فصل ۳

# توابع خاص، نامعادله و تعیین علامت

# نگاه کلّی به فصل سوّم کتاب درسی

## اهداف کلّی

۱ــ آشنایی با توابع چند جمله‌ای
۲ــ آشنایی با تابع همانی، تابع ثابت و تابع قدر مطلق و رسم آنها (در سطحی که کتاب درسی بیان کرده است)
۳ــ آشنایی با رسم توابع قدر مطلقی و توابع دوّم به وسیلهٔ انتقال روی محورهای مختصات
۴ــ آشنایی با توابع گویا و روش به دست آوردن دامنهٔ آنها
۵ــ آشنایی با توابع رادیکالی و روش به دست آوردن دامنه و برد آنها
۶ــ به دست آوردن دامنه و برد برخی توابع با استفاده از نمودار
۷ــ آشنایی با نامعادلات و روش تعیین علامت نامعادلات درجهٔ یک و درجهٔ دو

## عملکرد مورد انتظار دانش‌آموزان

۱ــ توابع چند جمله‌ای را به کمک چند مثال تعریف کنند.
۲ــ تابع همانی را به کمک چند مثال تعریف و با نمایش‌های مختلف نشان دهند.
۳ــ تابع ثابت را به کمک چند مثال تعریف و با نمایش‌های مختلف نشان دهند.
۴ــ مفهوم تابع قدرمطلق و روش نمایش آن را بیان کنند و بتوانند نمودار توابع قدرمطلق را در حدّی که کتاب به آن پرداخته است، رسم کنند و با استفاده از نمودار، دامنه و برد این توابع را به دست آورند.
۵ــ نمودار برخی از توابع درجهٔ دوّم را به کمک انتقال نمودار تابع $f(x) \quad x^2$، رسم کنند. (در حدّی که کتاب بیان کرده است) و با استفاده از نمودار، دامنه و برد این توابع را به دست آورند.
۶ــ توابع گویا را با ذکر مثال تعریف کنند، دامنهٔ این توابع را به دست آورند و مسائل مربوط را حل کنند.
۷ــ توابع رادیکالی را با ذکر چند مثال تعریف کنند و دامنه و برد این توابع را به دست آورند و به کمک انتقال، نمودار آنها را رسم کنند.
۸ــ مفهوم نامعادله و تعیین علامت را با ذکر مثال بیان کنند و برای حل مسائل مرتبط با این بخش مدل ریاضی مربوط را بنویسند.
۹ــ مجموعهٔ جواب نامعادلات درجهٔ اوّل و دوّم را به کمک تعیین علامت، به دست آورند.

## پیش نیازها

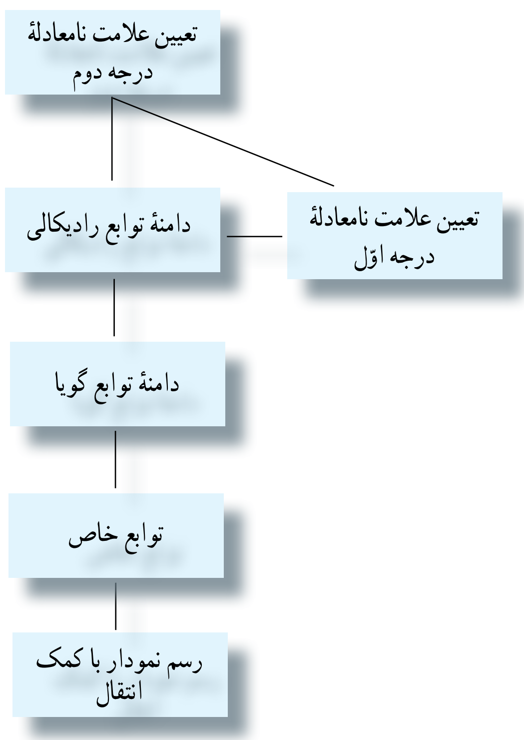
۱ــ با مفاهیم رابطه، تابع، معادله و نامعادله آشنا باشند.

۲ــ مقدار تابع در یک نقطه را به دست آورند.

## زمان بندی پیشنهادی برای تدریس این فصل

| | |
|---|---|
| توابع خاص (همانی ــ ثابت ــ قدر مطلق) | جلسهٔ پانزدهم |
| رسم نمودار برخی از توابع درجهٔ دوّم به کمک انتقال نمودار تابع $y \quad x^2$ | جلسهٔ شانزدهم |
| توابع گویا | جلسهٔ هفدهم |
| توابع رادیکالی | جلسهٔ هجدهم |
| نامعادله و تعیین علامت | جلسهٔ نوزدهم |
| تعیین علامت چند جمله ای درجهٔ دوّم | جلسهٔ بیستم |
| حلّ تمرینات | جلسهٔ بیست و یکم |
| ارزشیابی پایانی | جلسهٔ بیست و دوّم |

## نقشهٔ مفهومی فصل سوّم کتاب درسی



# آموزش بخش‌های فصل سوّم کتاب درسی
# ( توابع خاص و حل نامعادله )

## اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

۱ــ توابع چند جمله‌ای را به کمک چند مثال تعریف کنند.

۲ــ تابع همانی را به کمک چند مثال تعریف و با نمایش‌های مختلف نشان دهند.

۳ــ مفهوم توابع قدر مطلق و روش نمایش آن را بیان کنند و بتوانند نمودار توابع قدر مطلق را در حدی که کتاب درسی به آن پرداخته است رسم کنند و با استفاده از نمودار، دامنه و برد این توابع را بنویسند.

## پیش نیازها

۱ــ دانش‌آموزان باید با مفهوم رابطه و تابع و روش‌های نمایش آنها آشنا باشند.

۲ــ دانش‌آموزان باید با مفهوم دامنه و برد توابع آشنا باشند.

## نگاه کلّی به بخش

پس از آشنایی دانش‌آموزان با مفاهیم رابطه و تابع، دامنه و برد تابع و نمایش‌های مختلف آنها، در این بخش دانش‌آموزان با چند تابع خاص از جمله تابع همانی، تابع ثابت و تابع قدر مطلق و روش رسم آنها آشنا می‌شوند. البته در توابع قدر مطلق، بیشتر از روش انتقال نمودار برای رسم استفاده می‌شود.

**ورود به مطلب** : برای آغاز آموزش این بخش، بهتر است ابتدا مفاهیم تابع و دامنه و برد تابع و روش‌های مختلف نمایش یک تابع برای دانش‌آموزان یادآوری شود، سپس با ارائهٔ مثال‌های متنوع، انواع توابع این بخش به دانش‌آموزان معرفی می‌شوند.

