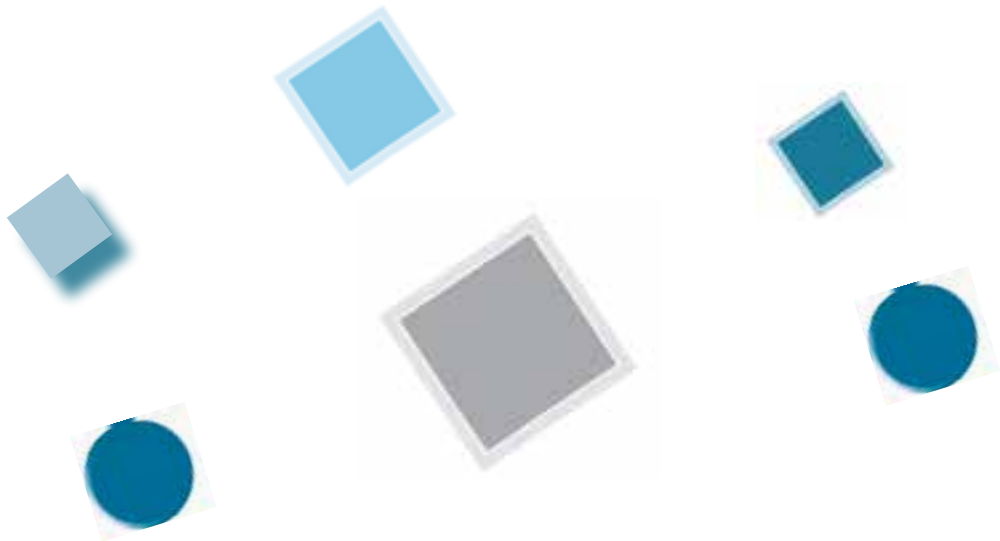




بخش

کلیات برنامهٔ درسی

ریاضیات (۲)



مقدمه

طراحی آموزشی شامل فرایند انتخاب و سازماندهی محتوا، انتخاب روش یا روش‌های آموزش و گزینش راهبرد مناسب ارزشیابی از فرایند آموزش جهت برآورد اهداف آموزشی مصوب است. در این راستا، آگاهی از اهداف آموزشی و برنامه درسی، موضوعی حائز اهمیت است. امروزه، برنامه‌ریزان درسی در تنظیم اهداف برنامه درسی، طیف متنوعی از اهداف را در آموزش موضوع یا موضوعات درسی در نظر گرفته و برای تحقق آن تلاش می‌کنند. ماهیت چند بعدی برنامه‌های درسی و فضای یاددهی - یادگیری نظام مدرسه‌ای، این فرصت را فراهم می‌سازد تا همراه آموزش موضوعات درسی در حوزه‌های موضوعی، اهداف آموزشی - پرورشی چندگانه را نیز در نظر گرفت و به طور متقابل از ظرفیت‌های موجود در سایر فرصت‌های یاددهی - یادگیری برای آموزش بهتر برنامه درسی خاص استفاده کرد. لازمه اجرای درست هر برنامه درسی و یکی از مهم‌ترین شاخص‌های ارزیابی آن، میزان آگاهی دست‌اندرکاران از مقاصد و اهداف برنامه است؛ چرا که بدون آگاهی از اهداف، تلاش‌های به عمل آمده به مثابه انداختن تیری در تاریکی است. در زیر اهداف کلی دوره متوسطه و اهداف جزئی کتاب ریاضی ۲ بیان می‌شوند:

اهداف کلی دانشی دوره متوسطه

- ۱- آشنایی با اعداد حقیقی از طریق خط هندسی و درک کامل خواص جبری
- ۲- آشنایی با دنباله‌های عددی و تقریبات اعشاری یک عدد حقیقی
- ۳- آشنایی دقیق با توابع و به کارگیری توابع در توصیف روابط بین کمیت‌ها
- ۴- آشنایی با توابع خاص و مهم، مانند توابع چندجمله‌ای، کسری، رادیکالی، نمایی و لگاریتمی
- ۵- آشنایی کامل‌تر با نسبت‌های مثلثاتی و کاربردهای آنها
- ۶- آشنایی با حد توابع به طریقه شهودی و درک اهمیت و کاربردهای آن
- ۷- آشنایی با مفاهیم پیوستگی و مشتق توابع در زمینه‌های طبیعی و کسب توانایی به کارگیری آنها در حل مسائل
- ۸- آشنایی با مفهوم انتگرال و رابطه آن با مساحت شکل‌ها و مفهوم تابع اولیه (ضد مشتق)
- ۹- آشنایی با مفاهیم اساسی هندسی (همنهستی، تشابه، مکان هندسی، تبدیلات، . . .)
- ۱۰- تعمیم مفاهیم هندسی صفحه به سطح کره (خط، پاره‌خط، زاویه، مثلث، . . .)
- ۱۱- آشنایی با جبری‌سازی مفاهیم هندسی و هندسی‌سازی مفاهیم جبری
- ۱۲- آشنایی با ترسیمات هندسی با خط‌کش و پرگار
- ۱۳- آشنایی با معادلات خط و صفحه و تشخیص اوضاع نسبی آنها
- ۱۴- آشنایی با بردارها و عملیات جبری روی آنها و کاربرد آنها
- ۱۵- آشنایی با ماتریس‌ها و عملیات جبری روی آنها و دترمینان و کاربردهای آن
- ۱۶- آشنایی کامل‌تر با مجموعه‌ها و عملیات روی آنها (اجتماع، اشتراک، تفاضل، حاصل ضرب، متمم‌گیری)
- ۱۷- آشنایی دقیق‌تر با مفاهیم اساسی آمار و احتمال و کاربردهای آنها
- ۱۸- آشنایی با مفاهیم اساسی اعداد طبیعی مانند استقرای ریاضی و همنهستی و تجزیه به عوامل اول

