نگاه کلّی به بخش

هدف این بخش، توسعهٔ مفهوم ریشه‌گیری از ریشه‌های دوّم و سوّم به ریشه‌های مراتب بالاتر است.

این بخش، پیش‌نیاز اصلی برای بخش بعدی در تعریف توان‌رسانی با توان اعداد گویا است. از آنجا که دانش‌آموزان با مفهوم ریشه‌گیری آشنایی کافی ندارند، تمامی مفاهیم تقریباً به طور مستقیم ارائه شده است و نیازی به مقدمه و مفهوم‌سازی نبوده است. برای بررسی ویژگی‌ها و خواص ریشه‌گیری، فعالیتی آمده است تا دانش‌آموزان با انجام این فعالیت، خواص ریشه‌گیری را به دست آورند.

ورود به مطالب : یک راه مناسب برای ورود به این مبحث، یادآوری ریشهٔ دوّم وسوّم یک عدد و پرسش در مورد چگونگی تعمیم این مفهوم است. ابتدا برای ریشه‌های چهارم و پنجم می‌توانید پیشنهادهای دانش‌آموزان را بررسی کنید و سپس تعریف ریشهٔ kام را استخراج کنید. در نمادگزاری $\sqrt[k]{a}$ دقت کنید که در حالت زوج و فرد بودن k، مفهوم فرق می‌کند.

در حالت فرد بودن k، فقط یک عدد b موجود است به طوری‌که $a \quad b^k$ ، b را با $\sqrt[k]{a}$ نشان می‌دهیم. اما در حالت زوج بودن k، دو عدد b, b موجودند به طوری‌که $a \quad (\ b)^k \quad b^k$. در اینجا ریشهٔ kام که مثبت است را با $\sqrt[k]{a}$ نشان می‌دهیم، توجه داشته باشید که در این حالت a نیز عددی مثبت خواهد بود.

فعّالیت صفحهٔ ۱۸

اهداف : دانش‌آموزان بتوانند ریشهٔ kام یک عدد حقیقی را در صورت وجود مشخص کنند. قواعد مربوط به ریشه‌گیری و محاسبه با رادیکال را به دست آورند و قواعد محاسبه با رادیکال‌ها را در مسائل مربوط به کار ببرند.

۱ ــ روشن است وقتی که a به توان k برسد، حاصل برابر a^k است. پس به دلیل فرد بودن k، a ریشهٔ kام a^k خواهد بود و $\sqrt[k]{a^k} = a$

۲ ــ $a\ ,\ a$ که به توان k برسند، برابر a^k می‌شوند. از بین $a\ ,\ a$ آن یکی که مثبت است، همان a است، پس ریشه kام a^k برابر a است، یعنی $\sqrt[k]{a^k} = |a|$ (k زوج است.)

۳ ــ بنابه تعریف، $\sqrt[k]{a}$ یک ریشه kام a است و اگر به توان k برسد، برابر a می‌شود، پس $(\sqrt[k]{a})^k = a$

$$(\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b})^k = (\sqrt[k]{a})^k(\sqrt[k]{b})^k = ab$$

بنابراین عبارت $\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$ ، ریشهٔ k ام ab است. در حالت فرد بودن k، طبق تعریف، $\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$ همان $\sqrt[k]{ab}$ است. یعنی $\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b} = \sqrt[k]{ab}$ در حالت زوج بودن a، k و b اعداد مثبتی هستند و $\sqrt[k]{a}, \sqrt[k]{b}$ نیز اعداد مثبتی خواهند بود. پس $\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$ عددی مثبت و ریشهٔ k ام ab است. بنابراین، طبق تعریف $\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$ همان $\sqrt[k]{ab}$ است. یعنی $\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b} = \sqrt[k]{ab}$

بنابراین چه در حالت زوج بودن k و چه در حالت فرد بودن k، تساوی بالا برقرار خواهد بود.

۴ ــ

$$(\sqrt[k]{a})^m = \sqrt[k]{a} \times \sqrt[k]{a} \times .... \times \sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{a^m}$$

۵ ــ بر اساس ویژگی توان‌رسانی با توان اعداد طبیعی $(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk} = ((\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n)^k \ , \ (a > ۰)$

بر اساس ویژگی ریشه‌گیری $= (\sqrt[k]{a})^k = a$

تساوی بالا نشان می‌دهد که $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ یک ریشهٔ kام a است. در حالتی که k و n فرد باشند، طبق تعریف، $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ همان $\sqrt[nk]{a}$ است، یعنی $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

در حالتی که n زوج یا k زوج باشد، a حتماً عددی مثبت است و $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ یک عدد مثبت است و ریشهٔ kام a است و طبق تعریف $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ همان $\sqrt[nk]{a}$ است، یعنی $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

توصیهٔ آموزشی

قوانین و مفاهیم مربوط به ریشه‌گیری اعداد حقیقی در مثال صفحهٔ ۱۷ مطرح شده است. با ارائه مثال‌هایی مانند موارد مطرح شده، به جمع‌بندی این قوانین بپردازید. به یاد داشته باشید که در عبارت $\sqrt[k]{a}$ ، عدد k را فرجهٔ رادیکال می گوییم.

بپرسید : پس از انجام فعّالیت، می‌توان از دانش‌آموزان پرسید :

۱ــ آیا همواره می‌توان نوشت $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

۲ــ آیا به ازای هر عدد حقیقی مانند a، می‌توان گفت $\sqrt[n]{a^n}=a$

توسعه دهید : در صورتی که دانش‌آموزان با قوانین و مفاهیم مربوط به ریشه‌گیری کاملاً آشنا شده باشند، می‌توان سؤال زیر را مطرح کرد :

اگر n فرد باشد، به ازای هر دو عدد حقیقی b, a، درستی عبارت مقابل را ثابت کنید. $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$

برای nهای زوج، چه شرطی لازم است؟

توان‌رسانی با توان اعداد گویا

اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

با استفاده از ویژگی‌های اساسی توان‌رسانی با توان اعداد گویا، محاسبات لازم را انجام دهند و مسائل مربوط را حل کنند.

نگاه کلّی به بخش

در این بخش، یک مفهوم جدید آموزش داده می‌شود که توان‌رسانی با توان اعداد گویا نام دارد. برای مفهوم‌سازی از مسئلهٔ واقعی رشد باکتری‌ها در طی زمان استفاده شده است. رشد باکتری‌ها، نمایی است و پس از زمان‌های صحیح، توان اعداد، نشان‌دهندهٔ وزن باکتری‌ها ست. اما پس از طی زمان‌هایی که عدد صحیحی نیستند، در عمل وزنی برای باکتری‌ها وجود دارد، اما توان‌رسانی با توان اعداد غیرصحیح هنوز تعریف نشده است و این خود انگیزه‌ای است که توان غیرصحیح از اعداد نیز قابل تعریف است.

مطالب این بخش در قالب طرح یک مسئله و حل آن و انجام یک فعالیت برای تکرار روش حل مسئله ارائه شده است. در این بخش، خواص اساسی توان‌رسانی مستقیماً بیان شده است و لازم نیست این قوانین اثبات شوند ولی در صورت علاقه دانش‌آموزان، می‌توان آنها را اثبات کرد.

ورود به مطالب : طرح یک مسئلهٔ مناسب که در آن توان‌رسانی به توان اعداد گویا مورد توجه قرار گیرد، می‌تواند در دانش‌آموزان انگیزهٔ مناسب برای ورود به این مبحث را ایجاد کند. در کتاب از مسئلهٔ رشد باکتری‌ها استفاده شده است که پس از طی زمان‌های صحیح، توان‌های صحیح از اعداد وزن باکتری‌ها را نشان می‌دهد. حال این سؤال مطرح می‌شود که پس از گذشت زمانی که مقدار آن صحیح نیست، وزن باکتری‌ها چقدر است؟

فعّالیت صفحهٔ ۱۹

هدف : دانش‌آموزان بتوانند هر عدد حقیقی مثبت با توان گویا را به صورت رادیکالی نمایش دهند.

توصیهٔ آموزشی

توان‌رسانی با اعداد گویا در این بخش، فقط برای اعداد حقیقی مثبت تعریف شده است. در حالت کلی می‌توان گفت اگر n عدد طبیعی و a عدد حقیقی باشد، به‌طوری‌که $\sqrt[n]{a}$ قابل تعریف باشد، آن‌گاه برای عدد صحیح m داریم : $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

در واقع برای nهای زوج، a^m نباید منفی باشد.

اگر a یک عدد حقیقی منفی و n زوج باشد، باید عبارت توانی را با پایهٔ مثبت نوشت. به عنوان مثال؛

$$(-۲)^{\frac{۳}{۲}} = -(۲)^{\frac{۳}{۲}} = -(۲^{\frac{۳}{۲}}) = -\sqrt[۲]{۲^۳} = -\sqrt[۲]{۸}$$

همچنین باید توجه کرد که اگر m یک عدد صحیح منفی باشد، آن گاه a نباید صفر باشد، که البته در کتاب درسی a یک عدد حقیقی مثبت در نظر گرفته شده است.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۲۰

$$a^{\frac{kp}{kn}} = \sqrt[kn]{a^{kp}} = \sqrt[n]{(\sqrt[k]{a^p})^k} = \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

مسائل صفحهٔ ۲۱

۱ ــ چون r یک عدد گویاست، پس می‌توانیم آن را به صورت $\frac{p}{n}$ نمایش دهیم که در آن p عدد صحیح و n عددی طبیعی است.

بنابراین :

$$۱^r = ۱^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{۱^p} = \sqrt[n]{۱} = ۱$$

۲ ــ فرض کنیم $r = \frac{p}{n}$ که p عددی صحیح و n عددی طبیعی است. بنابراین :

$$a^{-r} = a^{\frac{-p}{n}} = (\sqrt[n]{a})^{-p} = \frac{۱}{(\sqrt[n]{a})^p} = \frac{۱}{a^{\frac{p}{n}}} = \frac{۱}{a^r}$$

۵ ــ

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = a^{\frac{۱}{m}} \times a^{\frac{۱}{n}} = a^{\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}} = a^{\frac{n+m}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

توان‌رسانی با توان اعداد حقیقی

اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

با استفاده از ویژگی‌های اساسی توان‌رسانی با توان اعداد حقیقی، محاسبات لازم را انجام دهند و مسائل مربوط را حل کنند.