سپس با ذکر مثال‌هایی که رابطهٔ خطی و غیر خطی بین دو متغیر را نشان می‌دهند، مفهوم توابع چند جمله‌ای را به دانش‌آموزان آموزش می‌دهیم و از آنها می‌خواهیم برای درک بهتر این موضوع، مثال‌هایی ارائه کنند. در ادامه از آنها می‌خواهیم در صورت امکان نمودار این توابع را نیز رسم کنند که البته برای رسم آنها باید از روش نقطه‌یابی استفاده کنند. بنابراین باید رسم توابع خطی و سادهٔ درجهٔ دوّم مورد بحث قرار گیرند.

در ادامه برای معرفی تابع همانی، می‌توان رسم تابع خطی $y \quad x$ و ویژگی نقاط روی این خط را مورد بررسی قرار داد.

برای معرفی تابع ثابت، می‌توان از مثال‌هایی همچون اندازهٔ طول قد یک فرد بزرگسال در زمان‌های متفاوت، اندازهٔ شمارهٔ کفش یک فرد بزرگسال (بعد از دوران رشد) یا نمرهٔ چشم یک فرد عینکی، تعداد محصولات تولید شده توسط یک کارخانه یا ارتفاع پرواز یک هواپیما از سطح زمین که ابتدا صعودی سپس ثابت و در پایان نزولی است استفاده کرد.

قبل از معرفی تابع قدر مطلق، به یادآوری مطالب گفته شده در مورد قدر مطلق یک عدد می‌پردازیم که در ریاضی یک به آن اشاره شده است و سپس می‌توانیم با رسم نمودار تابع $f(x) \quad x$ از طریق نقطه‌یابی، مفهوم تابع قدر مطلق را آموزش دهیم.

با شناخت توابع خطی به صورت $y \quad ax \quad b$، اکنون این سؤال طرح می‌شود که با توابع غیر خطی چه فرقی دارند؟ چه پدیده‌هایی یافت می‌شوند که خطی نیستند؟ در ابتدای بخش مثال‌هایی از روابط غیر خطی مطرح شده است. مثال‌هایی از نوع رابطه بین طول ضلع

مربع و مساحت آن یا رابطه بین شعاع و حجم کره علاوه بر اینکه توابع چند جمله ای را معرفی می کنند، مفهوم متغیّر مستقل و متغیّر وابسته را نیز نشان می‌دهند.

**تمرین در کلاس صفحهٔ ۵۷**

**هدف** : دانش‌آموزان با تابع درجهٔ دوّم $y \quad x^2$، به عنوان یک تابع غیر خطی آشنا شوند.

**تمرین در کلاس صفحهٔ ۵۷**

**هدف** : دانش‌آموزان تابع همانی را تشخیص دهند و دامنه و برد آن را مشخص و نمودار آن را رسم کنند.

**نکته** : یک تابع خطی تابعی است که به صورت $y \quad ax \quad b$ تعریف می‌شود که در آن $a \neq 0$ است.

اگر $0 \quad a$ باشد، آن‌گاه تابع مذکور، تابعی خطی نیست؛ بلکه $y \quad b$ یک تابع ثابت است.

**بپرسید** : شیب خط‌های $y \quad k$ و $x \quad h$ چگونه است؟

# تابع قدر مطلق

## ورود به مطلب

دانش‌آموزان در بخش قبل، با مفهوم تابع به عنوان یک تناظر بین دو مجموعه به طوری که برای هر عضو از دامنه، دقیقاً یک عضو از برد نظیر می‌شود، آشنا شده‌اند. همچنین با مفهوم تابع به عنوان یک ماشین نیز که هر عضو دامنه را ورودی و هر عنصر منحصر به فرد از برد را خروجی گفتیم، آشنا شده‌اند. از این مطلب می‌توان برای معرفی تابع قدر مطلق استفاده کرد. در تابع قدرمطلق ورودی، هر عدد حقیقی می‌تواند باشد، اما خروجی آن که برد تابع می‌باشد، همهٔ اعداد نامنفی هستند. به صورت دقیق تر، تابع f که به نام تابع قدرمطلق معروف است به صورت زیر تعریف می شود :

$f: IR \to IR_{\geq 0}$

همانطور که از تعریف تابع قدر مطلق معلوم است، حاصل تأثیر این تابع روی هر عدد حقیقی، یک عدد حقیقی نامنفی است.

**بپرسید** : دامنه و برد تابع مطلق را به صورت بازه نمایش دهید.

با توجه به نمودار تابع قدر مطلق، آیا این تابع یک به یک است؟

**تمرین در کلاس صفحهٔ ۵۹**

**هدف** : دانش‌آموزان بتوانند نموار تابع $y \quad x \quad 1$ را با استفاده از جدول مقادیر رسم کنند.

**فعالیت صفحهٔ ۶۰**

**هدف** : دانش‌آموزان بتوانند با انتقال نمودار تابع $y \quad x$، نمودار توابع به ضابطه کلی $y \quad x \quad b$ را رسم کنند.

## توصیهٔ آموزشی

نمودار بسیاری از توابع را می‌توان متأثر از چند تابع اوّلیه که نتیجه یک یا چند تبدیل مقدماتی است در نظر گرفت. تبدیل‌های انتقال انبساط، انقباض و بازتاب نسبت به محورهای مختصات، هدف آموزشی این بخش است؛ به عنوان مثال، دانش‌آموزان با رسم توابع $y \quad x$ و $y \quad x \quad 1$ نتیجه گیری کنند که در حالت کلّی نمودار تابع $y \quad x \quad k$، انتقال عمودی تابع $y \quad x$ می باشد و همچنین نمودار $y \quad \quad x$، بازتاب نمودار تابع نسبت به محور xها می‌باشد.

در تمرین‌های این بخش دانش‌آموزان می آموزند رسم توابع $y \quad ax$ را به کمک انتقال نتیجه‌گیری کنند. ارائهٔ کلیهٔ حالات رسم به کمک انتقال به صورت جزوهٔ آموزشی فقط یک عمل مکانیکی را به دانش‌آموزان می‌آموزد؛ لذا لازم است کلیهٔ حالات رسم توسط انتقال را خود دانش‌آموزان نتیجه‌گیری کنند.

**بپرسید** : چرا اگر k مثبت باشد، برای رسم نمودار $y \quad x \quad k$ باید نمودار تابع $y \quad x$ را به اندازه k واحد به سمت بالا انتقال دهیم و برای رسم نمودار $y \quad x \quad k$، باید نمودار تابع $y \quad x$ را به اندازه k واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

**توسعه دهید** : نمودار توابع $y \quad x \quad ۳$ و $y \quad a \ x$ در حالتی که $a > ۰ , a < ۰$ چگونه رسم می‌شوند؟

## رسم نمودار برخی از توابع درجهٔ دوّم به کمک انتقال تابع $f(x) = x^۲$

### اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

نمودار برخی از توابع درجهٔ دوّم به شکل کلّی $y \quad a(x \quad b)^۲ \quad c$ را به کمک انتقال نمودار تابع $f(x) \quad x^۲$ رسم کنند و با استفاده از نمودار، دامنه و برد این توابع را به دست آورند.

