - \frac{۲}{۳}\cos(\pi) = ۴ + \frac{۲}{۳} = \frac{۱۴}{۳}$

۲ــ دو نقطهٔ P و Q دارای طول مساوی‌اند. رادیان $۲۲۹/۲^{\circ}$ (۴-)cos $\quad \cos(۴)$



۳ــ $\sin\theta \quad ۰/۴ \Rightarrow \sin(۱۸۰ \quad \theta) \quad \sin\theta \quad ۰/۴$

$\sin(\quad \theta) \qquad \sin\theta \qquad ۰/۴$

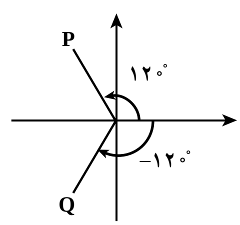
۴ــ $\cos\theta \quad ۰/۲ \Rightarrow \cos(\pi \quad \theta) \qquad \cos\theta \qquad ۰/۲$

$\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) = \cos\theta = ۰/۲$

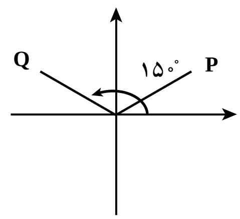
۵ــ هر دو عبارت نادرست است، زیرا :

$\sin(\frac{-۲\pi}{۳}) = \sin(-۱۲۰)$

$\sin(\frac{۲\pi}{۳}) = \sin ۱۲۰$



طول نقاط P و Q قرینهٔ یکدیگرند.



$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos 30$$

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos 150$$

ــ۶

$$\theta = 30 \Rightarrow \sin(\pi - 30) = \sin 30 = \frac{1}{2}$$

$$\sin\pi - \sin 30 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(\pi\quad\theta) \neq \sin\pi\quad\sin\theta$$

ــ۷

$$\cos(\pi\quad\theta)\qquad\cos\theta \Rightarrow \cos\theta\quad\cos(\theta\quad\pi)\quad\cos\theta\quad(\quad\cos\theta)\quad 0$$

تابع مثلثاتی

اهداف

در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان باید بتوانند :

۱ــ توابع مثلثاتی را تشخیص دهند.

۲ــ دامنه و برد توابع y sinx ،y cosx را تعیین کنند.

۳ــ دورهٔ تناوب توابع y asinbx ،y acosbx را پیدا کنند.

۴ــ با استفاده از منحنی توابع مثلثاتی، تغییرات تابع را در هر دوره، مشخص کنند.

۵ــ محل برخورد توابع y sinkθ ،y coskθ با محور طول‌ها را پیدا کنند.

۶ــ مقادیر حداکثر و حداقل توابع y asinbx ،y acosbx را تعیین کنند.

فعّالیت صفحهٔ ۱۳۹

هدف : شناخت و معرفی توابع مثلثاتی و همچنین آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم دامنهٔ تابع y sinx.

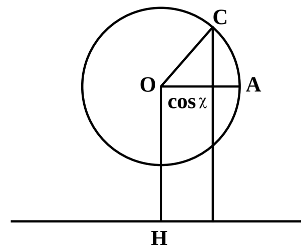
در این فعّالیت دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که به ازای هر عدد حقیقی x، برای sinx مقداری تعریف می‌شود و به این نتیجه می‌رسند که دامنهٔ تابع y sinx، R می‌باشد.

توسعه دهید : به ازای هر عدد حقیقی x ، y sinx ،y cosx ،y tanx را تابع مثلثاتی می‌نامیم. در فعالیت صفحهٔ ۱۳۷ دانش‌آموزان با مسئله‌ای از محیط پیرامون خود آشنا می‌شوند که در آن، ابتدا $0 \leq x < \pi$ است و فاصلهٔ هر نقطه از چرخ و فلک تا سطح زمین را با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه به دست می‌آورند.

در حالت دوّم که $\pi \leq x < 2\pi$ می‌باشد، فاصلهٔ هر نقطه تا سطح زمین کاهش می‌یابد، ولی چون y با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی سینوس به دست می‌آید و sinθ sin(۲π θ) است، در این حالت نیز به تابع y ۱۵ sinx می‌رسند.

فعّالیت صفحهٔ ۱۳۹

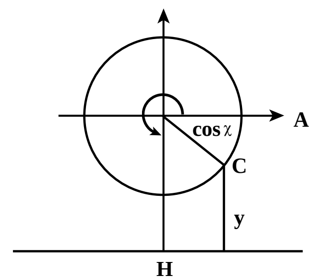
۱) اگر $۰\leq x<\pi$



$$\sin x=\frac{AC}{۱۵}\Rightarrow AC=۱۵\sin x$$

$$y \quad AC \quad OH \quad ۲۰ \quad ۱۵\,\sin x\Rightarrow y \quad ۲۰ \quad ۱۵\sin x$$

۲) اگر $\pi\leq x<۲\pi$



$$\sin(۲\pi-x)=\frac{AC}{۱۵}\Rightarrow -\sin x=\frac{AC}{۱۵}=AC\Rightarrow AC=-۱۵\sin x$$

$$y \quad OH \quad OA \quad ۲۰ \quad (\ ۱۵\,\sin x) \quad ۲۰ \quad ۱۵\sin x$$

دامنه و برد توابع y sinx , y cosx : با توجه به دایرهٔ مثلثاتی صفحهٔ ۱۳۱، مشخص است که به ازای هر x، مقداری برای cosx, sinx تعریف شده است. بنابراین، دامنهٔ این توابع R می‌باشد. همچنین برد این توابع بر روی محور yها حداکثر و حداقل ۱ و ۱ می‌باشد. به عبارت دیگر برد این توابع [۱,۱] است.

فعّالیت صفحهٔ ۱۴۰

هدف : دانش‌آموزان بتوانند دورهٔ تناوب تابع y sinx را به دست آورند.

در تابع y ۲۰ ۱۵sinθ، با تکمیل جدول مقادیر، دانش‌آموزان دورهٔ تناوب y sinθ , y cosθ را به دست می‌آورند.

θ	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۲۷/۵	۳۰/۶	۳۲/۹	۳۵	۳۲/۹	۲۰	۵	۲۰

مقادیر y به‌دست آمده در یک دوره ۲π یکسان‌اند.

توصیهٔ آموزشی

به منظور درک بهتر دانش‌آموزان از دورهٔ تناوب، از آنها بخواهید به ازای یک زاویهٔ θ، نسبت‌های مثلثاتی سینوس θ ۲π, θ ۴π, θ ۶π را نمایش دهند.

با رسم شکل دانش‌آموزان می‌توانند نتیجه بگیرند :

$$\sin\theta \quad \sin(۲\pi \quad \theta) \quad \sin(۴\pi \quad \theta) \quad .... \quad \sin(۲k\pi \quad \theta)$$

با توجه به تساوی‌های بالا، مشخص است که تابع سینوس متناوب می‌باشد و به ۲π که کوچک‌ترین مقدار مثبتی است که اگر به θ اضافه شود، نسبت مثلثاتی sinθ ثابت می‌ماند، دورهٔ تناوب تابع سینوس می‌گوئیم. نتایج به دست آمده را می‌توان برای تابع کسینوس نیز مطرح کرد.

منحنی توابع مثلثاتی

فعّالیت صفحهٔ ۱۴۲

اهداف : دانش آموزان بتوانند :

۱ــ منحنی‌هایی که نمایش سینوس دارند را تشخیص دهند.