نگاه کلّی به بخش

هدف از این بخش، تعمیم مفهوم توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی است. ابتدا این عمل توان‌رسانی باید معنادار شود و دانش‌آموزان بپذیرند عبارت توانی $۲^{\sqrt{۲}}$ معنا دارد و سپس مقداری برای آن تعیین شود. توان‌رسانی با توان اعداد حقیقی، پیچیده‌تر از توان اعداد گویاست و نمی‌توان به طور دقیق وارد آن شد. در این بخش این مفهوم توسط مثال واقعی رشد باکتری‌ها معنادار شده

است، ولی برای یافتن مقدار این توان‌رسانی‌ها به یک نکتهٔ مهم اشاره شده است و آن اینکه اصولاً نمی‌توان به تمام اعداد حقیقی مستقیماً دسترسی داشت و برای شناخت اعداد حقیقی باید تقریبات اعشاری آنها را بشناسیم.

برای محاسبهٔ عددی مانند $۲^{\sqrt{۲}}$ نیز در واقع باید بتوانیم تقریبات اعشاری آن را به‌دست آوریم. این عمل نیز به کمک دنبالهٔ تقریبات اعشاری و دنباله‌هایی که به اعداد نزدیک می‌شوند، قابل انجام است. عملاً در تعریف دقیق توان‌رسانی با توان اعداد حقیقی، با حدگیری سروکار خواهیم داشت که در این بخش به طور شهودی با استفاده از دنباله‌های نزدیک شونده، در مورد آن صحبت شده است. خواص اساسی توان‌رسانی نیز مستقیماً ارائه شده است تا در محاسبات از آنها استفاده شود.

ورود به مطلب : در اینجا می‌توان با انگیزهٔ تعمیم، این مبحث را مطرح کرد و یا آن را در مثال واقعی رشد باکتری‌ها همانند کتاب استفاده کرد. از این طریق می‌توان دانش‌آموزان را قانع کرد که توان‌های حقیقی معنادار هستند ولی محاسبهٔ مقدار دقیق آنها امکان‌پذیر نیست و باید با تقریبات اعشاری در مورد این اعداد صحبت کرد.

توسعه دهید : با طرح قوانین مربوط به توان‌رسانی هر عدد حقیقی مثبت با توان اعداد صحیح وگویا، این قوانین را برای توان‌های گنگ نیز بسط دهید. مثال‌های مطرح شده در صفحهٔ ۲۳، کاربرد این قوانین برای هر عدد حقیقی مثبت را نشان می‌دهند.

مسائل صفحه‌های ۲۳ و ۲۴

۳ـ $$\sqrt{a^b}=a^{\frac{b}{۲}}=(a^{\frac{۱}{۲}})^b=(\sqrt{a})^b$$

۴ـ $$(\frac{a}{c})^b=(ac^{-۱})^b=a^bc^{-b}=\frac{a^b}{c^b}$$

$$\frac{a^b}{a^d}=a^b\times a^{-d}=a^{b-d}$$

۵ـ $$a^{-b}\times a^b=a^{-b+b}=a^۰=۱\to a^{-b}=\frac{۱}{a^b}$$

$$a^b=a^{\frac{b}{۲}\times ۲}=(a^{\frac{b}{۲}})^۲$$

چون توان دوّم هر عددی مثبت است، پس a^b مثبت خواهد بود.

سؤالات تکمیلی

۱ـ جملهٔ عمومی دنباله‌ای به‌صورت $u_n=\frac{۲n-۱}{n+۲}$ می‌باشد. جملهٔ چندم آن $\frac{۱۹}{۱۲}$ است؟

۲ـ کدام‌یک از دنباله‌های زیر حسابی است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$, ۱ , ۲ — ب) $\frac{۱}{۵}$, ۱- , ۵

پ) $۲-\sqrt{۲}$, ۱ , ۲- , $۱-\sqrt{۲}$ — ت) $۳-\sqrt{۳}$, ۲ , $۱+\sqrt{۳}$

۳ـ اگر جملات هفتم و نوزدهم یک دنبالهٔ حسابی ۳۱ و ۵۵ باشند. این دنباله را مشخص کرده و جملهٔ سیزدهم آن را به دست آورید.

۴ـ x را چنان تعیین کنید که اعداد ۳ ‌ ۳x و ۴ ‌ ۲x و ۱ ‌ ۲x با همین ترتیب، جملات متوالی یک دنبالهٔ

حسابی باشند.

۵ ــ اعداد ۱ ۵p و ۴ ۳p و ۳ p سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند، قدر نسبت این دنباله را پیدا کنید. ۲b a c

۶ ــ کدام‌یک از دنباله‌های زیر دنبالهٔ حسابی است؟

الف) t_n ۸n ۱   ب) t_n $n^۲$

پ) $t_n = \frac{۱}{n}$ ت) t_n $n^۳$ ۳

۷ ــ ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه برابرند با ۲d a , d a, a که d, a هردو مثبت‌اند، نسبت a به d را پیدا کنید.

۸ ــ اگر c, b, a که مجموع آنها ۱۵ می‌باشد،جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشندو اگر a, b, c تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، c, b, a را تعیین کنید.

۹ ــ اگر c, b, a هم تشکیل دنبالهٔ حسابی و هم تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، c, b, a چه رابطه‌ای با هم دارند؟ قدر نسبت هر یک از دنباله‌ها چیست؟

۱۰ــ در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی $\frac{۲}{۳^n}$ ، جملهٔ چهارم چند برابر جملهٔ ششم است؟

۱۱ــ در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ اول $\frac{۱}{۹}$ و جملهٔ آخر ۸۱ می‌باشد. اگر جملهٔ ششم دنباله ۲۷ باشد، تعداد جملات را به دست آورید.

۱۲ــ اگر c, b, a یک دنبالهٔ هندسی تشکیل دهند، نشان دهید که اعداد $\frac{۱}{a}$ ، $\frac{۱}{b}$ ، $\frac{۱}{c}$ نیز یک دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند.

۱۳ــ بین دو عدد ۲ و ۳۲، هفت واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم. قدر نسبت را بیابید.

۱۴ــ بین دو عدد $\sqrt[۴]{۸}$ و $\sqrt[۴]{۲}$ ، هشت واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم. قدر نسبت را بیابید.

۱۵ــ در دنبالهٔ هندسی ...,$\sqrt{۲}$,۲ ، جملهٔ هشتم را پیدا کنید.

۱۶ــ در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اوّل ۱۱۲ و مجموع شش جملهٔ اوّل ۱۲۶ می‌باشد. قدرنسبت را بیابید.

۱۷ــ دو جملهٔ اوّل یک دنبالهٔ هندسی $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ هستند. قدر نسبت این دنباله را پیدا کنید.

۱۸ــ در یک دنبالهٔ هندسی $۲a_۵$ $a_۲a_۴$، جملهٔ اول را مشخص کنید.

۱۹ــ جملهٔ دوّم یک دنبالهٔ هندسی ۱ می‌باشد، جملات اوّل و سوّم نسبت به هم چگونه هستند؟

۲۰ــ اگر A , ۱ ۲p , ۵p , ۴ ۱۲p تشکیل یک دنبالهٔ هندسی بدهند، A را پیدا کنید.

نمونه سؤالات ارزشیابی پایانی

۱ــ در زیر، جملهٔ عمومی سه دنباله داده شده است. تعیین کنید هر جملهٔ عمومی مربوط به کدام دنباله است؟

الف) $۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\dots$ — الف) $a_n=\frac{(-۱)^n}{n}$

ب) $-۱,\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۳},\dots$ — ب) $a_n=۱-\frac{۱}{n}$

پ) $-۱,\frac{۱}{۴},-\frac{۱}{۲۷},\dots$ — پ) $a_n=(-\frac{۱}{n})^n$

ت) $۰,\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\dots$

۲ــ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی زیر را مشخص کنید

$$۱,۳,۷,\dots$$

۳ــ در دنبالهٔ هندسی زیر، جاهای خالی را پر کنید.

$$۱,\ \square,\ a^۲,\ \square,\ \square,\ \dots$$

۴ــ در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ پنجم، چهار برابر جملهٔ اول می‌باشد؛ قدر نسبت دنباله را پیدا کنید.

۵ ــ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید؛ برای عبارت‌های نادرست مثال بزنید.

الف) اگر به هر جملهٔ یک دنباله هندسی ۲ واحد اضافه کنیم، دنبالهٔ جدید هندسی است.

ب) اگر جملات دنبالهٔ هندسی را با عددی جمع کنیم، قدرنسبت ثابت می‌ماند.

پ) جملات دنباله $a_n=(\frac{۱}{۲})^{n-۱}$ به صفر نزدیک می‌شوند.

۶ــ نشان دهید جملات دنبالهٔ ...، ۰/۳۳۳، ۰/۳، ۰/۳۳، ۰/۳ به عدد $\frac{۱}{۳}$ نزدیک می‌شوند.

۷ــ در یک دنبالهٔ هندسی، سه جملهٔ متوالی دنباله ۴ و $\sqrt{۲x}$ و ۴ x می‌باشد، مقدار x و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

۸ ــ عدد $\sqrt[۲]{\sqrt[۳]{۱۲۸}}$ را به صورت یک عدد رادیکالی با فرجه ۲ بنویسید.

۹ــ مقایسه کنید.