### پیش نیازها

۱ــ دانش‌آموزان باید با نمودار تابع $f(x) \quad x^۲$ و روش رسم آن آشنا باشند.

۲ــ دانش‌آموزان باید با مفهوم توابع چند جمله‌ای آشنا باشند.

### نگاه کلّی به بخش

در ریاضی ۱، دانش‌آموزان با نمودار تابع $f(x) \quad x^۲$ آشنا شده‌اند و در این بخش می‌آموزند که با استفاده از نمودار این تابع، چگونه می‌توان نمودار برخی توابع درجهٔ دوّم را رسم کرد.

**ورود به مطلب** : پس از رسم نمودار تابع $f(x) \quad x^۲$، دانش‌آموزان باید توانایی رسم نمودار توابع درجهٔ دوّم به شکل کلّی $f(x) \quad a(x \quad h)^۲ \quad k$ را به کمک انتقال، کسب کنند. لازم به ذکر است که در آینده، دانش‌آموزان با رسم این گونه توابع به صورت کامل آشنا خواهند شد.

### توصیهٔ آموزشی

با توجه به اینکه در بخش‌های قبلی این فصل، دانش‌آموزان رسم توابع قدر مطلق را به کمک انتقال نمودار تابع $f(x) \quad x$ آموخته‌اند، انتظار می‌رود فرایند تدریس این بخش به گونه‌ای تدوین شود که دانش‌آموزان به صورت گام به گام بتوانند نمودار تابع درجهٔ دوّم را به صورت کلی بیاموزند.

**بپرسید** : نمودار توابع $y \quad ۲x^۲ \quad ۱۲x \quad ۴$ و $y \quad ۶x \quad x^۲$ چگونه رسم می‌شوند.

**توسعه دهید** : به دانش‌آموزان توضیح دهید که چه رابطه‌ای بین نمودار تابع $f(x) \quad x^۲ \quad ۱$ و $f(x) \quad x^۲ \quad ۱$ برقرار است؟

# توابع گویا

## اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

۱ــ مفهوم توابع گویا را با ذکر مثال توضیح دهند.

۲ــ دامنهٔ توابع گویا را به دست آورند.

۳ــ مسائل مرتبط با توابع گویا را از طریق مدلسازی حل کنند.

## پیش نیازها

آشنایی با مفاهیم اعداد گویا، چند جمله‌ای‌ها و تابع

## نگاه کلّی به بخش

در این بخش، دانش‌آموزان پس از مرور مفاهیم اعداد گویا، چند جمله‌ای‌ها و تابع، با مفهوم جدیدی به نام توابع گویا آشنا می‌شوند. یکی از مهم‌ترین نکات این بخش به دست آوردن دامنهٔ این گونه توابع است. توابع گویا در دنیای واقعی دارای کاربردهای فراوانی اند که معلمان می‌توانند با ذکر مثال‌های متنوع توجه دانش‌آموزان را به اهمّیت این بخش جلب کنند.

**ورود به مطلب :** دانش‌آموزان در سال اوّل دبیرستان با عبارت‌های گویا به عنوان عبارت‌های جبری که پس از ساده کردن به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای در می‌آیند و همچنین با دامنهٔ عبارات گویا به ازای مقداری از x که عبارت به ازای آن تعریف شده است، آشنا شده‌اند. بنابراین برای آغاز تدریس این بخش می‌توان ابتدا به یادآوری مطالب آموخته شده در سال‌های گذشته پرداخت.

**فعّالیت صفحهٔ ۶۴**

**هدف :** یادآوری توابع گویا و به دست آوردن دامنهٔ تابع گویای $f(x)=\frac{1}{x}$

در این فعّالیت دانش‌آموزان بر اساس جدول ارائه شده، معادلهٔ تابع را به دست می‌آورند و سپس با ذکر این نکته که دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعدادی است که به ازای آنها عبارت گویای $\frac{1}{x}$ تعریف شده است، با مفهوم دامنهٔ توابع به صورت دقیق‌تر آشنا می‌شوند. در انتهای این فعّالیت، نمودار این تابع از طریق نقطه یابی رسم شده است که با توجه به نمودار نیز می‌توان دامنه و برد این تابع را به دست آورد.

**بپرسید :** دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^{2}-1}{x-1}$ را به دست آورید.

در اینجا باید به دانش‌آموزان بیاموزیم که در توابع گویا، یافتن دامنهٔ تعریف تابع باید قبل از ساده کردن تابع صورت گیرد.

# توابع رادیکالی

## اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

۱ــ توابع رادیکالی را با ذکر چند مثال تعریف کنند.

۲ــ دامنهٔ تعریف یک تابع رادیکالی را به دست آورند.

۳ــ با استفاده از انتقال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ ، نمودار توابع رادیکالی به صورت کلی $f(x)=\sqrt{ax+b}$ را رسم کنند.

۴ــ با استفاده از نمودار توابع رادیکالی، دامنه و برد آنها را به دست آورند.

## پیش نیازها

آشنایی با مفاهیم رادیکال، تابع، دامنه و برد تابع و رسم نمودار با استفاده از انتقال

## نگاه کلّی به بخش

در این بخش دانش‌آموزان پس از مرور مفهوم رادیکال و مطالب آموخته شده در همین ارتباط در فصل اوّل کتاب، با مفهوم توابع رادیکالی آشنا می‌شوند. در این بخش نیز مانند بخش قبلی، به دست آوردن دامنهٔ تعریف توابع رادیکالی یکی از موضوعات اصلی است.

**ورود به مطلب** : دانش‌آموزان در دورهٔ راهنمایی با مفاهیم اولیهٔ جذر و در سال اوّل دبیرستان، با مفاهیم ریشهٔ دوّم و ریشهٔ سوّم و در فصل اوّل همین کتاب، با مفاهیم ریشه گیری اعداد حقیقی و قوانین مربوط آشنا شده‌اند؛ بنابراین قبل از شروع مبحث توابع رادیکالی، بهتر است مطالب گذشته مرور و سپس بحث توابع رادیکالی آموزش داده شود. در این بخش نیز یکی از موضوعات اصلی، تعیین دامنهٔ توابع رادیکالی است که باید با تأکید بیشتر و ذکر مثال‌های متنوع در کلاس درس مورد بررسی قرار گیرد.

## توصیهٔ آموزشی

به منظور معرفی توابع رادیکالی، در مثال‌های ارائه شده، ریشه دوّم اعداد حقیقی نامنفی یادآوری شده است و با استفاده از نمودار ون، اعداد حقیقی نامنفی به ریشهٔ دوّم مثبت آنها متناظر شده‌اند. بدین ترتیب تابع رادیکالی $f(x)=\sqrt{x}$ معرفی می‌شود و توابع دیگر رادیکالی که به شکل کلی $y=\sqrt{ax+b}$ می‌باشند، با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ رسم می‌شوند. دامنه و برد این توابع را می‌توان با استفاده از نمودار آنها به دست آورد.