۲ــ دورهٔ تناوب تابع را با استفاده از نمودار آن به دست آورند.

با توجه به شکل، نقطهٔ قرمز در هر ثانیه °۱۴۴۰ °۳۶۰×۴ زاویه را طی می‌کند و بنابراین در هر دقیقه : °۸۶۴۰۰ °۶۰×۱۴۴۰ و ۷۶۵ درجه را در مدت ۰/۵۳۱۲ ثانیه (۰/۵۳۱۲ ۱۴۴۰÷۷۶۵) طی می‌کند.

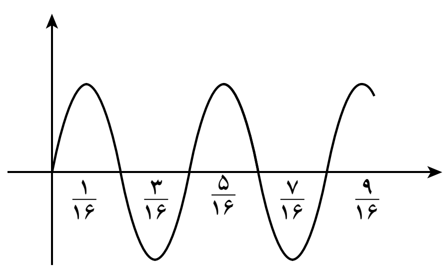
اگر ۱ t ، پس از چهار دور کامل، در نقطه‌ای که قرار داشته، قرار می‌گیرد.

اگر $t=\frac{۳}{۴}$ ، پس از سه دور کامل، در نقطه‌ای که قرار داشته، قرار می‌گیرد.

اگر $t=\frac{۱}{۲}$ ، پس از دو دور کامل، در نقطه‌ای که قرار داشته، قرار می‌گیرد.

(در طرف دیگر میز) نقطه مقابلی که قرار داشته $\Leftarrow t=\frac{۱}{۸}$ ، نقطه ۹۰ درجه حرکت می‌کند $\Leftarrow t=\frac{۱}{۱۶}$

t	۰	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۲}{۱۶}$	$\frac{۳}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۵}{۱۶}$	$\frac{۶}{۱۶}$	$\frac{۷}{۱۶}$	۱......
میزان فاصله نقطه قرمز تا سطح	۰	۴۰	۰	۴۰−	۰	۴۰	۰	۴۰−	۰



تابع فوق، نمایش سینوسی با دورهٔ تناوب $\frac{۱}{۴}$ ثانیه دارد.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۴۳

اهداف : دانش آموزان بتوانند :

۱ــ با استفاده از نمودار تابع سینوس، تغییرات تابع را مشخص کنند.

۲ــ با استفاده از نمودار تابع سینوس، مقادیری از x که به ازای آن ۰ y می‌شود را پیدا کنند.

با توجه به جدول مقادیر و نمودار تابع، تغییرات تابع در هر یک از ناحیه‌ها بررسی می‌شود.

y از ۰ تا یک افزایش : $\rightarrow$ $\frac{\pi}{۲}$ تا ۰

y از یک تا ۰ کاهش : $\rightarrow$ π تا $\frac{\pi}{۲}$

y از ۰ تا ۱ کاهش : $\rightarrow$ $\frac{۳\pi}{۲}$ تا π

y از ۱ تا ۰ افزایش : $\rightarrow$ ۲π تا $\frac{۳\pi}{۲}$

فعّالیت صفحهٔ ۱۴۳

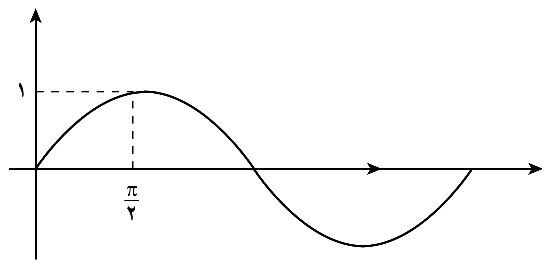
هدف : دانش‌آموزان بتوانند تغییرات نمودار تابع y sinx را بر روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنند.

در ناحیهٔ اوّل با افزایش زاویهٔ θ از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$، مقدار $\sin\theta$ از ۰ به یک افزایش می‌یابد.

در ناحیهٔ دوّم با افزایش زاویهٔ θ از $\frac{\pi}{۲}$ تا π، مقدار $\sin\theta$ از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.

در ناحیهٔ سوّم با افزایش زاویهٔ θ از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$، مقدار $\sin\theta$ از ۰ به ۱ کاهش می‌یابد.

در ناحیهٔ چهارم با افزایش زاویهٔ θ از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π، مقدار $\sin\theta$ از ۱ به ۰ افزایش می‌یابد.



توصیهٔ آموزشی

دانش‌آموزان با مفهوم تابع y sinx بر روی دایرهٔ مثلثاتی آشنا شده‌اند و از طرف دیگر با استفاده از جدول مقادیر، نمودار y sinx را رسم و تغییرات این تابع را بر روی نمودار بررسی کرده‌اند. به منظور اینکه دانش‌آموزان بتوانند درک و فهم خود را تجزیه و تحلیل کنند، لازم است این دو مفهوم را با هم مقایسه کنند. همچنین معلمان می‌توانند از این فعالیت، به عنوان ارزشیابی دانش‌آموزان درحیطهٔ شناختی و درک و فهم و تجزیه و تحلیل استفاده کنند.

مثال صفحهٔ ۱۴۴

هدف : دانش‌آموزان بتوانند مقادیری از x که به ازای آن تابع y sinx صفر می‌شود را پیدا کنند.

با استفاده از نمودار تابع، محل تلاقی نمودار با محور xها مشخص می‌شود.

$$y=\sin x=۰\Rightarrow x=۰,\pm\pi,\pm۲\pi\Rightarrow x=K\pi(k\in z)$$

و در حالت کلی :

$$y=\sin bx=۰\Rightarrow bx=K\pi\Rightarrow x=\frac{K\pi}{b}$$

مثال صفحهٔ ۱۴۶

هدف : توابع مثلثاتی y asin bx , y acos bx را با استفاده از دورهٔ تناوب، حداقل و حداکثر و مقادیری از x که به ازای آنها ۰ y می‌شوند، رسم کنند.

فعّالیت صفحهٔ ۱۴۸

هدف : دانش‌آموزان بتوانند با استفاده از جدول و نمودار، دورهٔ تناوب تابع y a sin bx را به‌دست آورند.

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$
$\sin x$	۰	۰/۵	۰/۷۱	۰/۸۷	۱	۰/۷۱	۰	−۰/۷۱	−۱	−۰/۷۱	۰
$\sin^۲ x$	۰	۰/۸۷	۱	۰/۸۷	۰	−۱	۰	۱	۰	−۱	۰
$\sin^۳ x$	۰	+۱	۰/۷۱	۰	−۱	۰/۷۱	۰	−۰/۷۱	۱	−۰/۷۱	۰

با مقایسهٔ مقادیر $\sin^۳x, \sin^۲x, \sin x$، مشاهده می‌شود که مقادیر حداقل و حداکثر این سه تابع مساوی است و در واقع برد این

توابع بازهٔ [۱,۱] می‌باشد. همچنین با رسم آنها دورهٔ تناوب به دست می‌آید. از طرف دیگر می‌توان گفت :

دورهٔ تناوب تابع $y \quad \sin x \Rightarrow ۰ \le x < ۲\pi \Rightarrow T \quad ۲\pi$

دورهٔ تناوب تابع $y = \sin bx \Rightarrow ۰ \le bx < ۲\pi \Rightarrow ۰ \le x < \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|}$

فعّالیت صفحهٔ ۱۴۹

هدف : دانش‌آموزان با استفاده از جدول مقادیر، حداقل و حداکثر تابع $y \quad a \sin x$ را به دست آورند.