الف) $(\frac{۱}{۳})^۶ \ \square\ (\frac{۱}{۳})^۵$

ب) $\sqrt[۳]{۵}\ \square\ \sqrt[۴]{۵}$

پ) $۳^{-\sqrt{۵}}\ \square\ (\frac{۱}{۲})^{\sqrt{۵}}$

۱۰ــ در معادلهٔ زیر مقدار a را پیدا کنید.

$$\sqrt[۳]{a}=۳$$

۱۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $((\sqrt{۱۰})^{۱-\sqrt{۳}})^{۱+\sqrt{۳}} =$

ب) $\sqrt{\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt{\sqrt{۲}}} =$

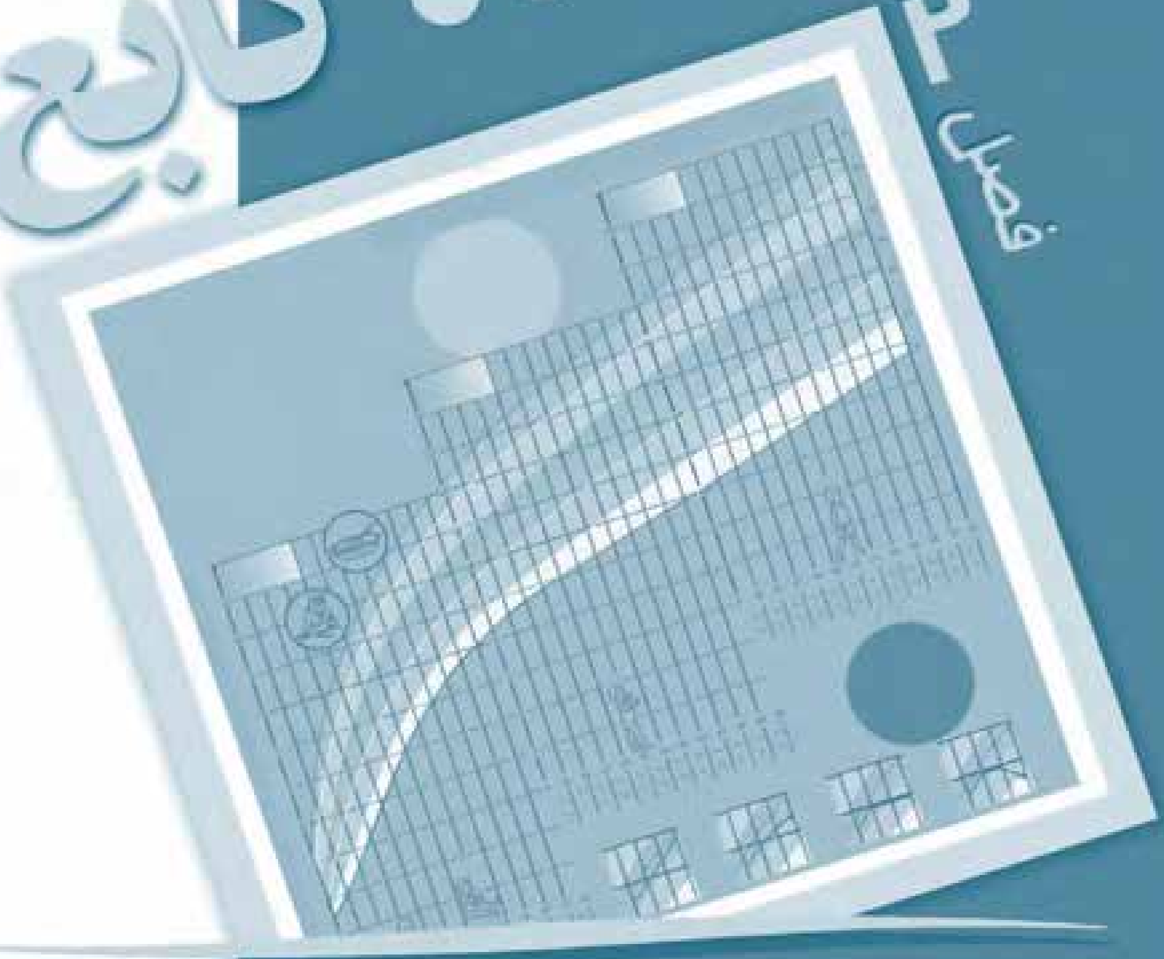
پ) $\sqrt[۷]{(\frac{۱}{۱۰۰})^{۰/۷}} =$

ت) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}-۱}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}} =$

۱۲ــ اگر $\frac{۱}{۴} = \sqrt{\sqrt[۳]{\sqrt{۲^{x}}}}$ مقدار x را پیدا کنید.

فصل ۲

تابع



نگاه کلّی به فصل دوّم کتاب درسی

اهداف کلی

۱ــ آشنایی با مفهوم رابطه
۲ــ آشنایی با روش‌های نمایش وابستگی و ارتباط بین دو مجموعه (جدول، نمودار، و زوج مرتب)
۳ــ آشنایی با مفهوم تابع
۴ــ آشنایی با مفاهیم دامنه و برد رابطه و تابع
۵ ــ آشنایی با توابع خطی
۶ ــ درک مفهوم وارون یک رابطه و تابع
۷ــ شناخت توابع یک به یک و شرط وارون‌پذیری یک تابع
۸ ــ آشنایی با مفهوم بازه (فاصله)
۹ــ تعیین مقدار تابع در یک نقطه
۱۰ــ آشنایی با نمایش جبری یک تابع

عملکرد مورد انتظار دانش‌آموزان

دانش‌آموزان باید بتوانند :

۱ ــ مفهوم رابطه بین اعضای دو مجموعه را با ذکر مثال بیان کنند.
۲ ــ روش‌های مختلف نمایش یک رابطه را بشناسند و برای هر کدام مثالی ارائه کنند.
۳ ــ شرط تابع بودن یک رابطه را با ذکر مثالی بیان کنند.
۴ــ تابع بودن یک رابطه را در نمایش‌های مختلف تشخیص دهند و مثال بزنند.
۵ ــ دامنه و برد توابعی که به صورت جدول، مجموعه زوج‌های مرتب و یا نمودار را مشخص کنند.
۶ــ توابع خطی را تشخیص دهند، برای آن مثال بزنند و نمودار آن را رسم کنند.
۷ــ وارون رابطه‌ها و تابع‌هایی که به صورت جدول مقادیر، مجموعه‌های مرتب و یا نمودارند را به‌دست آورند.
۸ ــ مفهوم یک‌به‌یک بودن یک تابع را توضیح دهند.
۹ــ یک‌به‌یک بودن توابعی که به صورت جدول مقادیر، زوج مرتب و یا نمودارند را مشخص نمایند.
۱۰ــ مفهوم بازه را بیان کنند و نمایش‌های مختلف یک بازه را نشان دهند.
۱۱ــ مفهوم تابع به عنوان یک ماشین را با ذکر مثالی توضیح دهند.
۱۲ــ با معلوم بودن تابع به صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب یا با معلوم بودن ضابطهٔ تابع، مقدار تابع را به ازای هر عضو دامنه به دست آورند.

۱۳ــ مفهوم نمایش جبری یا ضابطهٔ یک تابع را با ذکر مثالی توضیح دهند.

۱۴ــ نمودار توابع درجهٔ اوّل را به کمک نقطه‌یابی رسم کنند.

پیش‌نیازها

۱ــ آشنایی با نمایش نقاط در دستگاه مختصات و زوج‌های مرتب

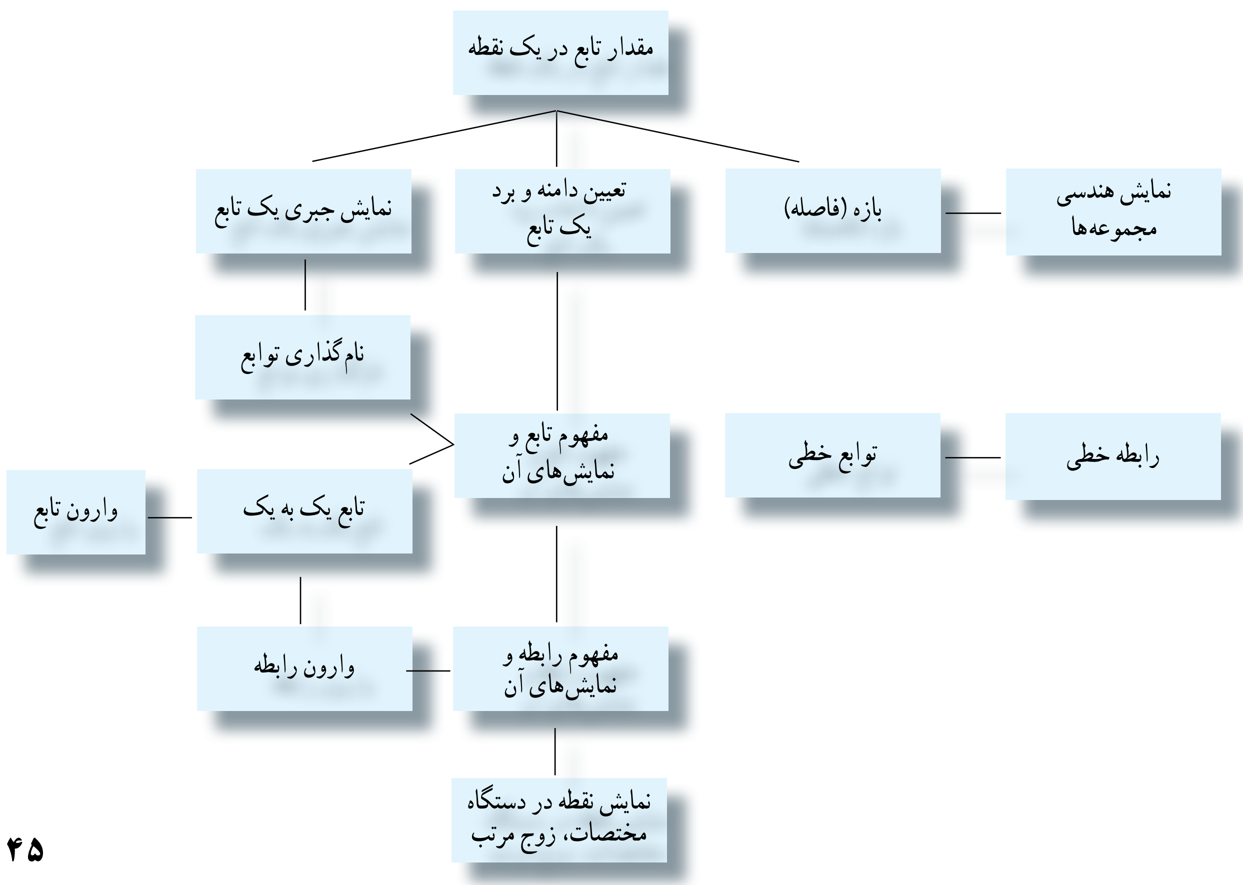
۲ــ آشنایی با نمایش هندسی مجموعه‌ها

۳ــ آشنایی با روابط خطی

زمان‌بندی پیشنهادی برای تدریس این فصل

مفهوم رابطه،مفهوم تابع	جلسهٔ نهم
دامنه و برد توابع	جلسهٔ دهم
توابع خطی	جلسهٔ یازدهم
وارون تابع،یک به یک بودن	جلسهٔ دوازدهم
بازه و فاصله،مقدار تابع در یک نقطه	جلسهٔ سیزدهم
ارزشیابی پایانی	جلسهٔ چهاردهم