۱۹- آشنایی با ترکیبات و اصول شمارش

۲۰- آشنایی با گراف‌ها و مفاهیم اساسی آنها و استفاده از گراف‌ها در مدل‌سازی موقعیت‌ها

۲۱- آشنایی با گزاره‌ها و ترکیبات منطقی آنها و اصول موضوع و تعاریف

اهداف فرایندی

برای درک مناسب از ریاضی و عمل در ریاضی و به کارگیری در حل مسائل، صرف آموزش موضوعات ریاضی کافی نیستند. در عمل ریاضی، عوامل و مهارت‌های خاصی در کارند که آنها را مهارت‌های فرآیندی می‌نامند. مفاهیم و موضوعات ریاضی مانند جسم و مهارت‌های فرایندی همانند روح برای آن هستند. این مهارت‌ها در همه پایه‌های تحصیلی، چه در دوره عمومی و چه در دوره متوسطه با اهمیت هستند و حضور دارند، ولی متناسب با نوع سطح شناختی دانش‌آموزان، پیاده‌سازی و چگونگی کار کردن با این فرایندها متفاوت خواهد بود. این مهارت‌ها به شکل زیر دسته‌بندی شده‌اند:

نمایش‌های ریاضی

این مهارت مربوط به نمایش داده‌ها و اطلاعات و آنچه که در ذهن دانش‌آموز می‌گذرد، می‌باشد و کمک بسیاری برای درک بهتر مطالب و برقراری ارتباط با دیگران می‌کند. این مهارت در موارد زیر قابل بیان است:

- ۱- نمایش‌های مختلف ریاضی برای سازماندهی، ثبت کردن و تبادل ایده‌های ریاضی به کار می‌رود.
- ۲- نمودارها، نقشه‌ها، جدول‌ها، نمادها و علائم و . . . همگی برای نمایش مفاهیم ریاضی هستند.
- ۳- دانش‌آموز، هر شکل از صورت‌های نمایش را باید تشخیص دهد و در جای مناسب به کار گیرد.
- ۴- از نمایش‌های ریاضی به عنوان ابزاری برای فهم و درک و تجزیه و تحلیل ایده‌های ریاضی استفاده می‌شود.
- ۵- برای حل مسائل مختلف و توضیح موقعیت‌های مسئله گونه از نمایش‌های ریاضی استفاده می‌شود.
- ۶- نمایش‌های مختلف از یک مفهوم و رابطه‌های بین آنها، در درک مفاهیم و حل مسائل کارساز است.
- ۷- نمایش‌های متفاوت ریاضی برای مدل‌سازی، تفسیر و درک پدیده‌های مختلف به کار برده می‌شود.

ارتباطات مفهومی

مفاهیم ریاضی با یکدیگر در ارتباط‌اند و شناخت این ارتباطات، درک و یادگیری مفاهیم را عمیق‌تر می‌سازد. بنابراین در آموزش، موارد زیر باید رعایت شوند:

- ۱- پیوندهای مفهومی و مهارتی میان ایده‌های ریاضی شناسایی و ارائه شوند.
- ۲- ارتباطات میان نمایش‌های چندگانه از یک ایده ریاضی درک و برقرار شوند.
- ۳- تناظر میان روش‌ها و رویه‌ها برای حل مسائل مشابه ریاضی درک شود.
- ۴- از پیوندهای ایده‌های مختلف ریاضی و کیفیت ساخته شدن ایده‌های مرتبط با هم، در تشکیل یک کل یکپارچه استفاده شود.

۵- با استفاده از ارتباطات مفهومی بین مفاهیم ریاضی و غیرریاضی، موقعیت‌ها و وضعیت‌های واقعی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و در موارد مناسب مدل‌سازی شوند.

۶- از مفاهیم و روش‌های یک حوزه از ریاضی برای حل مسائل حوزه‌های دیگر ریاضی استفاده شود.