در حالت کلّی، در توابع $y \quad a \sin bx, y \quad a \cos bx$، برای اینکه یک دور کامل طی شود، باید $۰ \le bx \le ۲\pi$ تغییر کند که در این صورت $۰ \le x < \frac{۲\pi}{|b|}$

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۵۰

هدف : دانش‌آموزان بتوانند مقادیری از x که به ازای آن، تابع، مقادیر حداکثر و حداقل پیدا می‌کند را مشخص کنند.

۱ـ

	حداکثر	حداقل	دوره تناوب
$y \quad \sin ۲x$	۱	۱	π
$y \quad ۲\sin x$	۲	۲	۲π

۲) **نکته** : مقادیر حداقل و حداکثر توابع در یک دورهٔ تناوب :

$$y = \sin \alpha x \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲\alpha} \Rightarrow y = \sin \alpha (\frac{\pi}{۲\alpha}) = \sin \frac{\pi}{۲} = ۱$$

$$y = \sin \alpha x \Rightarrow x = \frac{۳\pi}{۲\alpha} \Rightarrow y = \sin \alpha (\frac{۳\pi}{۲\alpha}) = \sin \frac{۳\pi}{۲} = -۱$$

$$y = \cos \alpha x \Rightarrow x = \frac{۲\pi}{\alpha} \Rightarrow y = \cos \alpha (\frac{۲\pi}{\alpha}) = \cos ۲\pi = ۱$$

$$y = \cos \alpha x \Rightarrow x = \frac{\pi}{\alpha} \Rightarrow y = \cos \alpha (\frac{\pi}{\alpha}) = \cos \pi = -۱$$

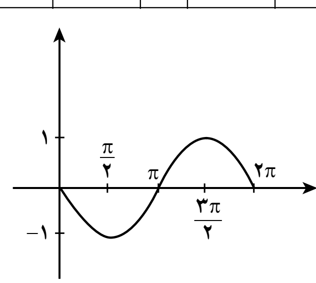
نکته : اگر ضریب sin ax و یا cos ax منفی باشد، مقادیر حداقل و حداکثر برعکس می‌شود.

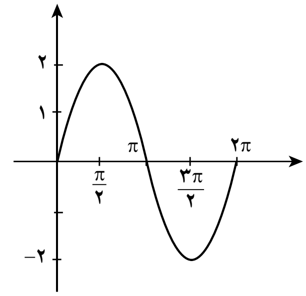
مسائل صفحهٔ ۱۵۱

۱ـ

	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
$\sin(-x)$	۰	−۰/۵	−۰/۷	−۰/۸۶	−۱	−۰/۸۶	−۰/۷	−۰/۵	۰	۰/۵	۰/۷	۰/۸۶	۱	۰/۸۶	۰/۷	۰/۵	۰
$۲\sin(-x)$	۰	−۱	−۱/۴	−۱/۷۲	−۲	−۱/۷۲	−۱/۴	−۱	۰	۱	۱/۴	۱/۷۲	۲	۱/۷۲	۱/۴	۱	۰

$y \quad \sin x$

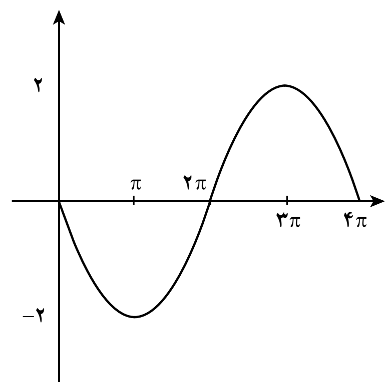




$y \quad ۲\sin(\quad x)$

۲ــ نمودار توابعی مانند تابع مثال ۱۴۶، بر اساس حداقل و حداکثر توابع و دورهٔ تناوب رسم می‌شود.

الف)



$$-۱\le \sin\frac{۱}{۲}x\le ۱\xrightarrow{\times ۲}-۲\le -۲\sin\frac{۱}{۲}x\le ۲$$

دورهٔ تناوب : $\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$

$$x=\pi\to y=-۲\sin\frac{۱}{۲}(\pi)=-۲$$

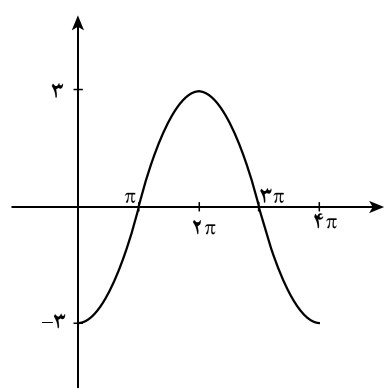
$$x=۲\pi\to y=-۲\sin\frac{۱}{۲}(۲\pi)=۰$$

$$x=\frac{\pi}{۳}\to y=-۲\sin\frac{۱}{۲}(\frac{\pi}{۳})=-۱$$

$$x=\frac{۳\pi}{۲}\to y=-۲\sin\frac{۱}{۲}(\frac{۳\pi}{۲})=-\sqrt{۲}$$

$$x=۴\pi\to y=-۲\sin\frac{۱}{۲}(۴\pi)=۰$$

ب)



$$-۱\le \cos\frac{۱}{۲}x\le ۱\to -۳\le -۳\cos\frac{۱}{۲}x\le ۳$$

دورهٔ تناوب : $\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$

$$x=۰\to y=-۳\cos(۰)=-۳$$

$$x=\frac{\pi}{۲}\to y=-۳\cos\frac{۱}{۲}(\frac{\pi}{۲})=-۳(\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$x=\pi\to y=-۳\cos\frac{۱}{۲}(\pi)=۰$$

$$x=۳\pi\to y=-۳\cos\frac{۱}{۲}(\pi)=۰$$

$$x=۴\pi\to y=-۳\cos\frac{۱}{۲}(۴\pi)=-۳$$

$$x=۲\pi\to y=-۳\cos\frac{۱}{۲}(۲\pi)=۳$$

۳ــ

الف)

دورهٔ تناوب : $T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$

$$-۱\le \sin ۲x\le ۱\to -۳\le ۳\sin ۲x\le ۳$$

$x = ۰ \to y = ۰$

$x = \frac{\pi}{۲} \to y = ۳\sin ۲(\frac{\pi}{۳}) = ۰$

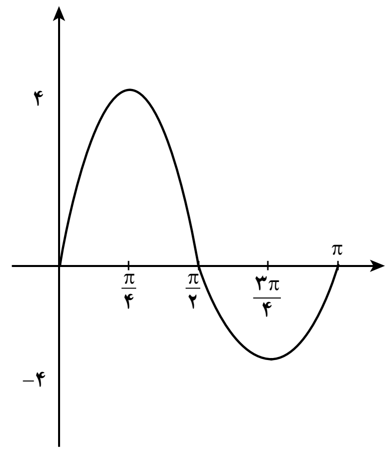
$x = \pi \to y = ۳\sin ۲\pi = ۰$

$x = \frac{\pi}{۶} \to y = ۳\sin\frac{۲\pi}{۶} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

$x = \frac{\pi}{۴} \to y = ۳\sin\frac{۲\pi}{۴} = ۳$

$x = \frac{\pi}{۳} \to y = ۳\sin\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