نقشهٔ مفهومی فصل دوّم کتاب درسی



دانستنی برای معلّم

ریاضیّات یک بخش مهم از توصیف، توضیح، پیش‌بینی، کنترل و تحلیل پدیده‌ها را تشکیل می‌دهد و نقش تابع در این راستا بی‌بدیل است. همان گونه که مفاهیمی مانند خط، نقطه و صفحه، پایه‌های هندسی اقلیدسی را تشکیل می‌دهند که از زمان یونان باستان تا زمان حال تسلّط داشته است، مفهوم تابع نیز به عنوان یک ایدهٔ مرکزی در ریاضیات امروزی، ضمن حضور مستمر، موجبات بسط و توسعهٔ بسیاری از شاخه‌های ریاضیات پیشرفته را فراهم کرده است. توابعی که در آنالیز ریاضی مطالعه می‌شوند و در کاربردها استفاده می‌شوند، ایدهٔ اصلی وابستگی بین متغیرهای عددی را حفظ می‌کنند. آنهایی که در جبر مطالعه می‌شوند روی مفهوم رابطه تأکید می‌ورزند. آنهایی که در منطق و علوم کامپیوتر مطالعه می‌شوند، بیشتر جنبه‌های الگوریتمی را مدنظر قرار می‌دهند. متون آموزشی با رویکردهای متفاوتی به آموزش تابع می‌پردازند. معلّمان برای تدریس کارآمدتر باید با این رویکردها و پیامدهای آنها آشنا باشند.

در رویکرد هندسی، دانش‌آموزان اغلب با نمودارها و گراف‌ها قبل از توابع آشنا می‌شوند و به همین دلیل برخی از کتاب‌ها با کمک نمودارها، مفهوم تابع را روی آن بنا می‌کنند. در این شیوه، معمولاً تابع به عنوان یک وابستگی بین ورودی و خروجی معرفی شده است و در یک تابع، خروجی وابسته به ورودی است و برای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد. در این رویکرد توابع در زمینه‌های مختلف مانند توابع خطی، مربعی و نمایی دیگر از توابع مورد توجه قرار می‌گیرند و در تمام این بخش‌ها، متن تأکید زیادی بر نمایش‌های گرافیکی می‌کند.

در رویکرد جبری تابع به عنوان یک قاعده یا قانون تعریف می‌شود. به عنوان مثال، «تابع f از مجموعهٔ D به مجموعهٔ R، قاعده‌ای است که به هر عنصر x از مجموعهٔ D به نام دامنه، عضو منحصربه‌فرد $f(x)$ از مجموعهٔ R به نام برد را نظیر می‌کند».

نمادهای جبری دارای خصوصیات سادگی، دقت، و دربردارندهٔ اطلاعات اند، اما یکی از چالش‌های اصلی و مهم در مورد آموزش تابع با نمادهای جبری، موضوع «متغیر» است که دانش‌آموزان اغلب برای درک آن دچار مشکل می‌شوند و لازم است در استفاده از رویکرد جبری با دقت بیشتری عمل کنیم.

در رویکرد منطقی، بسیاری از کتاب‌ها برای آموزش تابع با رویکردی مستقیم، رابطه‌ها را به عنوان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب معرفی می‌کنند و مجموعهٔ همهٔ مختص‌های اول را دامنه و مجموعهٔ همهٔ مختص‌های دوم را برد می‌نامند و در ادامه، توابع را به عنوان انواع خاصی از رابطه‌ها که در آن هر عنصر دامنه دقیقاً با یک عنصر از برد جفت می‌شود، معرفی می‌کنند. تعریف تابع به این شکل، اگرچه از جامعیّت لازم برخوردار است ولی ارائهٔ آن در اوّلین تماس‌های دانش‌آموزان با مفهوم تابع به هیچ وجه مناسب به نظر نمی‌رسد و لازم است دانش‌آموزان در معرض نمایش‌های مختلف تابع به منظور بهره‌گیری از درک شهودی برای فهم چنین تعاریفی قرار گیرند.

در رویکرد تلفیقی برخی از کتاب‌ها تقریباً با ارائهٔ تعریفی از تابع تقریباً همزمان در شروع آموزش، از همهٔ شیوه‌های نمایش تابع استفاده می‌کنند. برخی از کتاب‌ها میل به توصیف تابع تنها از یک منظر را دارند، جنبه‌ای که می‌تواند بیشترین کاربرد را در ادامهٔ کتاب داشته باشد. باید به این نکته توجه داشت که مواجهه با تعاریف و نمایش‌های متفاوت برای درک بهتر مفهومی مانند تابع، در نهایت کمک زیادی خواهد کرد، اما ارائهٔ همزمان آن در شروع آموزش تدریجی با شروع از یک سطح پایین‌تر از انتظارات برای درک، در حقیقت منبع به یک فهم بهتر از موضوع خواهد شد.

در نهایت گرچه می‌توان رویکردها را مقایسه کرد ولی نمی‌توان به طور مطلق از یکی از رویکردها و روش‌های مذکور حمایت کرد. به هر حال در یک رویکرد مناسب برای شروع آموزش تابع باید ویژگی‌های کلی زیر را مورد توجه قرار گیرد :

- تکیه بر دانش قبلی دانش‌آموزان
- حرکت از شهود به تجربه

- ایجاد یک جریان استقرایی و فراهم کردن فرصت کشف
- استفاده از سطح تجربه، مناسب با دانش‌آموزان
- توانایی نشان دادن ارتباطات بین مفاهیم ارائه شده
- پرهیز از تکیه صرف بر دانش رویه‌ای
- استفاده از ظرفیت‌های دوره‌های ابتدایی و راهنمایی
- استفاده از مثال‌های واقعی مبتنی بر تجربیات عینی دانش‌آموزان
- جلوگیری از ایجاد بدفهمی
- توانایی برقراری ارتباط و سازگاری بین نمایش‌های متفاوت از تابع

آموزش بخش‌های فصل دوّم کتاب درسی
(مفهوم رابطه و تابع)

اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

۱ــ مفهوم رابطه یا وابستگی بین اعضای دو مجموعه را با ذکر مثال بیان کنند.

۲ــ روش‌های مختلف نمایش یک رابطه را بشناسند و برای هر کدام مثالی ارائه کنند.

پیش‌نیازها

۱ــ آشنایی با نمایش نقاط در دستگاه مختصات و زوج مرتب

۲ــ آشنایی با نمایش هندسی مجموعه‌ها

نگاه کلّی به بخش

در این بخش، دانش‌آموزان قبل از ورود به بحث تابع، با مفهوم رابطه بین اعضای دو مجموعه آشنا می‌شوند و در ادامه می‌آموزند که یک رابطه را می‌توان به روش‌های مختلفی نشان داد که هر کدام دارای مزایایی خاص هستند و به منظور خاصی به کار می‌روند.

ورود به مطلب : رابطه، یکی از مفاهیم مهم ریاضی است که می‌توان برای آن مثال‌های گوناگونی از پدیده‌های طبیعی و واقعی زندگی یا سایر علوم بیان کرد. در این بخش رابطهٔ بین رشد قد و وزن یک کودک از بدو تولد تا هنگام ورود به مدرسه بیان شده است. این مثال، علاوه بر اینکه برای دانش‌آموزان ملموس و آشنا می‌باشد، همچنین پیوندی که بین ریاضیات و زیست‌شناسی وجود دارد را تصریح کند. با توجه به اینکه دانش‌آموزان در سال اوّل دبیرستان با مفهوم رابطهٔ خطی آشنا شده‌اند، می‌توان از آنها خواست مثال‌های دیگری بیان کنند.

فعّالیت صفحهٔ ۲۷

هدف : دانش‌آموزان با مفهوم رابطهٔ بین دو مجموعه و نشان دادن این رابطه به روش جدول و نمودار آشنا شوند.

در این فعالیّت، دانش‌آموزان با استفاده از جدول تغییرات وزن یک کودک در طی یک سال، درک بهتری از مفهوم رابطه به‌دست خواهند آورد. همان طور که در جدول مشخص شده است این کودک از بدو تولّد تا پایان ماه سوّم، رشد داشته است ولی در مقایسه با شکل ۱ صفحهٔ ۲۶، این رشد مطلوب نبوده است. از پایان ماه سوّم تا پایان ماه پنجم، این کودک توقف رشد داشته است که این موضوع با رسم این تغییرات روی شکل صفحهٔ ۲۶ کاملاً مشخص خواهد بود. از پایان ماه پنجم تا پایان ماه هفتم، این کودک افت رشد داشته و از پایان ماه هفتم تا پایان ماه دوازدهم، رشد نسبتاً مطلوبی داشته است. پس از مشخص کردن نقاط جدول شکل صفحهٔ ۲۶ و وصل کردن آنها به هم، دانش‌آموزان خواهند دید که می‌توان وزن کودک را در فاصلهٔ بین ماه‌ها نیز تعیین کرد.