**هدایت کنید** : در مسائل این بخش، علاوه بر تأکید بر دامنهٔ توابع رادیکالی و گویا، مسائلی نیز در زمینهٔ ترکیب توابع ارائه شده است. اینگونه مسائل به منظور آشنایی دانش‌آموزان با عملیات جبری بر روی توابع است که در سال آینده بیشتر به آن پرداخته خواهد شد.

# نامعادله و تعیین علامت

## اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

۱ــ مفهوم نامعادله و تعیین علامت را با ذکر چند مثال توضیح دهند.

۲ــ مجموعهٔ جواب نامعادلات درجهٔ اوّل و دوّم را به کمک تعیین علامت به دست آورند.

۳ــ برای حلّ مسائل مرتبط با این بخش، یک مدل ریاضی مناسب بیابند و مسائل را حل کنند.

## پیش نیازها

دانش‌آموزان با حلّ معادلات درجهٔ اوّل و دوّم، نامساوی‌ها و مقدار عددی یک عبارت جبری آشنا باشند.

## نگاه کلّی به بخش

در این بخش، دانش‌آموزان با مفهوم علامت نامعادلات درجهٔ اوّل و درجهٔ دوّم که یکی از مفاهیم کاربردی ریاضی است آشنا می‌شوند.

**ورود به مطلب** : در ابتدای تدریس این بخش، لازم است مفاهیم معادله و نامعادله درجهٔ اوّل و دوّم برای دانش‌آموزان یادآوری شود و سپس دانش‌آموزان مفهوم تعیین علامت یک نامعادله را درک کنند. برای ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان می‌توان از مثال‌هایی مانند مثال کتاب که در مورد سود و زیان است، اشاره کرد. با ذکر این‌گونه مثال‌ها، دانش‌آموزان با اهمّیت و مفهوم این مبحث بیشتر آشنا خواهند شد. در کتاب درسی، برای شروع بحث از یک مسئلهٔ مرتبط با سود و زیان بدون ذکر روش به دست آوردن رابطه بین تعداد کالای تولیدی و سود حاصل از فروش استفاده شده است، ولی می‌توان برای کمک به فهم بهتر موضوع، روش به دست آوردن این رابطه را نیز برای دانش‌آموزان توضیح داد. البته بهتر است از دانش‌آموزان خواسته شود تا خودشان جدول مربوط را تکمیل کنند و در مورد سطر دوّم این جدول بحث و تبادل نظر صورت گیرد. پیش از ارائهٔ روش تعیین علامت یک عبارت درجهٔ اوّل و یا درجهٔ دوّم، لازم است دانش‌آموزان با مفهوم تعیین علامت آشنا شوند؛ زیرا بدون درک مفهوم تعیین علامت، دانش‌آموزان قوانین مربوط به آن را تنها به صورت یک عمل مکانیکی انجام می‌دهند.

**فعّالیت صفحهٔ ۷۴**

**هدف** : آشنایی با مفهوم تعیین علامت یک عبارت جبری درجهٔ اوّل از روی جدول و نمودار.

در این فعّالیت، دانش‌آموزان باید با مفهوم تعیین علامت آشنا شوند. بهتر است معلمان نیز با ارائهٔ مثال‌های مختلف و در نمایش‌های مختلف این مفهوم را برای دانش‌آموزان توضیح دهند و در پایان پس از اطمینان از اینکه دانش‌آموزان با مفاهیم مربوط به خوبی آشنا شدند، می‌توان حالت کلّی تعیین علامت عبارت $y \quad ax \quad b$ را در حالت‌های مختلف $a$، آموزش داد.

## توصیهٔ آموزشی

برای تعمیم این مبحث، می‌توان به دامنهٔ توابع رادیکالی اشاره کرد و از دانش‌آموزان خواست تا دامنهٔ تعریف این گونه توابع را با استفاده از تعیین علامت به دست آورند.

**تمرین در کلاس صفحهٔ ۷۷**

**هدف :** یافتن قاعده‌ای برای تعیین علامت نامعادلات درجهٔ دوّم

در این تمرین، دانش‌آموزان با تجزیهٔ یک عبارت درجهٔ دوّم به دو عبارت درجهٔ اوّل و سپس تعیین علامت هر کدام از آنها، می‌توانند بر اساس قوانین ضرب علامت‌های مثبت و منفی، تعیین علامت کلّی عبارت درجهٔ دوّم را به دست آورند. در این تمرین و با ارائهٔ مثال‌های بیشتر، باید به دانش‌آموزان کمک کرد تا بتوانند قاعدهٔ تعیین علامت عبارات درجهٔ دوّم را به دست آورند.

**تمرین در کلاس صفحهٔ ۷۸**

**هدف :** تعبیر هندسی مفهوم تعیین علامت نا معادلات درجهٔ دوّم

در این تمرین در کلاس، دانش‌آموزان با تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ دوّم با استفاده از نمودار و همچنین تعبیر هندسی تعیین علامت از روی نمودار آشنا می‌شوند و این امر به فهم بهتر موضوع تعیین علامت خیلی کمک می‌کند. در قسمت چهارم این تمرین در کلاس، به معادلات درجهٔ دوّمی اشاره می‌کند که ریشه حقیقی ندارند.

**فعّالیت صفحهٔ ۷۹**

**هدف :** دانش‌آموزان با برقراری ارتباط بین تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ دوّم و عبارت‌های درجهٔ اوّل، روش تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ دوّم را بهتر درک کنند.

**تمرین در کلاس صفحهٔ ۸۰**

**هدف :** دانش‌آموزان چند جمله‌ای درجهٔ دوّم $ax^2 \quad bx \quad c$ در حالتی‌که $\Delta \geq 0$ است را تعیین علامت کنند.

در سه تمرین اوّل، دانش‌آموزان معادلات درجهٔ دوّمی را تعیین علامت می‌کنند که در آنها $\Delta \geq 0$ است و در قسمت چهارم، پیش از شروع بحث، تعیین علامت معادلات درجهٔ دوّمی که ریشه حقیقی ندارند و یا در آنها $\Delta < 0$ است با استفاده از رسم دو معادلهٔ داده شده، به بحث گذاشته می‌شود.

در واقع این سؤال مقدّمه بحث بعدی است، به طوری که در پایان دانش‌آموزان در یابند که معادلات درجهٔ دوّمی که در سال گذشته با مفهوم آن آشنا شده‌اند، در سه حالت $\Delta > 0$ و $\Delta = 0$ و $\Delta < 0$ به ترتیب دارای دو جواب، یک جواب و بدون جواب هستند و نسبت به محورهای مختصات چه وضعیتی دارند.