$x = \frac{۳\pi}{۴} \to y = -۳$



ب) $y = \cos\frac{۱}{۳}x$

دورهٔ تناوب : $T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}} = ۶\pi$

$x = ۰ \to y = ۰$

$x = \pi \to y = \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$

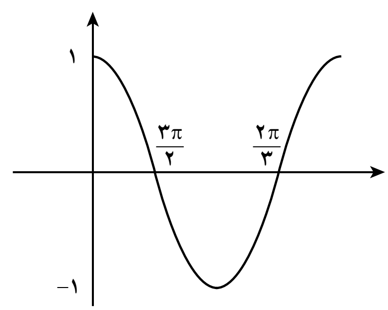
$x = ۲\pi \to y = \cos\frac{۲\pi}{۳} = ۰$

$x = ۳\pi \to y = \cos\frac{۳\pi}{۳} = -۱$

$x = ۴\pi \to y = \cos\frac{۴\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$

$x = ۵\pi \to y = \cos\frac{۵\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$

$x = ۶\pi \to y = \cos\frac{۶\pi}{۳} = ۱$



۴ـ

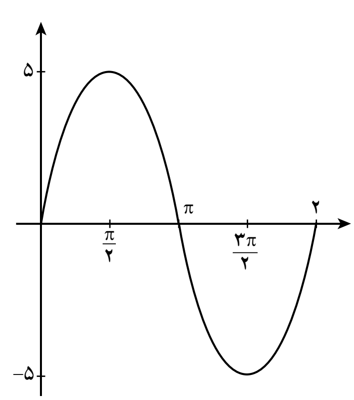
الف) حداکثر ارتفاع $۶/۵\sin\theta$ y حداکثر تابع یعنی ۶/۵ می‌باشد.(۹۰° θ)

ب) حداقل تابع ۶/۵ m می‌باشد که در زوایای ۰ و ۱۸۰ و ۳۶۰ درجه، ارتفاع صفر می‌شود.

ج)

دورهٔ تناوب : $T = \frac{۲\pi}{۱} = ۲\pi$

$-۱ \le \sin x \le ۱ \xrightarrow{\times ۵} -۵ \le ۵\sin x \le ۵$



۵ــ

نمودار سمت چپ : $b=۴ \leftarrow \frac{\pi}{۲} = \frac{۲\pi}{b} \leftarrow T=\frac{\pi}{۲}$: دورهٔ تناوب

$\rightarrow y = ۱۲\cos ۴x$

نمودار سمت راست : $T=\pi \rightarrow \frac{۲\pi}{b}=\pi \rightarrow b=۲$: دورهٔ تناوب

$\rightarrow y = -۱۲\cos ۲x$

نمودار پایینی : $T=۴\pi \rightarrow \frac{۲\pi}{b}=۴\pi \rightarrow b=\frac{۱}{۲}$: دورهٔ تناوب

$\rightarrow y = -۱۲\sin\frac{۱}{۲}x$

۶) الف)

$t \;\; ∘ \rightarrow d \quad ۳/۵\cos(∘) \quad ۳/۵$

$t \;\; ۱ \rightarrow d \quad ۳/۵\cos(۲\pi) \quad ۳/۵$

$t \;\; ۲ \rightarrow d \quad ۳/۵\cos(۴\pi) \quad ۳/۵$

$t \;\; ۳ \rightarrow d \quad ۳/۵\cos(۶\pi) \quad ۳/۵$

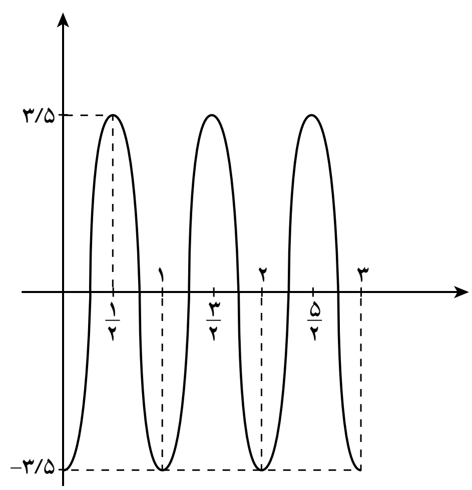
$d \;\; ∘ \rightarrow \quad ۳/۵\cos(۲\pi t) \quad ∘ \rightarrow \cos\pi t \quad ∘$

$\rightarrow t = \frac{k}{۲} + \frac{۱}{۴}$

$k = ∘ \rightarrow t = \frac{۱}{۴}$

$k = ۱ \rightarrow t = \frac{۳}{۴}$

$k = ۲ \rightarrow t = \frac{۵}{۴}$



ب) $۱ \le \cos ۲\pi t \le ۱ \rightarrow \quad ۳/۵ \le \quad ۳/۵\cos\pi t \le ۳/۵$

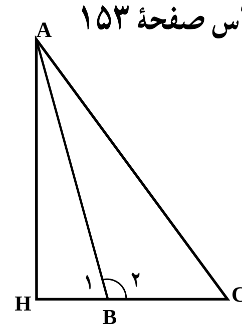
بیشترین فاصله وزنه طبق شکل ۳/۵ سانتی‌متر است.

ج) طبق نمودار مسیر رفت و برگشت ۱ ثانیه می‌باشد و در ۳ ثانیه ۳ نوسان دارد.

کاربردهایی از مثلثات

دانش‌آموزان با رابطهٔ فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه در سال‌های گذشته آشنا شده‌اند. در این بخش با استفاده از رابطهٔ فیثاغورث و نسبت‌های مثلثاتی، روابط سینوس‌ها و کسینوس‌ها را در هر مثلث دلخواه به دست می‌آوریم و از این روابط در حل مسائل مربوط به آنها استفاده می‌کنیم.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۵۳



$CH \;\; BC \;\; BH \Rightarrow BC \;\; CH \;\; BH \;\; AC\cos C \;\; AB\cos B_۱$

$\Rightarrow BC \;\; AC\cos C \;\; AB\cos(\pi \;\; B_۲) AC\cos C \;\; AB(\;\; \cos B_۲)$

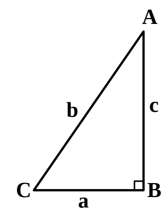
$BC \;\; AC\cos C \;\; AB\cos B$

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۵۴

۱) با معلوم بودن زاویهٔ A و طول‌های AB، AC، مقدار BC به دست می‌آید.

(۱ـ۱)

$a^2 \quad b^2 \quad c^2 \quad 2bc\cos A$

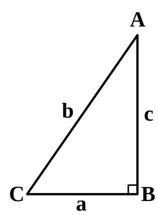


$$a^2 = 100 + 64 - 160\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow a^2 = 164 - 20 = 144 \Rightarrow a = 12$$

۲) الف) رابطه کسینوس‌ها برای یک مثلث قائم‌الزاویه :

$b^2 \quad a^2 \quad c^2 \quad 2ac\cos B \Rightarrow b^2 \quad a^2 \quad c^2$

ب) با استفاده از رابطهٔ فیثاغورث، رابطهٔ کسینوس‌ها به‌دست آمده است.