پس از این فعّالیت می‌توان از دانش‌آموزان خواست مثال‌های دیگری در این خصوص بیان کنند و سپس با همین روش، مفهوم رابطه را به آنها آموزش داد.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۲۷

هدف : دانش‌آموزان با شکل جدیدی از نمایش یک رابطه تحت عنوان نمودار ون آشنا می‌شوند. با قرار دادن اعداد سطر اول جدول فعالیت‌های قبل (ماه‌های یک سال) در مجموعه‌ای مانند A و اعداد سطر دوم جدول (وزن‌هایی نظیر کودک در هر ماه) در مجموعه‌ای مانند B و وصل‌کردن هر عدد از مجموعهٔ A به عدد نظیر آن در مجموعهٔ B توسط یک پیکان، با نمایش جدیدی از یک رابطه که نمودار ون نامیده می‌شود، آشنا می شوند.

توسعه دهید : پس از این فعالیت و تمرین در کلاس، می‌توان با فعّالیت‌های بیشتری در خصوص رابطه‌ها، دانش‌آموزان را به درک بهتر این موضوع رهنمون کرد. بهتر است با ذکر مثال‌هایی به دانش‌آموزان، رابطه‌هایی را نشان داد که در آنها با افزایش یکی از متغیرها، متغیّر دیگر کاهش یا افزایش می‌یابد یا به عبارت دیگر همبستگی بین اعضای دو مجموعه منفی یا مثبت است.

فعّالیت صفحهٔ ۲۸ و ۲۹

هدف : درک بهتر مفهوم رابطه و نمایش مختلف آن و آشنایی با نمایش رابطه به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب.

در این فعّالیت، دانش‌آموزان با زوج مرتب و مفاهیم مؤلفهٔ اوّل و دوّم یک زوج مرتب آشنا می‌شوند. در این فعّالیت دانش‌آموزان می‌بینند که رابطهٔ یک به چند اتفاق نمی‌افتد و به تدریج به بحث معرفی مفهوم تابع هدایت می‌شوند. در بخش اوّل این فعّالیت، داده‌ها گسسته هستند ولی در قسمت دوّم، ایدهٔ پیوستگی به صورت شهودی شکل می‌گیرد و دانش‌آموزان می‌بینند که زوج‌های مرتّب زیادی را می‌توان در این نمودار یافت.

بپرسید : آیا { } یک رابطه است؟

مفهوم تابع

اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

۱ــ شرط تابع بودن یک رابطه را با ذکر مثالی بیان کنند.

۲ــ تابع بودن یک رابطه را در نمایش‌های مختلف تشخیص دهد و مثال بزنند.

پیش‌نیازها

دانش‌آموزان باید با مفهوم رابطه و نمایش‌های مختلف آن آشنا باشند.

نگاه کلّی به بخش

در این بخش، دانش‌آموزان با نوع خاصی از رابطه‌ها که تابع نامیده می‌شوند، آشنا می‌شوند. مفهوم تابع یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که در اکثر شاخه‌های علوم به کار می‌رود. در این بخش از کتاب، پس از تعریف تابع، رابطه‌هایی دلخواه در نظر گرفته می‌شود و تابع بودن آنها بررسی می‌گردد.

ورود به مطلب : به منظور آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم تابع، در ابتدا ویژگی رابطه‌هایی که تابع اند و تاکنون مطرح شده‌اند مورد

بررسی قرار می‌گیرند. این ویژگی‌های مشترک با عبارت «غیرممکن است» آغاز شده‌اند، به طوری‌که با ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان بتوان نوع رابطه‌هایی را که تابع نامیده می‌شوند را به دانش‌آموزان معرّفی نمود.

به این ترتیب، دانش‌آموزان درک می‌کنند که در چه صورت یک رابطه می‌تواند تابع باشد. تعریف تابع بر روی مجموعه‌ها و نمودار ون ارائه شده است. همانگونه که در بخش دانستنی برای معلّم شرح داده شده، تابع عملگری است که برای هر ورودی داده شده، یک خروجی منحصربه‌فرد تولید می‌کند که در صفحهٔ ۳۰ کتاب نیز «یک تابع از مجموعهٔ A به B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B نظیر می‌شود» تعریف شده است. عکس این مطلب در تعریف تابع به‌کار نمی‌رود؛ یعنی در واقع تابع می‌تواند برای چند ورودی متمایز خروجی‌های یکسانی تولید کند.

این نکته را می توان به عنوان معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه با استفاده از نمودار ون در نظر گرفت.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۳۰

هدف : دانش‌آموزان با تعریف تابع یا شرط تابع بودن یک رابطهٔ بین دو مجموعه در حالتی که رابطه به صورت نموداری یا زوج مرتب نمایش داده می‌شود، آشنا شوند. بهتر است با ذکر مثال‌های مختلف به دانش‌آموزان در فهم بهتر موضوع کمک شود و از خود آنان نیز خواسته شود با ذکر مثال و نامثال این تعاریف را توضیح دهند.

توصیهٔ آموزشی

با توجّه به اینکه تابع یکی از مفاهیم اساسی در ریاضی می‌باشد و در آینده دانش‌آموزان مطالب بیشتری در این خصوص فراخواهند گرفت، توصیه می‌شود با ارائه مثال‌ها و نامثال‌های مختلف در نمایش‌های مختلف یک رابطه، از یادگیری صحیح این مفهوم توسط دانش‌آموزان اطمینان حاصل کنیم. در این تمرین در کلاس دانش‌آموزان با به‌کار بردن اطلاعاتی که از مفهوم تابع فراگرفته‌اند، عبارت‌های داده شده را تکمیل می‌کنند. مفهوم زوج‌های مرتّب را دانش‌آموزان در صفحهٔ ۲۸ می‌آموزند، عبارت‌های زوج‌های مرتب متمایز در پاورقی توضیح داده شده است. روش تدریس این بخش می‌تواند مبتنی بر رویکرد پرسش و پاسخ باشد.

همچنین ذکر این نکته ضروری است که در این بخش، هدف آموزش این مفهوم است که در چه صورت یک رابطه نمی‌تواند تابع باشد و به همین دلیل است که عبارت‌هایی که در کادر صفحهٔ ۳۰ کتاب درسی آمده، با عبارت «غیر ممکن است» شروع شده است. در واقع اینکه یک رابطه در چه صورت تابع است و درچه حالت تابع نیست هدف اصلی کتاب بوده است.

همچنین با ارائهٔ مثال‌هایی نشان داده شود که ورودی یک تابع لزومی ندارد عدد یا حرف باشد. یعنی ورودی تابع را می‌توان هر چیز دلخواه در نظر گرفت.

دامنه و برد توابع

اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

دامنه و برد توابعی که به صورت جدول، مجموعهٔ زوج‌های مرتب و یا نمودارند را مشخص نمایند.

پیش‌نیازها

دانش‌آموزان باید با مفاهیم رابطه و تابع در شکل‌های مختلف نمایش آنها، آشنا باشند.

ارزشیابی تشخیصی

اگر رابطهٔ {(۱, a ۱) , (۲, ۷), (۱, b), (۲, ۲b ۱)} f یک تابع باشد. آنگاه حاصل b a را به‌دست آورید.

نگاه کلّی به بخش

پس از آنکه دانش‌آموزان در بخش‌های گذشته با مفاهیم رابطه و تابع آشنا شدند، در این بخش با یکی دیگر از مفاهیم اساسی مبحث تابع یعنی دامنه و برد یک تابع آشنا می‌شوند.

ورود به مطالب : در این بخش، برای ورود به مطلب از جدول رابطهٔ بین تعدادی از ساعات روز و دمای بدن یک بیمار استفاده شده است (البته می‌توان از مثال‌های بخش‌های قبلی این فصل نیز برای ورود به مطلب استفاده کرد). پس از تبدیل این جدول به مجموعه‌ای شامل زوج‌های مرتب و یا ترسیم نمودار ون برای این رابطه و جدا کردن مجموعه مؤلفه‌های اوّل و دوّم زوج‌های مرتب، تعریف دامنه و برد یک رابطه به دانش‌آموزان ارائه می‌شود.

توصیهٔ آموزشی

در این بخش، هدف آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم اولیهٔ دامنه و برد تابع می‌باشد. در بخش‌های بعدی دانش‌آموزان با معلوم بودن ضابطهٔ تابع، دامنهٔ توابعی که با آنها آشنا شده‌اند را پیدا خواهند کرد.

به منظور بررسی اینکه دانش‌آموزان تا چه حد با اهداف این بخش آشنا شده‌اند، سؤال ۲ تمرین در کلاس صفحهٔ ۳۶ ارائه شده است. این سؤال یک سؤال باز پاسخ می‌باشد که در حالت‌های مختلف دانش‌آموزان مثال‌هایی از توابع با دامنه و برد تعیین شده ارائه می‌کنند.

توابع خطی

اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

توابع خطی را تشخیص دهند، برای آن، مثال ارائه و نمودار آن را رسم کنند.

پیش‌نیازها

۱ــ آشنایی با مفهوم رابطه، تابع و دامنه و برد یک تابع

۲ــ آشنایی با مفهوم رابطهٔ خطی بین دو متغیر

ارزشیابی تشخیصی

مقدار m را طوری پیدا کنید که رابطهٔ {(۱,۲m) , (۱ , m   ۱) (۱,۲)} تابع باشد.

نگاه کلّی به بخش

در این بخش، ابتدا توابعی که به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب هستند، نام‌گذاری می‌شوند و دانش‌آموزان با مفهوم کلّی توابع خطی، شکل کلّی این توابع و نمودار آنها آشنا می‌شوند.

ورود به مطلب : دانش‌آموزان با مفهوم رابطهٔ خطی بین دو متغیر و نمایش جبری آن که به صورت کلی $y \quad ax \quad b$ می‌باشد، در سال اوّل دبیرستان آشنا شده‌اند. برای تفهیم بهتر موضوع می‌توان مثال‌هایی بیشتر که نشان‌دهندهٔ رابطهٔ خطی بین دو متغیر باشد به دانش‌آموزان نمایش داد. در فعالیت صفحهٔ ۳۷، زمان شنیده شدن صدای آذرخش و فاصله تا مکانی که آذرخش به وقوع پیوسته به صورت جدول مقادیر ارائه شده است. در این فعّالیت دانش‌آموزان با این نکته نیز آشنا می‌شوند که توابع خطی که ضابطه یکسانی دارند در صورتی مساوی‌اند که دامنه و برد یکسانی داشته باشند.