ارتباطات کلامی

- زبان، محمل اصلی برای توصیف، بیان و سخن گفتن از مفاهیم است. ریاضی نیز در همین بستر رشد می‌کند و لازمهٔ یک درک معنادار از مفاهیم، قابلیت بیان آنها در زبان طبیعی است. بنابراین به زبان درآوردن مفاهیم ریاضی و اشنانویسی در ریاضی سهم مهمی در یادگیری بازی می‌کند. موارد زیر باید در آموزش مفاهیم ریاضی مورد توجه قرار گیرند:
- ۱- دانش‌آموزان، تفکرات ریاضی خود را توصیف و سازماندهی کنند و استحکام بخشند.
 - ۲- دانش‌آموزان، بتوانند یک طرح کلی برای گام‌های مورد استفاده در حل مسائل به صورت کتبی و شفاهی ارائه دهند.
 - ۳- زبان ریاضی در درون زبان طبیعی گسترش یابد و از نمادها و جدول‌ها، نمودارها، اعداد و . . . در تبادل اطلاعات و برقراری ارتباط به درستی استفاده شود.
 - ۴- دانش‌آموزان، بتوانند تفکر ریاضی خود را به صورت منسجم و روشن برای دیگران بیان کنند.
 - ۵- دانش‌آموزان، بتوانند در مباحثات ریاضی به صورت شفاهی یا نوشتاری شرکت کنند.
 - ۶- دانش‌آموزان، بتوانند گزاره‌های ریاضی و موقعیت‌های پیش آمده در مسائل را توضیح دهند و تبیین کنند.
 - ۷- دانش‌آموزان، بتوانند استدلال‌های ریاضی را با دیگران به تبادل بگذارند و نشان دهند که چرا یک نتیجه، معنادار است یا چرا یک استدلال، معتبر است.
 - ۸- استدلال‌ها و سؤال‌های دیگران را با دلایل منطقی و صحیح مورد تأیید قرار داده یا رد کنند.
 - ۹- تفکر ریاضی و راهبردهای ریاضی دیگران را تجزیه و تحلیل کرده و ارزیابی کنند.
 - ۱۰- در یک فعالیت گروهی، تفکر ریاضی ارائه شده توسط دیگران را گوش دهند، بنویسند و درک کنند.
 - ۱۱- روی راهبردهای دیگران در مقایسه با راهبرد خود تأمل و تفکر و نقادی کنند.
 - ۱۲- راهبردها، راه‌حل‌ها و حدسیه‌های دیگران را احصاء کنند، تعمیم دهند و به چالش کشند.
 - ۱۳- از زبان ریاضی برای بیان دقیق ایده‌های ریاضی استفاده کنند.
 - ۱۴- از زبان ریاضی به صورت صحیح و درست برای طرح سؤال‌های ریاضی با هدف به چالش کشیدن حدسیه‌های دیگران استفاده کنند.
 - ۱۵- مسائل کلامی را با استفاده از نمادها و علائم رسمی ریاضی به صورت ریاضی بیان کنند.
 - ۱۶- زبان مناسب، نمایش‌های مناسب و فرهنگ واژگان تخصصی ریاضی را درک کنند و در هنگام توصیف اشیاء، از روابط و راه‌حل‌های ریاضی به درستی استفاده کنند.
 - ۱۷- از طریق درک مطلب و تفسیر نمایش‌ها، نمادها و علائم ریاضی و روش‌های نوشتاری، نتایج و نتیجه‌گیری‌های مربوط به ایده‌های ریاضی را استخراج کنند.

استدلال و اثبات

- توانایی در استدلال و اثبات حدسیه‌ها، جزء اصلی تفکر ریاضی است. بدون کسب این توانایی، نمی‌توان درک درستی از ریاضی پیدا کرد. بنابراین در آموزش ریاضی توجه به موارد زیر ضروری است:
- ۱- استدلال و اثبات به عنوان بخش پایه‌ای ریاضی تشخیص و ارزش داده شود.
 - ۲- ایده‌های ریاضی با استفاده از راهبردهای مختلف، توجیه و تبیین شوند.