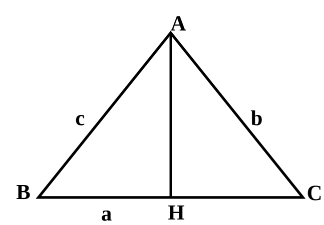


فرمول مساحت مثلث

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AH \times BC) \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB\sin B \times BC) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B$$

$$\mathrm{Sin}B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB\sin B$$



محاسبهٔ رابطهٔ سینوس‌ها با استفاده از فرمول مساحت مثلث

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin A \ (I)$$

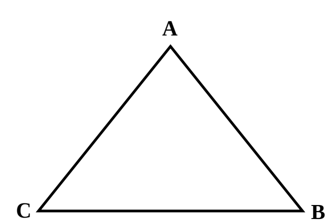
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \times AC \times \sin C \ (II)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \times BC \times \sin B \ (III)$$

$$(I) = (II) \Rightarrow AB\sin A = BC\sin C \Rightarrow \frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB}$$

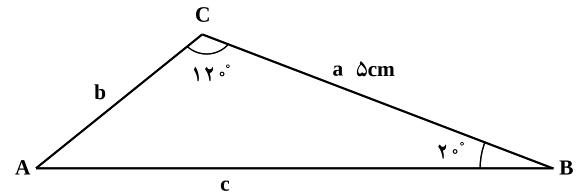
$$(II) = (III) \Rightarrow AC\sin C = AB\sin B \Rightarrow \frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin B}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin A}{AB} = \frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin B}{AC}$$



تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۵۶

۱ــ



$$\frac{\sin ۴۰}{۵}=\frac{\sin ۱۲۰}{c}=\frac{\sin ۲۰}{b}$$

$$c=\frac{۵\times ۰/۸۶}{۰/۶۴}=۶/۷۱,\ b=\frac{۵\times ۰/۳۴}{۰/۶۴}=۲/۶۵$$

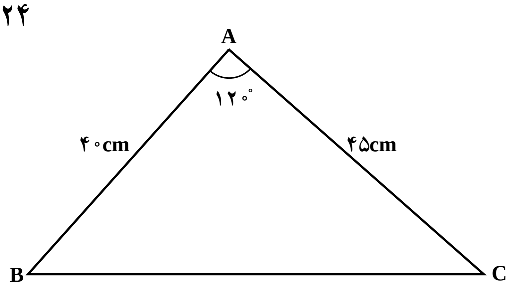
۲ــ

$$\frac{x}{\sin ۳۲}=\frac{a}{\sin ۹۰}\Rightarrow \frac{x}{۰/۵۲}=\frac{۵۶۲}{۱}$$

$x\ \ ۲۹۲/۲۴$

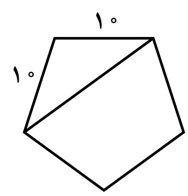
مسائل صفحهٔ ۱۵۷

۱ــ



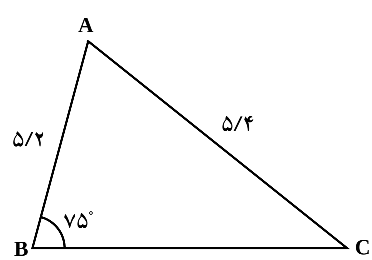
$BC^{۲}\ \ ۴۰^{۲}\ \ ۴۵^{۲}\ \ ۲(۴۰)(۴۵)\cos ۱۵۰^{\circ}$

۲ــ در پنج ضلعی منتظم، اندازهٔ هر زاویه، ۱۰۸ درجه است.



$BC^{۲}\ \ ۱۰^{۲}\ \ ۱۰^{۲}\ \ ۲(۱۰)(۱۰)\cos(۱۰۸)\ \ ۲۰۰\ \ ۲۰۰(\ \ ۰/۳۰۹)$

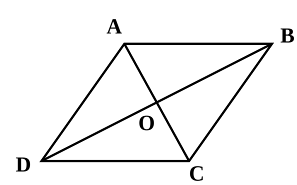
۳ــ



$$\frac{\sin B}{۵/۴}=\frac{\sin C}{۵/۲}\Rightarrow \frac{\sin ۷۵}{۵/۴}=\frac{\sin C}{۵/۲}$$

$$\sin C=\frac{۰/۹۶\times ۵/۲}{۵/۴}=۰/۹۲\approx \hat{C}=۶۷^{\circ}$$

۴ــ



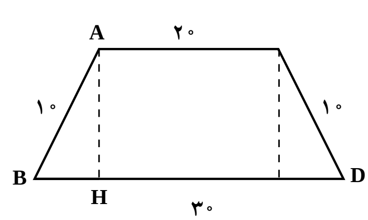
$OA\ \ ۶\ \ \ OB\ \ ۱۱$

$AB^{۲}\ \ \ OA^{۲}\ \ \ OB^{۲}\ \ \ ۲(OA)\,(OB)\cos ۱۲۵^{\circ}$

$AB^{۲}\ \ \ ۳۶\ \ \ ۱۲۱\ \ \ ۲(۶)\,(۱۱)(\ \ ۰/۷۵)\ \ \ ۲۲۹/۶۰$

$\Rightarrow AB\ \ \ ۱۵/۱$

۵ــ



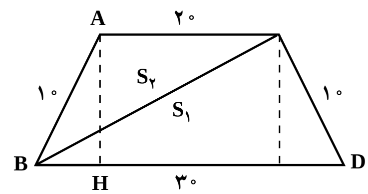
$$\hat{A}=۳۰^{\circ}\Rightarrow BH=\frac{۱}{۲}\times AB=۵$$

$$AH^{۲}=۱۰^{۲}-۵^{۲}=۱۰۰-۲۵=۷۵\Rightarrow AH=\sqrt{۷۵}$$

$$S_{ABCD}=\frac{(۲۰+۳۰)\sqrt{۷۵}}{۲}=\frac{۵۰\sqrt{۷۵}}{۲}=۲۵\sqrt{۷۵}=۱۲۵\sqrt{۳}$$

راه دوّم :

$AC^{2} \quad 900 \quad 100 \quad 300 \quad 700$



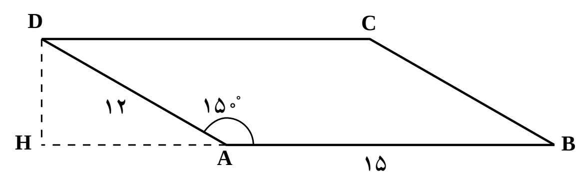
$700=400+100-2(10)(20)\cos\hat{D} \Rightarrow \cos\hat{D}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{D}=120^{\circ}$

$S_1=\frac{1}{2}(30\times 10)\sin 60^{\circ}=57\sqrt{3}$

$S_2=\frac{1}{2}(20\times 10)\sin 120^{\circ}=50\sqrt{3}$

$S_1+S_2=125\sqrt{3}$

۶ـ



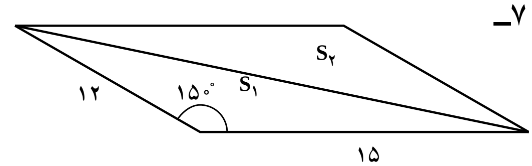
$\hat{A}_1=150^{\circ} \Rightarrow \hat{A}_2=30 \Rightarrow DH=\frac{1}{2}AD=6$

مساحت متوازی الاضلاع $DH\times AB \quad 6\times 15 \quad 90$

راه دوّم :