تمرین در کلاس صفحهٔ ۳۹

هدف :

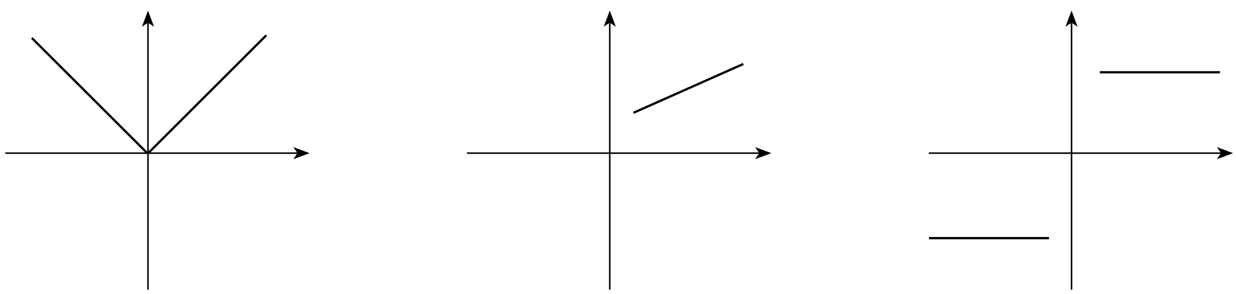
۱ــ یک مدل یا رابطهٔ خطی برای هر یک از جدول‌های داده شده مشخص کنند.

۲ــ روابط خطی $x \quad a$ و $y \quad b$ و شرط تابع بودن یک خطوط را بررسی کنند.

بپرسید

۱ــ آیا رابطهٔ {(۲,۲),(۱,۱)}، یک رابطهٔ خطی است؟

۲ــ کدام یک از رابطه‌های زیر خطی است؟



مسائل صفحهٔ ۴۰

۱ــ دانش‌آموزان در این سؤال باید بتوانند رابطه‌ای که غیرخطی است را تشخیص دهند. در قسمت ج سؤال، مشخص است که با افزایش شعاع، مساحت دایره نیز افزایش می‌یابد ولی این افزایش غیرخطی است.

۲ــ در این سؤال، هدف این است که دانش‌آموزان بتوانند یک الگوی مدل خطی را پیش‌بینی نمایند. در قسمت ج ، دانش‌آموزان در سال اوّل فراگرفته‌اند که با معلوم بودن نقاط خط، معادلهٔ خط را مشخص نمایند و در قسمت د، با توجّه به اینکه برای هر x حداکثر یک y وجود دارد، رابطهٔ خطی، تابع می‌باشد.

۳ــ معادلهٔ خط ۶x ۳ y که در آن x تعداد کالا و y سود حاصل بر حسب تومان باشد؛ یک مسئلهٔ بازاریابی است. در قسمت ج، محل برخورد نمودار با محور xها نمایانگر آن است که با تعداد کالا ۵۰ x سود شرکت صفر می‌باشد و ادامه سؤال شروعی است برای تعیین علامت که در بخش‌های بعدی مفصلاً به آن پرداخته می‌شود.

با توجّه به نمودار، دانش‌آموزان در می‌یابند که حداّقل تعداد کالا، باید بیشتر از ۵۰ عدد باشد.

وارون یک رابطه

اهداف

انتظار می‌رود در پایان این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

وارون رابطه‌ها و تابع‌هایی که به صورت جدول مقادیر، مجموعهٔ زوج‌های مرتب و یا نمودار هستند را به دست آورند.

پیش‌نیازها

۱ــ آشنایی با مفهوم رابطه و انواع نمایش‌های آن

۲ــ آشنایی با مفهوم دامنه و برد یک رابطه

ارزشیابی تشخیصی

در تابع ۳ ۲x y با دامنهٔ $\left\{-۱, ۰, \frac{۲}{۳}\right\}$، برد تابع را به‌دست آورید.

نگاه کلّی به بخش

در این بخش، وارون یک رابطه قبل از توابع یک‌به‌یک به دانش‌آموزان آموزش داده می‌شود و دانش‌آموزان وارون روابطی که به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب هستند را پیدا می‌کنند و به این سؤال پاسخ می‌دهند که «آیا وارون هر تابع، یک تابع است» و به این نتیجه می‌رسند که تابع باید دارای ویژگی‌های خاصی باشد تا وارون آن هم تابع باشد و بدین ترتیب دانش‌آموزان به تدریج به خاصیت یک‌به‌یک بودن پی می‌برند. همچنین باید توجه داشت که مفهوم متغیر باید به تدریج مطرح گردد. به همین دلیل وارون یک تابع قبل از ضابطهٔ تابع مطرح می‌شود.

ورود به مطلب : ارائهٔ مطلب با یک مثال هندسی از رابطهٔ بین طول ضلع و محیط مربع آغاز شده است. این رابطه با رسم نمودار ون و مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب R نمایش داده می‌شود. در بسیاری از مسائل، دانش‌آموزان با استفاده از محیط مربع لازم است طول ضلع آن را محاسبه نمایند. پس این پرسش مطرح می‌شود که اگر محیط مربعی اعداد $\{۴,۸,۱۰,۴\sqrt{۲},۲۸\}$ باشند، طول ضلع آن را بدست آورید و به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

دامنه و برد این مجموعه با مجموعهٔ R نسبت به هم چگونه هستند؟

با طرح این‌گونه پرسش‌ها دانش‌آموزان به مفهوم وارون رابطه هدایت می‌شوند.

نماد وارون هر رابطه به صورت $R^{-۱}$ معرفی می‌شود.

تمرین در کلاس صفحه‌های ۴۱ و ۴۲

هدف : دانش‌آموزان بتوانند وارون یک رابطه در نمایش‌های مختلف را به دست آورند.

در این تمرین در کلاس، چند رابطه در سه نمایش مختلف به دانش‌آموزان ارائه شده است و لازم است که دانش‌آموزان، ابتدا هر سه نمایش را به صورت مجموعه زوج مرتب تبدیل کنند و سپس با توجّه به روشی که در ابتدای این بخش گفته شده است، یعنی با جابه‌جایی مؤلّفه‌های اوّل و دوّم، وارون روابط را به دست آورند.

فعّالیت صفحهٔ ۴۲

هدف : دانش‌آموزان قاعده‌ای برای به دست آوردن وارون یک رابطه در نمایش‌های مختلف آن پیدا کنند.

در این فعّالیت، باید به دانش‌آموزان کمک کرد تا بتوانند در هر نمایش یک رابطه، یک قاعده برای یافتن وارون آن پیدا کنند.

بپرسید : چرا نمودار یک رابطه با نمودار وارونش نسبت به نیمساز ربع اوّل و سوّم یا خط $y \quad x$ متقارن اند.

توسعه دهید : آیا رابطه‌هایی وجود دارند که با معکوس‌شان مساوی باشند؟

می‌دانیم اگر $R^{\ ۱} \quad R$، یعنی رابطه‌ای با وارونش برابر باشند، به آن، رابطهٔ متقارن گفته می‌شود.

به عنوان مثال :

$R \quad \{(۱,۱)\ (۲,۲)\ (۳,۳)\} \quad R^{\ ۱}$

$R \quad \{(۱,۲)\ ۲,۱)\} \quad R^{\ ۱}$

توابع یک به یک

اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

۱ــ مفهوم یک به یک بودن یک تابع را توضیح دهند.

۲ــ یک به یک بودن توابعی که به صورت جدول مقادیر، زوج مرتّب و نمودار هستند را مشخص نمایند.

پیش‌نیازها

۱ــ آشنایی با مفاهیم رابطه و تابع، انواع نمایش‌ها و دامنه و برد آنها

۲ــ آشنایی با مفاهیم وارون رابطه و وارون تابع

ارزشیابی تشخیصی

وارون کدامیک از روابط زیر یک تابع است؟

$R_۱ \quad \{(۱,\ \ ۱), (۲,\ \ ۱), (۱,۵)\}$

$R_۲ \quad \{(\ \ ۱,۱), (۲,۳)\ (۳,۳)\}$

$R_۳ \quad \{(\ \ ۲,۵)\ (۱,۰)\ (۳, \sqrt{۲}\ )$

نگاه کلّی به بخش

پس از آنکه دانش‌آموزان با مفهوم وارون یک رابطه و وارون یک تابع آشنا شدند، یک به یک بودن یک تابع به عنوان شرط تابع بودن وارون یک تابع، مطرح می‌شود.

ورود به مطلب : با یادآوری این سؤال که یک تابع باید چه ویژگی داشته باشد تا وارون پذیر باشد، توجه دانش‌آموزان را به اهمیت بررسی یک به یک بودن تابع جلب کنید.

فعّالیت صفحهٔ ۴۳

هدف : دانش‌آموزان بتوانند ویژگی مشترک توابعی که وارون‌شان هم تابع است را با استفاده از نمودار ون مشخص کنند. در این فعّالیت، چهار نمودار ون به دانش‌آموزان ارائه شده است که همگی تابع اند و برای پیدا کردن وارون آنها کافی است جهت پیکان‌ها را عوض کنیم. پس از انجام این کار، دانش‌آموزان به این نکته پی می‌برند که وارون‌های به دست آمده همگی تابع نیستند. حال کافی است دانش‌آموزان را هدایت کنیم تا ویژگی‌مشترک دو تابعی که وارون آنها هم تابع است را پیدا کنند و در پایان تعریف یک به یک بودن را در کلاس درس ارائه می‌کنیم.

بپرسید : چرا به این نوع توابع، یک به یک می‌گوییم؟

تمرین در کلاس صفحهٔ ۴۵

هدف : دانش‌آموزان روشی برای بررسی یک به یک بودن یک تابع با استفاده از نمودار آن ارائه کنند. پس از تعریف یک به‌یک بودن توابع مثال‌های صفحه‌های ۴۴ و ۴۵، در این تمرین در کلاس، دانش‌آموزان روش کلّی بررسی یک به یک بودن یک تابع را با استفاده از نمودار تابع می‌آموزند. بهتر است با طرح مثال‌های مختلف و ارائهٔ نمودارهای $y \quad b$,$y \quad ax \quad b$، یک به یک بودن یک تابع را بیشتر بررسی کرد.