**هدایت کنید :** در صورت لزوم، دانش‌آموزان را در کاربرد تعیین علامت معادلات درجهٔ دوّم در محاسبهٔ دامنهٔ توابع رادیکالی راهنمایی کنید.

**توسعه دهید :** نمودار یک تابع $y = \sqrt{f(x)}$ نسبت به محور xها همواره چگونه است؟

**سؤال صفحهٔ ۸۲**

**هدف :** دانش‌آموزان بین تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوّم و نحوهٔ قرارگرفتن نمودار این تابع در صفحهٔ مختصات ارتباط معناداری برقرار کنند.

در این سؤال و مثال بعد از آن، باید دانش‌آموزان درک درستی از علامت توابع درجهٔ دوّمی که ریشه ندارند، پیدا کنند.

# سؤالات تکمیلی

۱ــ به ازای چه مقادیر از a و b تابع $f \quad \{(\ ۱, a^۲)(۳, b \quad ۱), (۲, ۱)\}$ به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

۲ــ اگر $f \quad \{(\ ۱, b \quad ۱), (a^۳, ۱), (b^۲, c \quad ۱)\}$ یک تابع همانی باشد مقادیر a ،b ،c را مشخص کنید.

۳ــ با استفاده از نمودار تابع $y \quad x$ نمودار تابع $y \quad x \quad ۱ \quad ۲$ را در دامنه $[\ ۴, ۲]$ رسم کنید.

۴ــ نمودار تابع $f(x) \quad x^۲ \quad ۴$ را رسم کنید و برد آن را مشخص کنید.

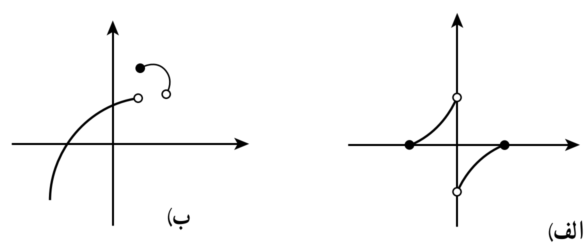
۵ــ دامنه توابع زیر را به‌دست آورید.

$$f(x) = \frac{-۱}{x^۳ + x}$$

$$g(x) = \frac{x - ۲}{x^۲ + ۱}$$

$$h(x) = \frac{x^۲ + x + ۱}{x^۲ - ۳x + ۲}$$

۶ــ کدام نمودار، یک تابع یک‌به یک را نشان می‌دهد.




۷ــ اگر f یک تابع یک به یک باشد و $f \quad \{(۲, a \quad ۱)(\ ۱, a \quad ۴)(۰, c \quad ۱)\}$ و $f^{\ ۱} \quad \{(۰, c)(۳, ۲)(b, ۰)\}$ مقادیر a ، b ،c را پیدا کنید.

۸ــ اگر $D \quad [\ ۵, ۷]$ نمودار تابع f را طوری رسم کنید که یک به یک باشد و برای $x > ۰$ داشته باشیم $f(x) < ۰$ .

۹ــ اگر f یک تابع خطی باشد به‌طوری که نمودار آن محور xها را در نقطهٔ به طول ۲ قطع کند و $f(\ ۳) \quad ۱$ ، ضابطه تابع وارون آن را به‌دست آورید.

۱۰ــ در چه بازه‌ای نمودار تابع $f(x) \quad x^۲ \quad ۲x \quad ۸$ در پایین محور xها است؟

۱۱ــ به ازای چه مقادیری از a عبارت $A \quad x^۲ \quad ۲(a \quad ۱)x \quad ۱$ همواره مثبت است؟

۱۲ــ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{(x-۱)}{-x^۲ + ۵x - ۴}}$ را مشخص کنید.

۱۳ــ نمودار تابع $y = \sqrt{۲x - ۱}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

۱۴ــ به ازای چه مقداری از a دامنه تابع $f(x) = \frac{x^۲ - ۴}{x^۲ - ax + ۱}$ برابر $R \quad \{۱\}$ است؟

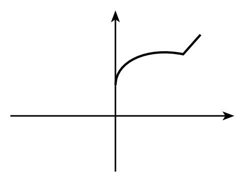
## نمونه سؤالات ارزشیابی پایانی

۱ــ سه جملهٔ بعدی دنبالهٔ .... $,\frac{۵}{۴},\frac{۴}{۳},\frac{۳}{۲},۲$ را بنویسید، سپس جملهٔ nام آن را بیابید.

۲ــ در یک دنبالهٔ هندسی، حاصل ضرب جملهٔ اوّل و جملهٔ پنجم ۱۶ می‌باشد. حاصل ضرب جملهٔ دوّم و چهارم را پیدا کنید.

۳ــ اگر x عددی مثبت باشد، جواب معادلهٔ زیر را پیدا کنید. $\sqrt[۳]{x\sqrt[۳]{x^{۲}\sqrt{x}}} = ۲$

۴ــ نمودار تابع f در شکل زیر داده شده است، نمودار وارون آن را رسم کنید.
آیا وارون آن یک تابع است؟



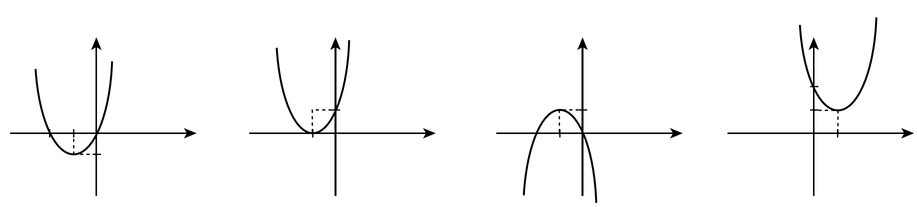
۵ــ تابع f را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب طوری مشخص کنید که در شرایط زیر صدق نماید.

الف) f یک به یک باشد.

ب) دامنهٔ تابع مجموعهٔ $\{ ۱, ۰, ۱\}$ باشد.

پ) $f(\ ۱) < f(۱)$

۶ــ کدام‌یک از شکل‌های زیر، نمودار توابع داده شده است؟



الف) $y\quad (x\quad ۱)^{۲}\quad ۱$

ب) $y\quad (x\quad ۱)^{۲}\quad ۱$

پ) $y\quad (x\quad ۱)^{۲}\quad ۱$

۷ــ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{۱}{x^{۲}}$

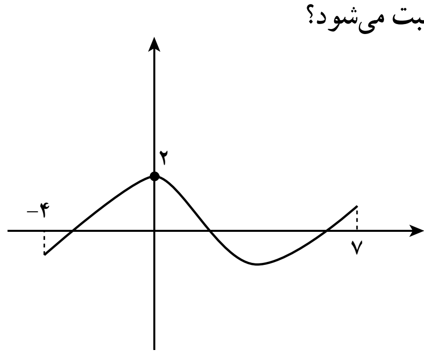
ب) $g(x) = \sqrt{-x+۳}$

پ) $h(x) = \frac{۵x-۳}{۴}$

۸ــ اگر $f(x\quad ۲)\quad x^{۲}\quad ۲$ باشد، $f(۱)$ را به دست آورید.