$S=S_1+S_2=2S_1=2(\frac{1}{2}\times 12\times 15\times \sin 150^{\circ})=90$

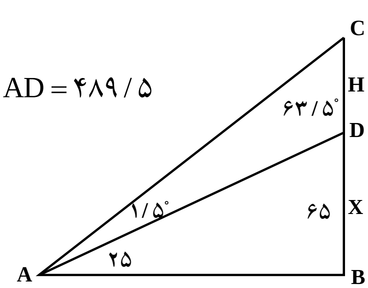
۷ـ



$\frac{\sin 120}{x}=\frac{\sin 15}{100} \Rightarrow x=\frac{100\times 0/87}{0/26}=335$

$\sin 45=\frac{h}{x} \Rightarrow h=x\sin 45=335\times 0/7=236/9$

۸ـ

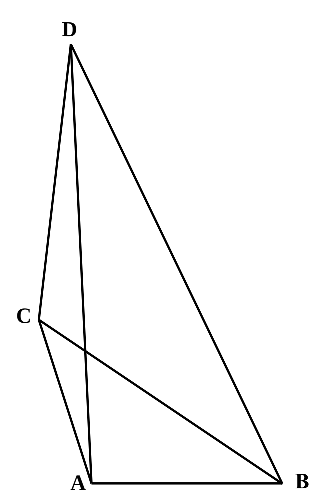


$\frac{AD}{\sin 63/5}=\frac{11}{\sin 1/5} \Rightarrow \frac{AD}{0/89}=\frac{11}{0/02} \Rightarrow AD=\frac{11\times 0/89}{0/02} \Rightarrow AD=489/5$

$\frac{AD}{\sin 90}=\frac{x}{\sin 25^{\circ}}$

$\frac{489/5}{1}=\frac{x}{0/42} \Rightarrow x=205/59$

۹ـ



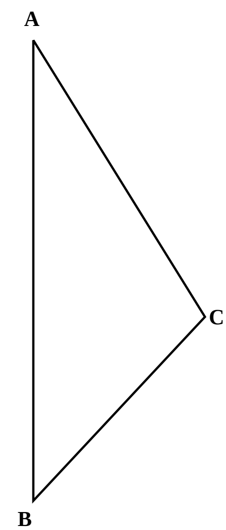
$\overset{\Delta}{ABC}:\frac{AB}{\sin c}=\frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC=\frac{AB\times \sin 45}{\sin 10}$

$AC=\frac{25\times 0/7}{0/17}=102/9$

$\overset{\Delta}{ACD}:\hat{C}=90^{\circ} \Rightarrow C\hat{D}A=30^{\circ}$

$\frac{AC}{\sin 30}=\frac{DC}{\sin 60} \Rightarrow \frac{102/9}{0/5}=\frac{DC}{0/86} \Rightarrow DC=177$

۱۰ــ



$$\frac{AC}{\sin ۷۵}=\frac{AB}{\sin ۶۵}=\frac{BC}{\sin A}$$

$$\frac{AC}{۰/۹۶}=\frac{AB}{۰/۹}=\frac{۳}{۰/۶۴}\Rightarrow AB=\frac{۳\times ۰/۹}{۰/۶۴}=۴/۲۱m$$

$$A=۱۸۰-(۷۵+۶۵)=۴۰$$

$$AC=\frac{۳\times ۰/۹۶}{۰/۶۴}=۴/۵m$$

سؤالات تکمیلی

۱ــ زوایای ۳۰۰° و ۲۰۰° را در موقعیت استاندارد رسم کنید.

۲ــ در دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر اندازه کمان، مقابل به زاویه θ برابر ۱۰ سانتی‌متر است. اندازه این دایره برحسب رادیان چقدر است؟

۳ــ اندازه زاویه‌هایی برحسب درجه ۱۱۵° و ۸۵° می‌باشند اندازه این زاویه‌ها برحسب رادیان چقدر است؟

۴ــ اندازه زاویه‌هایی برحسب رادیان $\frac{-۷\pi}{۶}$ و $\frac{۱۲\pi}{۵}$ است اندازه این زاویه‌ها برحسب درجه چقدر است؟

۵ــ ۶ رادیان بزرگ‌تر است یا ۳۶۰°؟ چرا؟

۶ــ اندازه زاویه‌ای که عقربه ساعت‌شمار در یک ساعت ۱ تا ۲ طی می‌کند چقدر است؟ (برحسب درجه و رادیان)

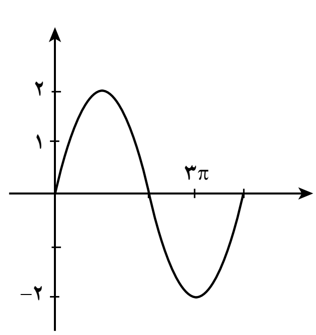
۷ــ خط $y\ \ ۵$ با محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

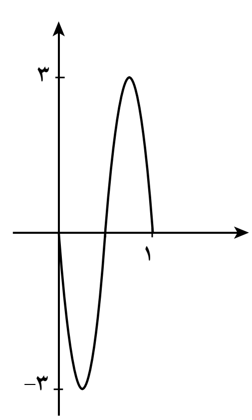
۸ــ حاصل عبارت $A=\cos(\theta+\frac{\pi}{۱۲})\sin(\frac{۳\theta}{۴}+\frac{\pi}{۱۲})$ به‌ازای $\theta=-\frac{\pi}{۳}$ به‌دست آورید.

۹ــ خط d با محور xها زاویه‌ای به اندازه $\frac{-۷\pi}{۶}$ ساخته است شیب خط را پیدا کنید؟

۱۰ــ نمودار تابع $y=-\frac{۳}{۲}\sin\frac{\pi x}{۲}$ را با استفاده از مقادیر حداقلی و حداکثر و دوره تناوب رسم کنید.

۱۱ــ معادله هریک از منحنی‌های زیر را به‌صورت $y\ \ a\sin bx$ و $y\ \ a\cos bx$ که در آن x برحسب رادیان باشد بیان کنید.





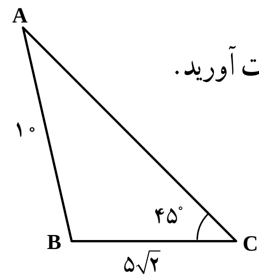
۱۲ــ اگر در تابع $y \quad a\sin bx$ دورهٔ تناوب $T \quad ۲$ و بیشترین مقدار ۲ و کمترین مقدار ۲ باشد، معادلهٔ این منحنی به چه صورت می‌تواند باشد؟

۱۳ــ به‌ازای چه مقادیری برای θ دربازهٔ $[۰, ۲\pi]$ مقدار تابع با ضابطهٔ $y \quad \cos۴\theta$ صفر می‌شود؟

۱۴ــ در تابع با ضابطهٔ $y \quad ۲\sin۳x$ دربازهٔ $[\ \ ۲\pi, ۲\pi]$ محور xها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

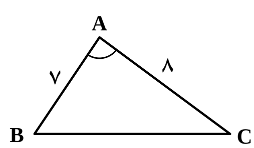
۱۵ــ محیط مربعی با محیط لوزی که یک زاویه ۶۰° دارد برابر است مساحت مربع چند برابر مساحت لوزی است؟

۱۶ــ در شکل روبه‌رو اندازه زاویه‌های B و C و اندازه ضلع BC را به‌دست آورید.



۱۷ــ در مثلث ABC، $\hat{A} = ۶۰^\circ$ و $AB \quad ۲AC$ اگر مساحت $S = ۱۸\sqrt{۳}$ باشد، اندازه ضلع BC را پیدا کنید.