- ۳- توانایی ساخت حدسیه‌های علمی ایجاد شود و حدسیه‌ها مورد بررسی و تحقیق قرار گیرند.
- ۴- یک حدسیه علمی با استفاده از راهبردهای ریاضی مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد و یک نتیجه علمی از آن گرفته شود.
- ۵- موقعیت‌هایی که در آن یک جواب تقریبی از جواب دقیق، مناسب‌تر است، تشخیص داده شود.
- ۶- استدلال‌ها و اثبات‌های ریاضی خلق شوند، رشد و توسعه داده شوند و مورد ارزیابی قرار گیرند.
- ۷- از ایده‌ها و زبان ریاضی برای به وجود آوردن استدلال ریاضی استفاده شود.
- ۸- استدلال منطقی ساخته شود و در آن ادعایی اثبات یا مثال نقضی برای ابطال آن آورده شود.
- ۹- استدلال ریاضی درست در قالب و صورت‌های مختلف ارائه شود و مورد استفاده قرار گیرد.
- ۱۰- استدلال‌های نوشتاری برای بررسی یک حدسیه علمی مورد استفاده قرار گیرند.
- ۱۱- انواع مختلفی از استدلال و روش‌های اثبات و راه‌حل‌ها به کار گرفته شوند.
- ۱۲- با استفاده از یک رویکرد نظام‌مند، استدلال‌های مختلف حل یک مسئله مورد ارزیابی قرار گیرند.
- ۱۳- از روش‌های ابداعی صحیح برای بررسی و اثبات نتایج و از مثال نقض برای ابطال احکام نادرست استفاده شود.
- ۱۴- نتایج صحیح در حالت‌های کلی‌تر توسعه و تعمیم یابند.
- ۱۵- از نمودارهای مناسب برای حمایت از یک استدلال منطقی استفاده شود.
- ۱۶- از استدلال استنتاجی برای ساختن و پشتیبانی از حدسیه‌های ریاضی استفاده شود.

حل مسئله

کسب توانایی حل مسئله از اهداف نهایی آموزش ریاضی است. این مهارت نیازمند تمامی مهارت‌ها و توانایی‌هایی است که در ریاضی وجود دارد و به نحوی تمامی مهارت‌های ریاضی را به کار می‌گیرد. در این راستا موارد زیر باید مورد توجه قرار گیرند:

- ۱- از طریق حل مسئله، دانش جدید ریاضی بنا شود.
- ۲- از راهبردهای متنوع حل مسئله برای فهمیدن و درک محتوای موضوعی - مفهومی ریاضی استفاده شود.
- ۳- از نمایش‌های معادل یک مفهوم ریاضی در تجزیه و تحلیل مسائل استفاده شود.
- ۴- مسائل ریاضی در ارتباط با محیط پیرامونی درک و حل شوند.
- ۵- از روش‌های مختلف نمایش، برای توضیح موقعیت‌های مسئله‌گونه استفاده شود. (نمایش‌های تصویری، عددی، جبری و نموداری)
- ۶- راهبردهای متنوع حل مسائل به کار گرفته شوند.
- ۷- توانایی انتخاب راهبرد مؤثر و کارآمد برای حل هر مسئله خاص ایجاد شود.
- ۸- در یک فعالیت گروهی، راهبردهای جدید برای حل یک مسئله پیشنهاد شود و انواع راهبردها مورد نقد و ارزیابی قرار گیرند.
- ۹- فرایند حل یک مسئله ریاضی رصد و تحلیل شود.
- ۱۰- اطلاعات مورد نیاز برای حل یک مسئله، بررسی و تعیین شوند و روش‌هایی برای به دست آوردن اطلاعات انتخاب شود و شاخص‌هایی برای جواب‌ها و راه‌حل‌های قابل قبول تعریف شود.
- ۱۱- راه‌حل‌های ارائه شده در یک مسئله با توجه به موقعیت و شرایط مسئله تفسیر شوند.
- ۱۲- روش‌های گوناگون حل یک مسئله بررسی و ارزیابی شوند.

اهداف مهارتی

هر یک از موارد زیر چه در دوره عمومی و چه در دوره متوسطه، قابل طرح است ولی سطح آن در حد همان پایه تحصیلی خواهد بود.

- ۱- کسب توانایی توصیف موقعیت‌های گوناگون با زبان و روش‌های ریاضی
- ۲- کسب توانایی تجزیه و تحلیل موقعیت‌ها و یافتن مفاهیم ریاضی در آنها
- ۳- کسب توانایی مرتبط کردن مفاهیم ریاضی با وضعیت‌های محیط پیرامونی
- ۴- رشد توانایی مدل‌سازی ریاضی از موقعیت‌های مسئله‌گونه، حل مدل و یافتن جواب‌ها در ریاضی و تفسیر جواب‌ها در مسئله واقعی

- ۵- کسب توانایی تجزیه و تحلیل منطقی جملات و انجام استدلال روی آنها
- ۶- کسب توانایی مباحثه و دقیق شدن در مفاهیم و یافتن حقایق از طریق تحلیل منطقی
- ۷- کسب توانایی حل مسئله ریاضی و حل مسائل واقعی و به کارگیری راهبردهای حل مسئله
- ۸- کسب توانایی گمانه‌زنی و پذیرش یا رد آنها
- ۹- کسب توانایی به نمایش در آوردن مفاهیم و اطلاعات و موقعیت‌های مسئله‌گونه
- ۱۰- کسب مهارت‌های تفکر (نقاد، خلاق، دیداری یا بصری و تصمیم‌ساز)
- ۱۱- فرضیه‌سازی و بررسی فرضیه‌ها در یک موقعیت مسئله‌گونه
- ۱۲- رشد و توسعه توانایی‌های تجسم، انتزاع و تعمیم
- ۱۳- کسب توانایی تقریب زدن، تحلیل دقت و صحت تخمین خطا در موقعیت‌های اندازه‌گیری
- ۱۴- توانمند شدن در استفاده از فن‌آوری برای توسعه دانش و به کارگیری آن
- ۱۵- به کارگیری فنون، ابزارها و فرمول‌های مناسب برای اندازه‌گیری
- ۱۶- نمودار خوانی و تحلیل نمودار