۹ــ به ازای چه مقداری از a، معادلهٔ $y\quad ax^{۲}\quad ۳x\quad ۱$ همواره مثبت می‌شود؟

۱۰ــ با توجه به نمودار تابع f، دامنه و برد تابع $\sqrt{f(x)}$ را بیابید.



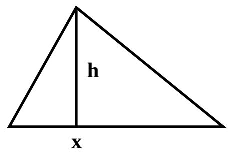
۱۱ــ تابع $f(x)=\sqrt{-(۱-x)(۲x+۱)}$ به ازای چه مقادیری از x قابل قبول است؟

۱۲ــ با رسم نمودار تابع $y \quad x^۲ \quad ۲x \quad ۱$ جواب نامعادله $x^۲ \quad ۲x \quad ۱ \geq ۰$ را به دست آورید.

۱۳ــ با رسم نمودار تابع $y \quad x \quad ۳$ دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

۱۴ــ مقدار a و b را چنان مشخص کنید که $f \quad \{( ۴ \quad a^۲ \quad ۱)(a \quad ۶, ۳) ( ۴, ۳)( ۸, b)\}$ یک تابع باشد.

۱۵ــ در مثلث زیر، ارتفاع مثلث یک واحد کمتر از قاعدهٔ آن است. رابطهٔ ریاضی برای مساحت مثلث بر حسب تابعی از قاعده آن بنویسید.



فصل ۴

# توابع نمایی و لگاریتمی

# نگاه کلّی به فصل چهارم کتاب درسی

## اهداف کلّی

۱ــ آشنایی با توابع نمایی و ویژگی‌های آنها و روش رسم نمودار این‌گونه توابع
۲ــ آشنایی با مفهوم لگاریتم و توابع لگاریتمی و ویژگی‌های آنها
۳ــ تعیین مقدار لگاریتم یک عدد و بیان معنی آن
۴ــ حلّ معادلات لگاریتمی
۵ــ آشنایی با قضایای لگاریتم و کاربرد آنها در حلّ معادلات لگاریتمی

## عملکرد مورد انتظار دانش‌آموزان

دانش‌آموزان باید بتوانند :
۱ــ مفهوم تابع نمایی را با ذکر مثال و ویژگی‌های آن بیان کنند.
۲ــ توابع نمایی را با استفاده از جدول مقادیر رسم کنند.
۳ــ دامنه و برد توابع نمایی به صورت کلی $y \quad a^x$ را به دست آورند.
۴ــ نمودار یک تابع نمایی را رسم کنند.
۵ــ تبدیل‌های توابع نمایی را رسم کنند.
۶ــ مفهوم تابع لگاریتمی و رابطهٔ آن با تابع نمایی را با ذکر مثالی بیان کنند.
۷ــ یک رابطهٔ نمایی را به صورت یک رابطهٔ لگاریتمی بنویسند.
۸ــ لگاریتم یک عدد را به دست آورند.
۹ــ معادلات لگاریتمی را حل کنند و در حل آنها از قوانین لگاریتم‌ها به درستی استفاده کنند.
۱۰ــ دامنه و برد یک تابع لگاریتمی را به دست آورند.

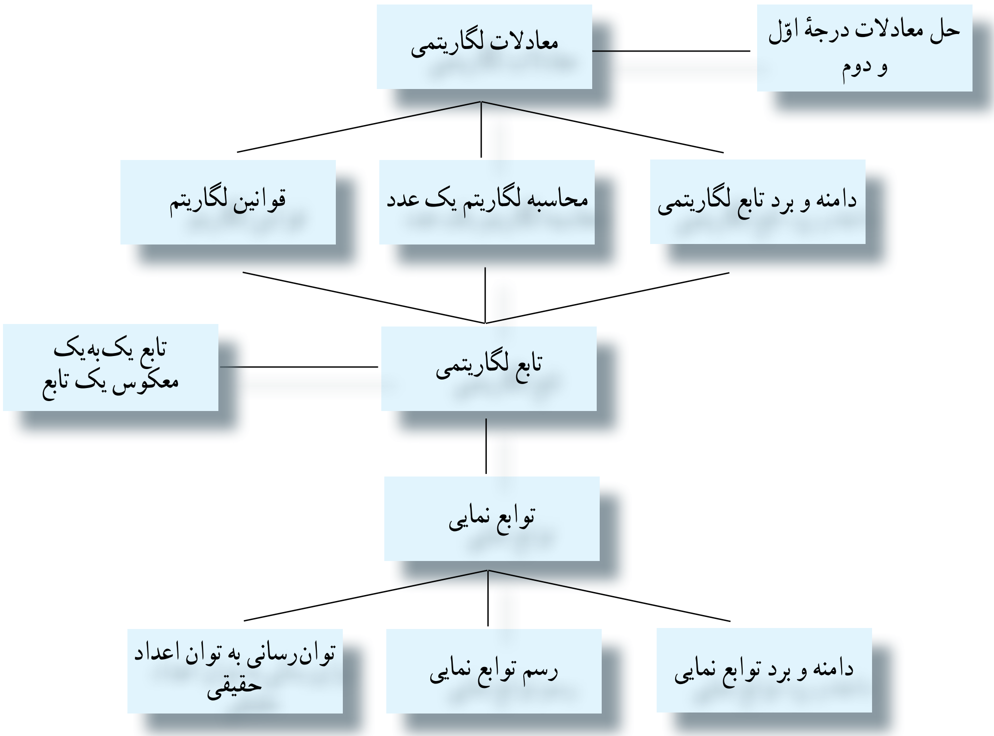
## پیش نیازها

آشنایی با محاسبه عبارت‌های توانی و رسم توابع با استفاده از جدول مقادیر

## زمان بندی پیشنهادی برای تدریس این فصل

| | |
|---|---|
| تابع نمایی | جلسهٔ بیست و سوم |
| تابع لگاریتمی و محاسبهٔ لگاریتم یک عدد | جلسهٔ بیست و چهارم |
| معادلات لگاریتمی و قوانین لگاریتم ها | جلسهٔ بیست و پنجم |
| حل معادلات لگاریتمی با استفاده از قوانین لگاریتم‌ها | جلسهٔ بیست و ششم |
| ارزشیابی پایانی | جلسهٔ بیست و هفتم |

## نقشهٔ مفهومی فصل چهارم کتاب درسی



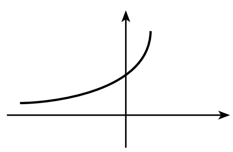

## دانستنی برای معلّم

توابع نمایی در ادامهٔ فصل توابع خاص معرفی می‌شوند. دانش‌آموزان در فصل اول با توان رسانی با توان اعداد حقیقی و قوانین مربوط به آن آشنا شده‌اند و می‌دانند برای تعریف مقدار $a^x$ به ازای هر عدد حقیقی x، با توجه به آنچه که در فصل اوّل گفته شده است، یک عدد حقیقی نسبت داده می‌شود.