۱۸ــ مساحت مثلث ABC، ۱۴ سانتی‌مترمربع است. اندازهٔ زاویه θ را به‌دست آورید.



۱۹ــ در یک متوازی‌الاضلاع زاویه بین دو قطر ۱۲۰° می‌باشد اگر اندازهٔ قطرهای آن ۲۰ و ۱۲ باشد، اندازه ضلع بزرگتر متوازی‌الاضلاع را به‌دست آورید.

نمونه سؤالات ارزشیابی پایانی

۱ــ در دنبالهٔ حسابی $۱, ۳, ۵, \ldots, ۷۳$، تعداد جملات را مشخص کنید.

۲ــ حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$(۱-\sqrt{۸})^{۱-\sqrt{۳}} \times (۱+\sqrt{۸})^{۲-۲\sqrt{۳}} =$$

۳ــ معکوس کدام یک از رابطه‌های زیر، تابع است؟

الف) $R = \{(۱,۱)(-۱,۲)(۲,-۱)\}$

ب) $R = \{(۳,۱)(-۱,-۳)(-۳,-۱)\}$

پ) $R = \{(۰,۵)(۱,۰)(۲,\sqrt{۲۵})\}$

۴ــ نمودار تابع $f(x) \quad x \quad ۳$ را در هر یک از حالت‌های زیر رسم کنید.

الف) دامنهٔ f برابر مجموعهٔ $A = \{۰,۱,۲\}$ باشد.

ب) دامنهٔ تابع f، اعداد حقیقی منفی باشد.

پ) دامنهٔ تابع f، اعداد حقیقی باشد.

۵ــ مجموعه‌های زیر را به صورت بازه نمایش دهید.

الف) $A=\{x \mid x\in R, -۲<x<۱\}$

ب) $B=\{x \mid x\in R, x>۰\}$

۶ــ مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $y=\dfrac{x^۳+ax+b}{x^۲+۱}$ همانی شود.

۷ــ نمودار تابع با ضابطهٔ $y \quad ۳\times ۲^x$ را رسم کنید و محل تلاقی نمودار با محور عرض ها را مشخص نمایید.

۸ــ معادله $\log_۴(x^۲ \quad ۱) \quad \log_۴(x \quad ۱) \quad ۱$ را حل کنید.

۹ــ زاویه‌های ۳۰۰ و ۲۰۰ درجه را در موقعیت استاندارد رسم کنید.

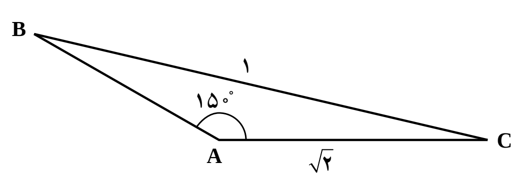
۱۰ــ اندازهٔ زاویه‌هایی بر حسب درجه ۷۵ و ۹۴ می‌باشد، اندازهٔ این زاویه‌ها بر حسب رادیان چقدر است؟

۱۱ــ تمام زاویه‌هایی را پیدا کنید که $\cos\theta=-\frac{۱}{۲}$ به طوری که θ کمتر از ۲π باشد.

۱۲ــ با تعیین مقادیر حداقل، حداکثر و دورهٔ تناوب، تابع $y \quad ۲\sin ۳x$ را رسم کنید. این تابع محور xها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

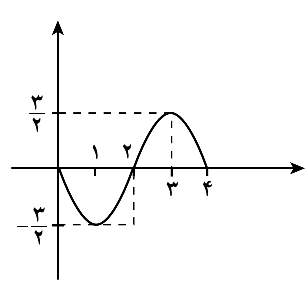
۱۳ــ مقدار عددی عبارت $A=\dfrac{\tan(-۱۳۵)^\circ}{\sin ۲۷۰^\circ \times \cos ۳۰۰}$ را به دست آورید.

۱۴ــ در شکل زیر، اندازهٔ زوایای B و C را به دست آورید.



۱۵ــ زمینی به شکل مثلث داریم که اندازه دو ضلع آن ۱۰ و ۱۶ متر است، اگر زاویهٔ بین اضلاع آن ۶۰° باشد، مساحت مثلث را به دست آورید.

۱۶ــ معادلهٔ زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y \quad a\sin bx$ است. مقادیر a و b را مشخص کنید.



پیشنهاد : در صورتی که دانش‌آموزان به ماشین حساب دسترسی ندارند، جدول مقادیر در اختیار آنان قرار گیرد.

اندازهٔ زاویه		sin	cos	tg
درجه	رادیان			
	/	/	۱/	/
۱	/ ۱۷۵	/ ۱۷۵	/۹۹۹۸	/ ۱۷۵
۲	/ ۳۴۹	/ ۳۴۹	/۹۹۹۴	/ ۳۴۹
۳	/ ۵۲۴	/ ۵۲۴	/۹۹۸۶	/ ۵۲۴
۴	/ ۶۹۸	/ ۶۹۸	/۹۹۷۶	/ ۶۹۹
۵	/ ۸۷۳	/ ۸۷۲	/۹۹۶۲	/ ۸۷۵
۶	/۱ ۴۷	/۱ ۴۵	/۹۹۴۵	/۱ ۵۱
۷	/۱۲۲۲	/۱۲۱۹	/۹۹۲۵	/۱۲۲۸
۸	/۱۳۹۶	/۱۳۹۲	/۹۹ ۳	/۱۴ ۵
۹	/۱۵۷۱	/۱۵۶۴	/۹۸۷۷	/۱۵۸۴
۱	/۱۷۴۵	/۱۷۳۶	/۹۸۴۸	/۱۷۶۳
۱۱	/۱۹۲	/۱۹ ۸	/۹۸۱۶	/۱۹۴۴
۱۲	/۲ ۹۴	/۲ ۷۹	/۹۷۸۱	/۲۱۲۶
۱۳	/۲۲۶۹	/۲۲۵	/۹۷۴۴	/۲۳ ۹
۱۴	/۲۴۴۳	/۲۴۱۹	/۹۷ ۳	/۲۴۹۳
۱۵	/۲۶۱۸	/۲۵۸۸	/۹۶۵۹	/۲۶۷۹
۱۶	/۲۷۹۳	/۲۷۵۶	/۹۶۱۳	/۲۸۶۷
۱۷	/۲۹۶۷	/۲۹۲۴	/۹۵۶۳	/۳ ۵۷
۱۸	/۳۱۴۲	/۳ ۹	/۹۵۱۱	/۳۲۴۹
۱۹	/۳۳۱۶	/۳۲۵۶	/۹۴۵۵	/۳۴۴۳
۲	/۳۴۹۱	/۳۴۲	/۹۳۹۷	/۳۶۴
۲۱	/۳۶۶۵	/۳۵۸۴	/۹۳۳۶	/۳۸۳۹
۲۲	/۳۸۴	/۳۷۴۶	/۹۲۷۲	/۴ ۴
۲۳	/۴ ۱۴	/۳۹ ۷	/۹۲ ۵	/۴۲۴۵
۲۴	/۴۱۸۹	/۴ ۶۷	/۹۱۳۵	/۴۴۵۲
۲۵	/۴۳۶۳	/۴۲۲۶	/۹ ۶۳	/۴۶۶۳
۲۶	/۴۵۳۸	/۴۳۸۴	/۸۹۸۸	/۴۸۷۷
۲۷	/۴۷۱۲	/۴۵۴	/۸۹۱	/۵ ۹۵
۲۸	/۴۸۸۷	/۴۶۹۵	/۸۸۲۹	/۵۳۱۷
۲۹	/۵ ۶۱	/۴۸۴۸	/۸۷۴۶	/۵۵۴۳
۳	/۵۲۳۶	/۵	/۸۶۶	/۵۷۷۴