اهداف نگرشی

- ۱- یافتن نگرش مثبت به ریاضی به عنوان ابزاری قدرتمند و اساسی برای درک و حل مسائل واقعی
- ۲- معنادار دیدن مفاهیم ریاضی از طریق مشاهده آنها در محیط پیرامونی
- ۳- مرتبط دانستن مفاهیم ریاضی با یکدیگر و با مفاهیم محیط پیرامونی
- ۴- کسب روحیه حقیقت‌جویی و صداقت علمی
- ۵- کسب روحیه نقادی و نقدپذیری نسبت به مطالب ارائه شده

اهداف جزئی کتاب ریاضیات ۲

اعداد حقیقی

- خاصیت‌های اساسی اعداد حقیقی
- ریشه‌گیری از اعداد حقیقی

- توان رسانی به توان اعداد گویا
- توان رسانی به توان اعداد حقیقی
- لگاریتم اعداد حقیقی
- دنباله اعداد و مفهوم اولیه حد در دنباله‌ها
- دنباله حسابی و هندسی و مجموع جملات

معادلات و نامعادلات

- معادلات کسری
- معادلات رادیکالی
- تعیین علامت عبارت‌های جبری
- نامعادلات درجه دوم

مثلثات

- مفهوم نسبت‌های مثلثاتی در زاویه‌های دلخواه
- دایره مثلثاتی
- واحدهای اندازه‌گیری زاویه (درجه، رادیان)
- کاربرد نسبت‌های مثلثاتی
- اتحادهای مثلثاتی
- معادلات مثلثاتی و کاربردها
- حل مثلث و کاربردها
- روابط مثلثاتی در یک مثلث

رابطه و تابع

- مفهوم تابع و نمایش‌های آن
- ضابطه، دامنه و برد تابع
- نمودار تابع
- توابع یک به یک
- سهمی‌ها و رسم آنها
- رسم نقطه‌ای برخی از توابع

مجموعه‌ها و شمارش

- اصل ضرب در شمارش تعداد اشیاء
- زوج مرتب و ضرب مجموعه‌ها
- ارتباط زوج مرتب با مختصات نقطه در صفحه
- رابطه در مجموعه‌ها از طریق زوج مرتب
- تعداد ترتیب‌های چیندن r شیء از n شیء و رابطه با تعداد توابع یک به یک
- تعداد ترکیب‌های r شیء از n شیء و رابطه با تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی

ماتریس‌ها

- مفهوم ماتریس
- کاربرد ماتریس در حل معادلات خطی
- جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس
- خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس‌ها
- ضرب ماتریس‌ها و خواص آنها
- نمایش ماتریسی دستگاه معادلات خطی
- ماتریس یک‌ه و ماتریس وارون
- حل دستگاه‌های معادلات خطی از طریق ماتریس وارون
- دترمینان ماتریس‌ها

ضرورت و اهمیت آموزش ریاضی

وظیفه اصلی آموزش و پرورش به عنوان یک نهاد دولتی، پرورش نیروهای انسانی متعهد و کارآمد برای ورود به جامعه است تا همگان بتوانند استعدادها و توانایی‌های ذاتی خود را پرورش داده و متناسب با آن، نقش مناسبی را در جامعه برعهده گیرند تا در نهایت، جامعه به سمت تعالی معنوی و مادی پیش رود.

در این راستا ریاضی نقش عمده‌ای ایفا می‌کند. یک دانش ریاضی مناسب و یک آموزش مناسب از ریاضی، پایه اصلی کارآمدی نیروهای انسانی است. ریاضی، همانند زبانی است که همواره به آن نیازمندیم تا آنچه را که می‌بینیم، می‌دانیم و می‌فهمیم با روش‌های دقیق، توصیف و تشریح کنیم و از این طریق، دانایی خود را گسترش دهیم و از آن در حل مسائل استفاده کنیم. از سوی دیگر ریاضی، علمی است که نظم و سازگاری درونی دارد و به منظور پرورش نظم فکری و بالا بردن قدرت اندیشیدن و استدلال منطقی و نیز خلاقیت ذهنی مورد توجه قرار می‌گیرد.

بنابراین، نیاز به ریاضی یک نیاز زیربنایی است و هرگونه عمل منطقی و حساب شده و برنامه‌ریزی شده در زندگی، محتاج داشتن مهارت‌های اصلی ریاضی همچون تجزیه و تحلیل، درک روابط منطقی بین مفاهیم و وقایع و پیش‌بینی نتایج احتمالی است.