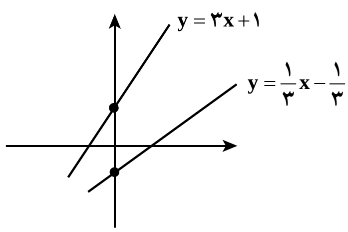
مسائل صفحهٔ ۴۶

۲ــ الف) در این تابع، مؤلّفه‌های دوّم برابر وجود ندارد، پس تابع یک به یک است ؛اگر نمودار زوج‌های مرتب را رسم کنیم، مشخص می‌شود که تابع، خطی است و معادلهٔ خط را با معلوم بودن دو نقطهٔ آن پیدا می‌کنیم.

$$m \quad ۳ \text{ و } y \quad ۴ \quad ۳(x \quad ۱) \Rightarrow y \quad ۳x \quad ۱$$

ب) تابع یک به یک است ؛پس وارون تابع، تابع است. معادلهٔ وارون آن را با به دست آوردن معادلهٔ خط به دست می‌آوریم.

$$m = \frac{۱}{۳}, y - ۱ = \frac{۱}{۳}(x - ۴) \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x - \frac{۱}{۳}$$



بازه (فاصله)

اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

مفهوم بازه را بیان کنند و نمایش‌های مختلف یک بازه را نشان دهند.

پیش نیازها

آشنایی با مجموعهٔ اعداد

نگاه کلّی به بخش

در این بخش دانش‌آموزان با نمایش هندسی، نمایش به صورت مجموعه و نمایش با نماد بازه برای نشان دادن مجموعهٔ همهٔ اعداد بین هر دو عدد حقیقی و یا بزرگ‌تر و کوچک‌تر از هر عدد حقیقی، آشنا می‌شوند.

ورود به مطلب : در سال‌های گذشته دانش‌آموزان با مجموعه‌های اعداد طبیعی، صحیح، گویا، گنگ و حقیقی آشنا شده‌اند و برای آغاز تدریس این بخش می‌توان به یادآوری مباحث آموخته شده در این خصوص پرداخت و سپس با این سؤالات بحث را ادامه داد که به عنوان مثال، چه تعداد اعداد گویا یا گنگ بین دو عدد ۱ و ۰ وجود دارد؟ این مجموعه را چگونه می‌توان نمایش داد؟

تمرین در کلاس صفحه‌های ۴۷ و ۴۸

هدف :

۱ــ آشنایی دانش‌آموزان با نمایش‌های متفاوت یک بازه

۲ــ آشنایی با مفاهیم بازه، بازهٔ نیم باز و بازهٔ بسته

۳ــ آشنایی با نماد بی‌نهایت و چگونگی استفاده از آن برای نمایش یک بازه

مقدار تابع در یک نقطه ـ نمایش جبری تابع

اهداف

انتظار می‌رود پس از پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند :

۱ــ مفهوم تابع به عنوان یک ماشین را با ذکر مثالی توضیح دهند.

۲ــ با معلوم بودن تابع به صورت مجموعه زوج‌های مرتب یا با معلوم بودن ضابطهٔ یک تابع، مقدار تابع را به ازای هر عضو از دامنهٔ آن به دست آورند.

۳ــ مفهوم نمایش جبری یا ضابطه یک تابع را با ذکر مثالی توضیح دهند.

۴ــ نمودار توابع درجهٔ اوّل را به کمک نقطه یابی رسم کنند.

پیش نیازها

۱ــ آشنایی با مفاهیم رابطه، تابع، نمایش‌های مختلف و دامنه و برد آنها

۲ــ آشنایی با توابع درجهٔ یک و روش رسم آنها روی محورهای مختصات

نگاه کلّی به بخش

دانش‌آموزان در این بخش، ابتدا با مفهوم جدید تابع به عنوان یک ماشین آشنا می‌شوند و سپس با روش به دست آوردن مقدار تابع در یک نقطه و ضابطهٔ تابع آشنا می‌شوند. یادگیری صحیح این مفاهیم به فهم بهتر مباحثی همچون ترکیب توابع که در سال بعد خواهند آموخت، کمک زیادی خواهد کرد.

ورود به مطلب : در ابتدای این بخش لازم است دامنه و برد توابع مجدداً در کلاس درس مورد بحث و تبادل نظر قرار گیرند و سپس با رسم شکلی مانند شکل صفحهٔ ۴۹ کتاب درسی، با چند مثال مختلف، مفهوم تابع به عنوان یک ماشین برای دانش‌آموزان توضیح داده شود. در ادامه می‌توان با ذکر چند مثال ساده مانند مثال صفحهٔ ۴۹ کتاب درسی، از دانش‌آموزان خواست تا با استفاده از نمایش یک تابع با مجموعهٔ زوج‌های مرتب، ضابطهٔ آن را حدس بزنند و با مقدار گذاری در ضابطهٔ تابع، درستی حدس خود را آزمایش کنند.

فعّالیت صفحهٔ ۵۰

هدف : آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم ضابطهٔ یک تابع و توانایی به دست آوردن برد یک تابع بر اساس دامنهٔ آن (در سطحی که کتاب درسی آموزش می‌دهد).

توصیهٔ آموزشی

هر تابع با مشخصه‌های ضابطه، دامنه و برد مشخص می‌شود. در برخی موارد به اشتباه به جای تابع f گفته می‌شود تابع f (x) که البته درست آن است که گفته شود تابع f با ضابطه f (x)   y. محاسبهٔ دامنهٔ برخی از توابع جزء اهداف آموزشی کتاب می‌باشد که در فصل بعد به صورت کامل‌تری به آن پرداخته خواهد شد ولی محاسبه برد توابع، جزء اهداف آموزشی این کتاب نیست. همچنین باید توجه داشت با معلوم بودن دامنه و برد یک تابع، همواره نمی‌توان ضابطهٔ آن تابع را مشخص کرد.

بپرسید : اگر تابع f به صورت {(۲, ۱)(۳,۵)(۱,۳)(۵, $\sqrt{۲}$)}   f باشد، مقادیر زیر را مشخص کنید.

الف) f (۲)　　　　ب) f (۵)

ج) f($\sqrt{۲}$)　　　　د) f (f (f (۲))

دقت کنید که f($\sqrt{۲}$) در این تابع، تعریف نشده است.

مسائل صفحهٔ ۵۱

۷ ــ علی در هر دقیقه پیاده روی، مسافت ۰/۲ کیلومتر را طی می‌کند؛ بنابراین :

t	۱	۲	۳
مسافت طی‌شده	/۳	/۶	/۶

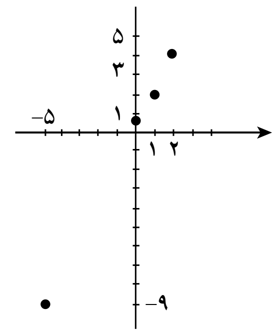
نمایش جبری ۰/۲t   y به دست می‌آید.

۱۱ـ عرض y ، طول x

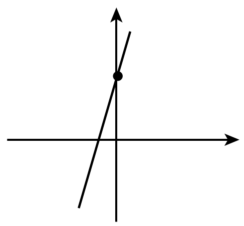
محیط مستطیل x y ۳ (x y) × ۲ (y ۳ y) × ۲ ۴y ۶

۱۳ـ

الف) {(۰,۱), (۱,۳), (۲,۵), (۵, ۹)}



ب و پ) معادلهٔ خط ۱ ۲x h(x) را رسم می‌کنیم.



x	۰	$-\frac{۱}{۲}$
y	۱	۰

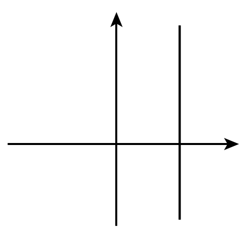
و با توجه به دامنه، قسمت قابل قبول را مشخص می‌کنیم.

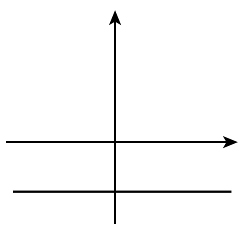
۱۴ـ تابع، خطی است و از مبدأ مختصات می‌گذرد ؛پس دو نقطهٔ (۰,۰) و (۳,۱۵) معلوم است و (۰,۰) و (۳, ۱۵) نقاط وارون این تابع هستند. معادلهٔ خط برابر است با :

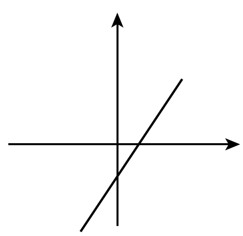
$$m = \frac{۳}{۱۵} \Rightarrow y = \frac{۳}{۱۵}x$$

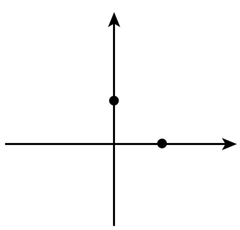
سؤالات تکمیلی

۱ــ کدام شکل زیر، نمودار تابعی است که برد آن تک عضوی است؟

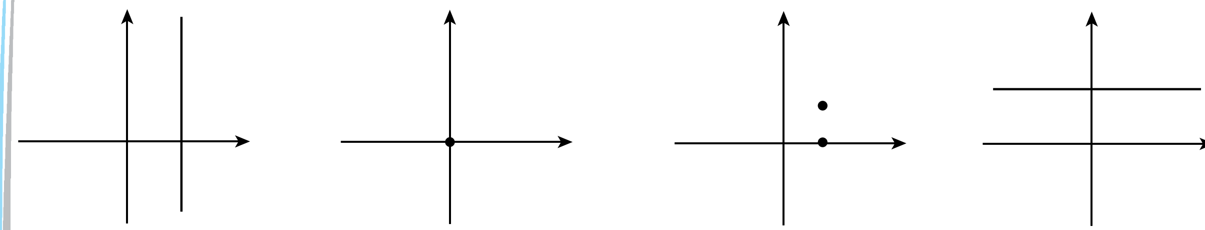
الف) 

ب) 

پ) 

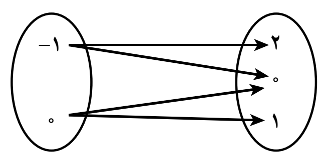
ت) 

۲ــ کدام شکل زیر،نمودار تابعی است که دامنهٔ آن تک عضوی است؟



الف) ب) پ) ت)

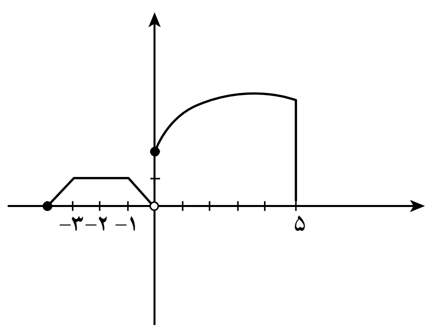
۳ــ رابطهٔ R به صورت زیر تعریف شده است.آیا ۱ R یک تابع است؟



۴ــ با توجه به نمودار تابع f

الف) مقادیر (۱) f و (۵) f را به دست آورید.