باید توجه داشت برای آنکه $a^x$ قابل تعریف باشد، لازم است a مثبت باشد، زیرا برای تعریف $a^x$ حتی اگر x یک عدد حقیقی باشد، باید a را به توان اعداد گویایی که به x نزدیک می‌شوند برسانیم و چون ممکن است هر عدد گویایی به جای x قرار گیرد، بنابراین a هم باید به گونه‌ای باشد که جملهٔ بی معنا به دست نیاید. لازم است شرط کنیم که a مثبت است.

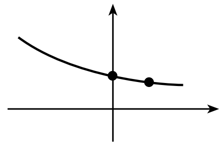
تابع نمایی، تابعی است که در ضابطهٔ آن، متغیر مستقل در توان قرار گرفته است. تابع نمایی اصلی به صورت $f(x) \quad a^x$ که $a \neq ۱, a > ۰$ می‌باشد. دامنهٔ تابع نمایی، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی و برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت است.

در تابع نمایی $f(x) \quad a^x$ در حالتی که $a > ۱$ باشد، نمودار از نقاط (۱ و ۰) و (a و ۱) می‌گذرد و چون $a^{۰} \quad ۱$، پس نمودار متقارن نیست و با توجه به اینکه $a > ۱$ است، با افزایش مقدار x ، $a^x$ نیز افزایش می‌یابد. پس تابع صعودی است ؛بنابراین یک تابع نمایی رشد است. از طرف دیگر با کاهش مقدار x، $a^x$ به صفر میل می‌کند، یعنی قسمت منفی محور xها مجانب افقی نمودار است.



در تابع نمایی $f(x) \quad a^x$ در حالتی که $۰ < a < ۱$ باشد، نمودار تابع از نقطهٔ $(۰,۱)$ می‌گذرد و چون $a \quad a^۱$، نمودار این تابع از نقطهٔ $(a، ۱)$ می‌گذرد و با افزایش مقدار $x$ چون $۰ < a < ۱$، مقدار $a^x$ کاهش می‌یابد؛ یعنی تابع روی $R$ نزولی است، بنابراین، یک تابع نمایی نزولی است.

همچنین با کاهش مقدار $x$، مقدار $a^x$ افزایش می‌یابد؛ بنابراین، قسمت مثبت محور $x$ها، مجانب افقی نمودار است.



با معلوم بودن نمودار تابع $y \quad a^x$، می‌توان تمام تبدیلات آن به صورت $y \quad b \times a^x \; {}^c$ را رسم کرد. برای رسم این قبیل توابع کافی است ابتدا نمودار $y \quad a^x$ را رسم کنیم، سپس با انتقال $c$ واحد در امتداد محور طول‌ها، نمودار تابع $y \quad a^x \; {}^c$ را به دست آورد و سرانجام با ضرب عرض نقاط در مقدار $b$، به نمودار $y \quad b \times a^x$ رسید.

# آموزش بخش‌های فصل چهارم کتاب درسی
# (سلول‌های بنیادی (تابع نمایی))

## اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش دانش‌آموزان بتوانند :

۱ــ مفهوم تابع نمایی را با ذکر چند مثال و ویژگی‌های آن بیان کنند.

۲ــ توابع نمایی را با استفاده از جدول مقادیر رسم کنند.

۳ــ دامنه و برد توابع نمایی به صورت کلی $y=a^x$ را به دست آورند.

۴ــ نمودار یک تابع نمایی به صورت کلی $y=a^x$ را رسم کنند.

۵ــ تبدیل‌های توابع نمایی را رسم کنند.

## پیش نیازها

آشنایی با مفهوم توان و محاسبات عبارت‌های توانی و روش رسم نمودار توابع با استفاده از جدول مقادیر

## ارزشیابی تشخیصی

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید (جواب را تقریبی مشخص کنید)

$2^{\sqrt{2}}$    $2^{\frac{5}{3}}$    $2^{-\frac{3}{4}}$    $2^{-3}$    $2^{3}$    $2^{0}$

## نگاه کلّی به بخش

در این بخش دانش‌آموزان با مفهوم جدیدی به نام توابع توانی آشنا می‌شوند. از این مفهوم برای توصیف و مدلسازی بسیاری از پدیده‌های طبیعی و مسایل رشد و زوال می‌توان استفاده کرد. دانش‌آموزان با مفهوم تابع و توابع چند جمله‌ای و گویا و رادیکالی در فصل قبل آشنا شده‌اند.

همچنین مفهوم متغیر مستقل و وابسته به طور تلویحی در بخش‌های قبل بیان شده است. می‌توان با این پرسش درس را آغاز کرد که آیا می‌توان متغیر مستقل را در توان یک عبارت قرار داد، مانند $y=2^x$؟ آیا این رابطه یک تابع خواهد بود؟

**ورود به مطلب** : معرفی تابع نمایی با مثالی از کاربرد این تابع در علوم زیستی آغاز شده است. پژوهش‌های انجام شده در مورد سلول‌های بنیادی در سال‌های اخیر رشد بسیار چشم‌گیری داشته است به طوری که منجر به تولید سلول های جنینی انسان شده است. از آنجایی که تکثیر این سلول‌ها نامحدود می‌باشد و تعداد سلول‌های بنیادی در هر مرحله به صورت نمایی یا توانی رشد می‌کند، برای یافتن تعداد سلول‌ها در هر مرحله می‌توان از یک مدل ریاضی استفاده کرد. در این بخش دانش‌آموزان با تشخیص الگوی جدول ارائه شده، قانونی برای دو کمّیت تعداد سلول‌ها و مراحل تکثیر ارائه می‌دهند. روش آموزشی این بخش الگویابی است.

**فعّالیت صفحهٔ ۸۷**

**هدف :** یافتن تعداد سلول‌های بنیادی در هر مرحله از تکثیر و الگوی کلی حاکم بر این فرایند و مدل ریاضی آن.

در این فعّالیت، دانش‌آموزان باید بتوانند جدول صفحهٔ ۸۷ کتاب درسی را تکمیل کنند و سپس برای یافتن الگوی ریاضی این فرایند، باید به سمت تکمیل جدول صفحهٔ ۸۸ هدایت شوند. در این جدول، دانش‌آموزان می‌آموزند که تعداد سلول‌های هر مرحله از تکثیر را می‌توان به صورت عددی توان دار با پایهٔ ۲ نوشت، که توان هر مرحله با شمارهٔ آن مرحله برابر است؛ یعنی در مرحلهٔ دوّم تعداد سلول ها برابر است با $۲^۲$ و در مرحلهٔ دهم از تکثیر، تعداد سلول‌ها را می‌توان به صورت $۲^{۱۰}$ نمایش داد. نمودار این جدول نیز در صفحهٔ ۸۸ نمایش داده شده است. در این نمودار، ویژگی کلّی توابع نمایی به صورت کلّی $y \quad a^x$ که در آن $a>۱$ باشد را می‌توان برای دانش‌آموزان توضیح داد. البته برای به دست آوردن یک قاعدهٔ کلی بهتر است چند مثال دیگر نیز برای دانش‌آموزان ارائه شود تا خودشان بتوانند در این زمینه به نتایج مورد نظر برسند.