مبانی و ویژگی‌های آموزش ریاضیات مدرسه‌ای

هر یک از ما اطلاعاتی را که از پیرامون خود به دست می‌آوریم، با ساختار خاص خودمان، به یکدیگر مرتبط می‌کنیم و در ذهن خود جای می‌دهیم. یادگیری زمانی اتفاق می‌افتد که شخص در برخورد با اطلاعات جدید، آن را با اطلاعات قبلی خود مرتبط کند. هر چه ارتباط بین مفهوم جدید و مفاهیم قبلی گسترده‌تر باشد و بتواند مبنایی برای ساخت مفاهیم جدید شود و نیز فرد از آن در فهم مسائل زندگی استفاده کند، یادگیری معنا دارتر خواهد بود. بخشی از فرایند یادگیری این است که طرح‌های موجود در ذهن چنان اصلاح شوند که پذیرای ایده‌های جدید باشند. بر این مبنا، یکی از استانداردهایی که در آموزش به آن توجه می‌شود، برقراری پیوند بین مفاهیم آموخته شده در یک حوزه یادگیری ریاضی یا برقراری ارتباط بین مفاهیم از دو مبحث متفاوت در موضوع ریاضی یا ارتباط موضوع ریاضی با مباحث غیر از ریاضی است.

برای برقراری چنین ارتباطاتی، دانش‌آموزان باید ابتدا مفاهیم را در ذهن خود جست‌وجو کنند و پس از سازماندهی آنها، ارتباطات را تشخیص دهند. پرورش مهارت برقراری ارتباط و پیوند بین مفاهیم، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا با سازماندهی و

ساختار دادن به دانسته‌های خود، نسبت به آنچه می‌دانند، بصیرت بیشتری پیدا کرده، دانسته‌های خود را عمیق‌تر کنند. از جمله ابزارهایی که می‌توان از آن برای پرورش این مهارت استفاده کرد، نقشه‌های مفهومی است. از نقشه‌های مفهومی می‌توان هم در فرایند یاددهی - یادگیری و هم در ارزشیابی به عنوان اجزای فرایند آموزش استفاده کرد. نقشه‌های مفهومی ارتباط بین مفاهیم را نشان می‌دهند. در طول فرایند یاددهی - یادگیری می‌توان از دانش‌آموزان خواست تا به تدریج مفاهیمی را که یاد گرفته‌اند به هم ربط دهند. باید توجه داشته باشیم که انجام این کار در ابتدا ممکن است برای دانش‌آموزان سخت باشد، لذا در شروع کار می‌توان از دانش‌آموزان خواست مفاهیمی را که به نوعی ارتباط دارند، مشخص کنند. در مراحل بعد، از آنها خواسته می‌شود نقشه‌های نیمه‌کاره را کامل کنند و در مرحله آخر با توجه به آنچه می‌دانند، مفاهیم را به هم ربط دهند. توجه داشته باشید که ساختار ذهنی هر فرد با دیگری متفاوت است، لذا انتظار نداشته باشید که نقشه‌های مفهومی دانش‌آموزان با هم هماهنگ باشند، بلکه در بررسی آنها باید به درستی روابط برقرار شده و میزان برقراری ارتباط بین مفاهیم یا میزان برقراری ارتباط بین رشته‌ها و حوزه‌های مختلف توجه داشته باشید. از دانش‌آموزان بخواهید درباره چگونگی یا چرایی برقراری ارتباط بین مفاهیم صحبت کنند. با گوش دادن به استدلال‌ها می‌توانید، پاره‌ای از اشکالات رایج در آنها را شناسایی کنید. فراهم کردن محیط امن برای گفت‌وگو و بحث، بسیار مناسب است.

یکی دیگر از استانداردهایی که در آموزش باید به آن توجه کرد، برقراری ارتباط ریاضی‌وار است. این ارتباط شامل ارتباطات کلامی یا نمادین و صوری است؛ لذا باید دانش‌آموزان در ابتدا بتوانند درباره مفاهیم، فرایندها و درک خود از مسئله صحبت کنند. به کارگیری ساختارهای صوری و مجرد ریاضی (زبان ریاضی) در مراحل بعدی رشد این مهارت قرار دارند. برای رشد این مهارت، از دانش‌آموزان بخواهید تا در فرایندهای مدل‌سازی و حل مسئله، ابتدا وضعیت و راهبردهای حل مسئله را با کلام خود تشریح کنند. با این عمل، بر فرایند تفکر خود مدیریت کرده و به آن سازمان می‌دهند. سپس با استفاده از نمادها، وضعیت را با زبان ریاضی بیان کنند. بحث و گفت‌وگو درباره وضعیت‌های مختلف به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا با شیوه‌های تفکر، استدلال و توجیحات دانش‌آموزان دیگر، بتوانند تفکر منعطف و واگرا را در خود پرورش دهند. بحث و گفت‌وگو به معنای به کارگیری زبان در توصیف موقعیت‌ها و استدلال درباره ارتباط منطقی است. در این فرایند، مفاهیم و ارتباط درونی آنها روشن می‌شود و بدفهمی یا درک نادرست، مشخص و برطرف می‌شود، تفکر دانش‌آموزان رشد پیدا می‌کند، مفاهیم در ذهن دقیق‌تر شکل می‌گیرد، توانایی به کارگیری زبان برای بیان افکار و درک دیگران بالاتر می‌رود و مهارت نقد کردن و قدرت تحمل و نقدپذیری رشد می‌کند.