ب) به ازای چه مقداری از x داریم : ۰ f (x)



۵ ــ مقدار a و b را طوری پیدا کنید که زوج مرتب (۱ a ۳b, ۴a ۲a) با زوج مرتب (۵،۲) برابر باشند.

۶ــ به ازای چه مقداری از a رابطه {(a, ۳ a), (a, ۱ a), (۱,۲)} R، تابع است؟

۷ــ ضابطهٔ تابعی را بنویسید که دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد طبیعی و برد آن یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۲ و قدر نسبت ۳ باشد.

۸ ــ تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنهٔ آن فقط سه عضو و برد آن مجموعهٔ {۰} باشد.

ب) دامنهٔ آن فقط عضو a را داشته باشد و برد آن نامتناهی باشد.

۹ــ آیا تابعی یک به یک مانند f وجود دارد که در آن {۰, ۱,۲} D و {۲,۱} ۱ D باشد؛ چرا؟

۱۰ــ اگر دامنهٔ تابع خطی ۵ ۴x y به صورت [۱,۲] باشد، به کمک رسم نمودار تابع، برد آن را پیدا کنید.

۱۱ــ مقدار a و m را طوری پیدا کنید که تابع {(۲,۵), (۳,۴), (۳,۲m ۱) , (۳a ۱,۵)} f، یک به یک باشد.

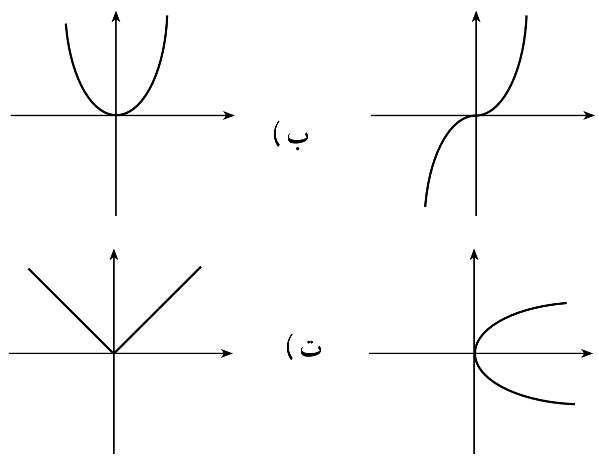
۱۲ــ اگر توابع {(a   ۱, ۴), (۲, b   ۳)}   f و {(۲a,۱), (a   ۲,۲)}   g وارون یکدیگر باشند، حاصل b   a را پیدا کنید.

۱۳ــ خلاصه شدهٔ عبارت (۴,۷]∪[۲,۴] کدام بازه است؟

۱۴ــ دو بازهٔ (۲,۳)   A و (۳,۰]   B مفروض‌اند. A∩B شامل چند عدد صحیح است؟

۱۵ــ اگر {(۱   a ,۳)(۰,۵)(۴ ,۳)(a۲   ,۵)}   f یک تابع باشد، آنگاه برد این تابع چند عضو شامل اعداد طبیعی دارد؟

۱۶ــ نمودار کدام شکل زیر، نمودار تابعی یک به یک است؟



۱۷ــ در تابع خطی b   ax   f (x) که در آن a ≠ ۰ است، اگر f (۵)، f (a)، f (b) جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، مقدار f (۲) را به دست آورید.

۱۸ــ دو تابع با ضابطهٔ ۳   ۴x   g(x) و ۱   ۲x   f (x) مفروض‌اند،با توجه به شکل زیر، حاصل b   a را پیدا کنید :

$$a \rightarrow \boxed{g(x)} \rightarrow -۷ \rightarrow \boxed{f(x)} \rightarrow b$$

۱۹ــ دو تابع {(۱,۳) (۲   ,۲) (۵ ,۱)}   f و {(۴,۱), (۱   ,۳), (۱,۲)}   g مفروض‌اند. حاصل عبارت زیر را پیدا کنید :

$$A = \frac{f(۲) + g^{-۱}(-۱)}{۲g(۲) + f^{-۱}(۵)}$$

۲۰ــ چند تابع خطی وجود دارد که از نقطهٔ (۱,۴)A بگذرد و وارون پذیر نباشند؟

۲۱ــ فرض کنید که قیمت تولید ۵۰ واحد از یک کالا ۲۷۰۰۰۰ ریال باشد. حال آنکه قیمت تولید ۱۰۰ واحد از همان کالا ۳۸۰۰۰۰ ریال است. اگر تابع قیمت، خطی فرض شود، ضابطه‌ای برای آن پیدا کنید. از این ضابطه برای تخمین قیمت ۸۰ واحد از همان کالا استفاده کنید.

۲۲ــ ضابطهٔ تابع خطی را بیابید که در آن ۲۵۰۰   f (۱۰) و ۱۰۰۰۰   f (۲۵) باشد.

نمونه سؤالات ارزشیابی پایانی

۱ــ جملهٔ عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = \frac{۳n - ۳}{n + ۱}$ می‌باشد، شش جملهٔ اول این دنباله را بنویسید.

۲ــ در دنبالهٔ حسابی زیر، جاهای خالی را پر کنید :

$$\square, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۶}, \square, \square, \square$$

۳ــ در یک مثلث قائم الزاویه، اضلاع مثلث تشکیل دنباله‌ای حسابی می‌دهند. اگر محیط این مثلث ۲۴ باشد، اندازهٔ اضلاع مثلث را به دست آورید.

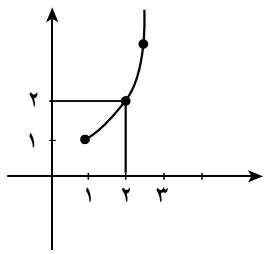
۴ــ یک دنبالهٔ هندسی مثال بزنید که به عدد خاصی نزدیک می‌شود.

۵ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

الف) $۳^{۲-۲\sqrt{۵}} \times ۳^{\sqrt{۲}+۱} =$ ب) $\sqrt[۶]{۸} \times \sqrt[۸]{۸} =$

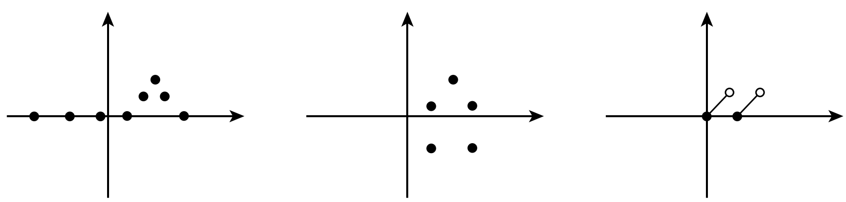
۶ــ تابعی مثال بزنید که دامنهٔ آن نامتناهی و برد آن تنها شامل یک عضو باشد.

۷ــ با توجه به نمودار رابطهٔ زیر، آیا رابطهٔ داده شده یک تابع خطی است؟ چرا؟



۸ــ در یک تابع خطی که نمودار آن محور طول‌ها را در نقطه ۳ قطع می‌کند، داریم $f(۰) \quad ۰$، ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.

۹ــ در زیر، نمودار چند رابطه رسم شده است، مشخص کنید کدام‌یک از این نمودارها یک تابع است؟



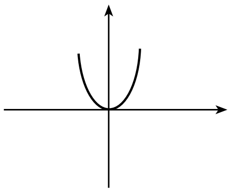
۱۰ــ نمودار تابع f با شرایط زیر را رسم کنید.

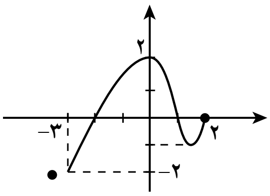
الف) دامنه تابع بازهٔ [۱,۰] باشد.

ب) برد تابع بازهٔ [۳,۲] باشد.

پ) تابع یک به یک باشد.

۱۱ــ دامنه و برد توابع روبه‌رو را به صورت یک بازه بنویسید.





۱۲ــ هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه و روی محور نمایش دهید.

الف) [۱,۵)　　　　ب) (a, ۰)

پ) (۲, ۳)　　　　ت) [۰, ۱)

۱۳ــ اگر { (۴,۱) (۰,۴), (۳, ۰) (۱,۱) } f باشد، آنگاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) f (f (۰))　f (۱)

ب) f (۴)　f (۰)

۱۴ــ توابع ۲x f (x) و ۲x g (x) مفروض اند، دامنهٔ f را برابر {۱, ۲, ۳} و دامنهٔ g را برابر (۳ و ۱) در نظر بگیرید و هر یک از توابع را رسم کنید.

۱۵ــ در تابع زیر، معادله‌ای برای وارون آن بنویسید.

x	۱	۲	۳	۴	۵
f (x)	۸	۵	۲	−۱	−۲

۱۶ــ در شکل زیر، نمودار رابطهٔ f و خط x　y رسم شده است، به کمک نقاط مشخص شده، نمودار وارون این رابطه را رسم کنید. آیا رابطه و وارون آن تابع‌اند؟