اندازهٔ زاویه		sin	cos	Tg
درجه	رادیان			
۳۱	/۵۴۱۱	/۵۱۵	/۸۵۷۲	/۶ ۹
۳۲	/۵۵۸۵	/۵۲۹۹	/۸۴۸	/۶۲۴۹
۳۳	/۵۷۶	/۵۴۴۶	/۸۳۸۷	/۶۴۹۴
۳۴	/۵۹۳۴	/۵۵۹۲	/۸۲۹	/۶۷۴۵
۳۵	/۶۱ ۹	/۵۷۳۶	/۸۱۹۲	/۷ ۲
۳۶	/۶۲۸۳	/۵۸۷۸	/۸ ۹	/۷۲۶۵
۳۷	/۶۴۵۸	/۶ ۱۸	/۷۹۸۶	/۷۵۳۶
۳۸	/۶۶۳۲	/۶۱۵۷	/۷۸۸	/۷۸۱۳
۳۹	/۶۸ ۷	/۶۲۹۳	/۷۷۷۱	/۸ ۹۸
۴	/۶۹۸۱	/۶۴۲۸	/۷۶۶	/۸۳۹۱
۴۱	/۷۱۵۶	/۶۵۶۱	/۷۵۴۷	/۸۶۹۳
۴۲	/۷۳۳	/۶۶۹۱	/۷۴۳۱	/۹ ۴
۴۳	/۷۵ ۵	/۶۸۲	/۷۳۱۴	/۹۳۲۵
۴۴	/۷۶۷۹	/۶۹۴۷	/۷۱۹۳	/۹۶۵۷
۴۵	/۷۸۵۴	/۷ ۷۱	/۷ ۷۱	۱/
۴۶	/۸ ۲۹	/۷۱۹۳	/۶۹۴۷	۱/ ۳۵۵
۴۷	/۸۲ ۳	/۷۳۱۴	/۶۸۲	۱/ ۷۲۴
۴۸	/۸۳۷۸	/۷۴۳۱	/۶۶۹۱	۱/۱۱ ۶
۴۹	/۸۵۵۲	/۷۵۴۷	/۶۵۶۱	۱/۱۵ ۴
۵	/۸۷۲۷	/۷۶۶	/۶۴۲۸	۱/۱۹۱۸
۵۱	/۸۹ ۱	/۷۷۷۱	/۶۲۹۳	۱/۲۳۴۹
۵۲	/۹ ۷۶	/۷۸۸	/۶۱۵۷	۱/۲۷۹۹
۵۳	/۹۲۵	/۷۹۸۶	/۶ ۱۸	۱/۳۲۷
۵۴	/۹۴۲۵	/۸ ۹	/۵۸۷۸	۱/۳۷۶۴
۵۵	/۹۵۹۹	/۸۱۹۲	/۵۷۳۶	۱/۴۲۸۱
۵۶	/۹۷۷۴	/۸۲۹	/۵۵۹۲	۱/۴۸۲۶
۵۷	/۹۹۴۸	/۸۳۸۷	/۵۴۴۶	۱/۵۳۹۹
۵۸	۱/ ۱۲۳	/۸۴۸	/۵۲۹۹	۱/۶ ۳
۵۹	۱/ ۲۹۷	/۸۵۷۲	/۵۱۵	۱/۶۶۶۳
۶	۱/ ۴۷۶	/۸۶۶	/۵	۱/۷۳۲۱

اندازهٔ زاویه		sin	cos	Tg
درجه	رادیان			
۶۱	۱/ ۶۴۷	/۸۷۴۶	/۴۸۴۸	۱/۸ ۴
۶۲	۱/ ۸۲۱	/۸۸۲۹	/۴۶۹۵	۱/۸۸ ۷
۶۳	۱/ ۹۹۶	/۸۹۱	/۴۵۴	۱/۹۶۲۶
۶۴	۱/۱۱۷	/۸۹۸۸	/۴۳۸۴	۲/ ۵ ۳
۶۵	۱/۱۳۴۵	/۹ ۶۳	/۴۲۲۶	۲/۱۴۴۵
۶۶	۱/۱۵۱۹	/۹۱۳۵	/۴ ۶۷	۲/۲۴۶
۶۷	۱/۱۶۹۴	/۹۲ ۵	/۳۹ ۷	۲/۳۵۵۹
۶۸	۱/۱۸۶۸	/۹۲۷۲	/۳۷۴۶	۲/۴۷۵۱
۶۹	۱/۲ ۴۳	/۹۳۳۶	/۳۵۸۴	۲/۶ ۵۱
۷	۱/۲۲۱۷	/۹۳۹۷	/۳۴۲	۲/۷۴۷۵
۷۱	۱/۲۳۹۲	/۹۴۵۵	/۳۲۵۶	۲/۹ ۴۲
۷۲	۱/۲۵۶۶	/۹۵۱۱	/۳ ۹	۳/ ۷۷۷
۷۳	۱/۲۷۴۱	/۹۵۶۳	/۲۹۲۴	۳/۲۷ ۹
۷۴	۱/۲۹۱۵	/۹۶۱۳	/۲۷۵۶	۳/۴۸۷۴
۷۵	۱/۳ ۹	/۹۶۵۹	/۲۵۸۸	۳/۷۳۲۱
۷۶	۱/۳۲۶۵	/۹۷ ۳	/۲۴۱۹	۴/ ۱ ۸
۷۷	۱/۳۴۳۹	/۹۷۴۴	/۲۲۵	۴/۳۳۱۵
۷۸	۱/۳۶۱۴	/۹۷۸۱	/۲ ۷۹	۴/۷ ۴۶
۷۹	۱/۳۷۸۸	/۹۸۱۶	/۱۹ ۸	۵/۱۴۴۶
۸	۱/۳۹۶۳	/۹۸۴۸	/۱۷۳۶	۵/۶۷۱۳
۸۱	۱/۴۱۳۷	/۹۸۷۷	/۱۵۶۴	۶/۳۱۳۸
۸۲	۱/۴۳۱۲	/۹۹ ۳	/۱۳۹۲	۷/۱۱۵۴
۸۳	۱/۴۴۸۶	/۹۹۲۵	/۱۲۱۹	۸/۱۴۴۳
۸۴	۱/۴۶۶۱	/۹۹۴۵	/۱ ۴۵	۹/۵۱۴۴
۸۵	۱/۴۸۳۵	/۹۹۶۲	/ ۸۷۲	۱۱/۴۳
۸۶	۱/۵ ۱	/۹۹۷۶	/۶۹۸	۱۴/۳
۸۷	۱/۵۱۸۴	/۹۹۸۶	/ ۵۲۳	۱۹/ ۸۱
۸۸	۱/۵۳۵۹	/۹۹۹۴	/ ۳۴۹	۲۸/۶۳۶
۸۹	۱/۵۵۳۳	/۹۹۹۸	/ ۱۷۵	۵۷/۲۹
۹	۱/۵۷ ۸	۱/	/	نامعین