در فرایند بحث، از دانش‌آموزان بخواهید برای آنچه انجام می‌دهند یا بیان می‌کنند، استدلال کرده و آن را توجیه کنند. این گام برای رشد مهارت استدلال و سپس اثبات، مهم است. بیان صوری و نمادین استدلال و تعمیم و کلیت دادن به آنها در مرحله بعدی، یعنی اثبات کردن، شکل می‌گیرد. طی کردن مرحله استدلال برای پرورش مهارت اثبات بسیار مهم است. هنگام مدل‌سازی وضعیت‌های مختلف با نمادها و زبان ریاضی، ابتدا از دانش‌آموزان بخواهید وضعیت را با کلام خود تشریح کنند. اغلب مشاهده می‌شود که دانش‌آموزان اظهار می‌کنند که می‌توانند موضوع را توضیح دهند، ولی وقتی به شکل رسمی و صوری به بیان دلایل یا اثبات می‌پردازند، دچار اشتباه می‌شوند. فراهم کردن فرصت‌های مدل‌سازی وضعیت‌های با کلام و سپس با نمادها و زبان ریاضی و پرورش مهارت برقراری ارتباط و استدلال منطقی می‌تواند به رفع این مشکل کمک کند.

وقتی از دانش‌آموزان می‌خواهیم تا استدلال‌های خود را بیان کنند، ضعف‌های آنها در به کارگیری منطق و شیوه‌های استدلال و بدفهمی‌هایشان آشکار خواهد شد. از طریق بحث و گفت‌وگو می‌توان به رفع این نقایص کمک کرد. نوشتن کتبی و ارائه گزارش از توضیحات و استدلال‌ها، باعث دقت بیشتر دانش‌آموزان در سخن گفتن و درک عمیق‌تر و تواناتر شدن در ارائه دانش می‌شود. در طول مباحثات باید به این نکته توجه کرد که تمام استدلال‌ها و اظهارنظرها درست نیستند؛ لذا دانش‌آموزان باید بتوانند نظرات خود را در محیطی امن بیان کرده، نقد کردن و مورد نقد واقع شدن را تجربه کنند.

در فرایند آموزش، حتی زمانی که از دانش‌آموزان می‌خواهید تا درک خود را از مفاهیم بیان کنند، در هر موقعیت ممکن، از نمایش ارائه‌های مختلف یک مفهوم استفاده کنید؛ به این ترتیب، هم ابعاد مختلف یک مفهوم مورد توجه قرار می‌گیرد و هم حوزه‌های مختلف ریاضی برای دانش‌آموزان مشهود می‌شود.

علاوه بر فراهم کردن فرصت‌های فوق، باید توجه کرد که یادگیری یک فعالیت بشری است که در خلأ شکل نمی‌گیرد و فرایندی است که فرد در برخورد با یک وضعیت مسئله‌دار / مسئله‌ساز و انجام فعالیت‌های علمی / ذهنی مناسب، وضعیت را تحلیل می‌کند و در طی فرایند حل مسئله، مفهوم جدید را در ذهن خود می‌سازد و پس از تثبیت این مفاهیم، ساخت شناختی ذهن خود را اصلاح می‌کند و گسترش می‌دهد؛ لذا یکی از وظایف مهم معلم، فراهم کردن فرصت‌هایی است که دانش‌آموزان با چالش‌های مناسب و کنترل شده روبه‌رو شده و از طریق فعالیت‌های فردی / گروهی و با هدایت و راهنمایی معلم به یادگیری مطلوب دست پیدا می‌کنند. چالش حساب شده، موقعیت مسئله‌گونه‌ای است که دانش‌آموز توانایی درک آن را به طور مشهود دارد و اجزای آن موقعیت برای او معنا دارند، ولی پاسخ پرسش مطرح شده مستقیماً در دسترس نیست و برای رسیدن به آن باید تلاشی صورت بگیرد. بهترین مسائل آنهایی هستند که در بافت فرهنگی / اجتماعی دانش‌آموز در ارتباط با محیط پیرامونی مطرح می‌شوند تا برای دانش‌آموزان معنادار باشند.