## توصیهٔ آموزشی

با طرح مطلب قسمت بیندیشیم کتاب درسی، دانش‌آموزان به این نکته پی می‌برند که تابع $y \quad a^x$ برای مقادیر $a<۰$ قابل تعریف نیست و همچنین در حالت $a \quad ۱$ این تابع به صورت تابع ثابت $y \quad ۱$ در خواهد آمد، که در این حالت نیز یک تابع نمایی نیست. بدین‌ترتیب دانش‌آموزان می توانند دامنه و برد این تابع را نیز تعیین کنند. برای بررسی یک به یک بودن تابع $y \quad a^x$ با شرایط ذکر شده در بالا، کافی است از شرط یک به یک بودن یک تابع از روی نمودار استفاده کنیم و به این نتیجه برسیم که این تابع یک به یک است و بنابراین وارون پذیر است. وارون این تابع در بخش بعدی همین فصل مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

**تمرین در کلاس صفحهٔ ۹۱**

در این تمرین، دانش‌آموزان نمودارهای توابع $y \quad ۳^x$، $y \quad ۴^x$ و $y \quad ۵^x$ را به کمک نقطه یابی در یک دستگاه در کنار هم رسم می‌کنند و از مقایسه آنها به این نتیجه می‌رسند که هر سه تابع نمایی رشد را نشان می‌دهند و هر چه در تابع $y \quad a^x$، $a$ بزرگ‌تر شود، این رشد سریع‌تر شده و نمودار آن به محور عرض ها نزدیکتر می شود.

**مثال صفحهٔ ۹۲**

در این مثال، دانش‌آموزان با رسم تابع $y \quad a^x$ در حالتی که $a=\frac{۱}{۲}$ یعنی $۰<a<۱$ باشد،آشنا می‌شوند. در این نوع مثال‌ها با افزایش مقدار $x$، مقدار $y$ کم می‌شود و دانش‌آموزان باید این حالت را با حالتی که $a>۱$ است، مقایسه کنند و تفاوت‌های دو حالت را درک کنند. در حقیقت این تفاوت نمایانگر تفاوت بین توابع رشد و زوال است که البته در این بخش به رشد و زوال اشاره‌ای نشده است.

**تمرین در کلاس صفحهٔ ۹۳**

**هدف :** رسم نمودار تابع $y \quad a^x \quad k$ با استفاده از انتقال نمودار تابع $y \quad a^x$.

در این تمرین از دانش‌آموزان خواسته شده است، تفاوت نمودارهای $y \quad a^x$ را وقتی که $a>۱$ و $۰<a<۱$ هستند،مورد بحث و بررسی قرار دهند.

## توصیهٔ آموزشی

در این بخش، انتقال نمودار تابع $y \quad a^x$ برای $y \quad a^x \quad k$ و $y \quad ka^x$ رسم شده است. محل تلاقی نمودار با محور عرض‌ها و انبساط یا انقباض نمودار $y \quad ka^x$ نسبت به نمودار $y \quad a^x$ و رشد و زوال تابع نمایی ویژگی‌هایی هستند که باید مورد بررسی

قرار گیرند.

**نکته** : در مثال صفحهٔ ۹۳، نمودار سه تابع $y=2^x$، $y=3\times 2^x$ و $y=0/5\times 2^x$ رسم شده و محل تلاقی هر نمودار با محور yها مشخص شده است و در قسمت بیندیشیم همین صفحه، وجه مشترک و وجه اختلاف این نمودارها خواسته شده است. هدف قسمت بیندیشیم کتاب درسی تشخیص منحنی‌های رشد می‌باشد، که اختلاف این توابع در انبساط و انقباض توابع نسبت به محور عرض‌ها ست.

**تمرین در کلاس صفحهٔ ۹۵**

در این تمرین، دانش‌آموزان می‌آموزند در صورتی‌که تغییرات x به طور منظم افزایش یابد (تغییرات x یک دنباله حسابی باشد)و تغییرات y یک دنبالهٔ هندسی را تشکیل دهند، می‌توان ضابطه تابع نمایی را مشخص کرد.

# لگاریتم و تابع لگاریتمی

## اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

۱ــ مفهوم تابع لگاریتمی و رابطهٔ آن با تابع نمایی را با ذکر مثالی بیان کنند.

۲ــ یک رابطهٔ نمایی را به یک رابطهٔ لگاریتمی و بالعکس تبدیل کنند.

۳ــ لگاریتم یک عدد را به دست آورند.

۴ــ معادلات لگاریتمی را حل کنند و در حلّ آنها از قوانین لگاریتم‌ها به درستی استفاده کنند.

۵ــ دامنه و برد یک تابع لگاریتمی را به دست آورند.

## پیش نیازها

آشنایی با توابع نمایی و رسم نمودار وارون یک تابع

## نگاه کلّی به بخش

پس از آشنایی دانش‌آموزان با توابع نمایی و خواص آنها، در این بخش با وارون توابع نمایی که توابع لگاریتمی نام دارند، آشنا می‌شوند. پس از آشنایی با توابع لگاریتمی، دانش‌آموزان با قوانین حاکم بر این مبحث و سپس حل معادلات لگاریتمی آشنا خواهند شد.

**ورود به مطلب** : در بحث توابع نمایی، تعداد سلول‌های تکثیر شده را در زمان‌های مختلف به دست می‌آوریم. اینک این پرسش مطرح می شود که تعداد معینی از سلول‌ها پس از چه زمانی به وجود می‌آید؟ پاسخ به این سؤال بحث معکوس تابع نمایی را در بر خواهد داشت و تابع لگاریتمی را تعریف می‌کند.

در فصل دوّم و در مبحث مربوط به وارون تابع، دانش‌آموزان فراگرفته اند که با معلوم بودن مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب یک تابع، وارون تابع را به دست آورند. در این بخش نیز با معلوم بودن جدول مقادیر تابع نمایی $y=2^x$، ابتدا وارون آن را محاسبه می‌کنیم و سپس ضابطهٔ وارون تابع نمایی، به صورت $x=2^y$ تعریف شده است. سپس این ضابطه به عبارت لگاریتمی $y=\log_2 x$ تبدیل می‌شود. بدین ترتیب دانش‌آموزان فرا می‌گیرند چگونه یک عبارت توانی را به صورت لگاریتمی و بالعکس بنویسند.