طرح سؤالات مناسب، ایجاد فضای مناسب گفت‌وگو و بحث کلاسی و هدایت دانش‌آموزان در جهت پیدا کردن پاسخ سؤالات از وظایف معلم است. این رویکرد در آموزش، رویکرد حل مسئله نام دارد. باید به این نکته توجه کرد که حل مسئله به عنوان یک رویکرد با مهارت حل مسئله (مهارت مسئله حل کردن) متفاوت است. وقتی از مهارت حل مسئله صحبت می‌کنیم، منظور کسب مهارت حل کردن مسئله است. غالباً این عبارت گام‌های حل مسئله پویا را در ذهن تداعی می‌کند. حل مسئله با این تعبیر از اهداف آموزشی است. اما رویکرد حل مسئله، یعنی درگیر شدن با یک مسئله که پاسخ آن از قبل مشخص نیست؛ به منظور آموزش یا درک بهتر از یک مفهوم یا پرورش مهارت. در این رویکرد، دانش‌آموزان برای یافتن راه حل و پاسخ، اغلب درک خود را از یک مفهوم یا مهارت خود را در انجام کاری افزایش می‌دهند.

لذا هدف و معنای حل مسئله، فقط حل کردن مسئله نیست، بلکه حل مسئله، ابزار و روشی برای یادگیری به حساب می‌آید. برای آنکه بتوان از این ابزار استفاده بهینه کرد، دانش‌آموزان باید با راهبردهای حل مسئله آشنا باشند. مواجهه با طیف وسیعی از مسائل متنوع در شناختن و تشخیص راهبرد مناسب می‌تواند مؤثر باشد. یکی از روش‌های پرورش این مهارت این است که از دانش‌آموزان بخواهیم دربارهٔ مناسب بودن مزایا و معایب استفاده شده در فرایند مدل‌سازی و حل مسئله، صحبت و در صورت امکان، راهبردی جایگزین ارائه کنند.

باید توجه داشت که راهبردها در طول زمان در زمینه‌های خاص موضوعی به کار گرفته شده، آموخته می‌شوند. یکی از راه‌های به کارگیری راهبردها، قرار دادن دانش‌آموزان در وضعیت (واقعی/ ریاضی) مسئله است. در این وضعیت، دانش‌آموزان به کمک معلم یا بدون معلم به مدل‌سازی و حل مسئله می‌پردازند و از این طریق، به مفهوم جدید دست می‌یابند. برخی اوقات با بازنمایی فرایند تفکر در جریان حل مسئله‌ای که قبلاً حل شده، دانش‌آموزان با فرایند و استراتژی‌ها آشنا شده و هم‌زمان به وجود مفاهیم ریاضی موجود در مسئله پی می‌برند. سازماندهی فعالیت‌های کتاب درسی به گونه‌ای است که با اجرای یک فعالیت، یک مفهوم جدید آموزش داده می‌شود. البته این به آن معنا نیست که پایان یافتن فعالیت به منزلهٔ اتمام کار است. فعالیت‌های جمع‌بندی و مجردسازی مفاهیم باید در کلاس درس صورت گیرند. تمرین در کلاس، وضعیت‌ها و موقعیت‌هایی را فراهم می‌کند تا مفهوم آموخته شده از ابعاد مختلف بررسی شود و یادگیری تثبیت و توسعه یابد.

نکات مهم در آموزش ریاضی

بحث درباره نکات مهم و استانداردهای آموزش ریاضی بسیار گسترده است. موارد زیر شامل برخی نکات اساسی است که در آموزش باید به آنها توجه شود.

- توجه به پیشینه علمی و روحیات اجتماعی دانش‌آموزان و یادآوری پیش‌نیازهای ضروری
- حرکت از شهود به تجرید و استفاده از زمینه‌های واقعی و ملموس برای درک مفاهیم و رسیدن به مرحله نیمه مجرد و مجرد
- فعال‌سازی و درگیر کردن دانش‌آموزان در حل یک مسئله یا انجام یک فعالیت به طور فردی یا جمعی
- طرح مفاهیم در محیط زندگی به منظور معنادار کردن مفاهیم ریاضی
- ایجاد فرصت تفکر و عمل برای دانش‌آموزان در ساختن و کشف مفاهیم جدید
- ایجاد ارتباط بین مفاهیم ریاضی و بین مفاهیم ریاضی و غیر ریاضی
- ایجاد زمینه بحث و گفت‌وگو در مورد مفاهیم و حل مسائل به منظور تمرین و تشخیص بدفهمی‌های احتمالی و اصلاح آنها
- ترویج انشانویسی نسبت به مفاهیم ریاضی و بیان هرچه بهتر مفاهیم ریاضی و حل تشریحی به همراه توضیح فارسی مسائل
- فراهم کردن فرصت‌های بحث و گفت‌وگو در زمینه‌های گوناگون مانند چگونگی حل یک مسئله، بررسی استدلال‌های ارائه شده برای تشخیص راه حل، بررسی صحت پاسخ، بررسی معنای مفاهیم و . . .
- برقرار کردن ارتباط بین مفاهیم مختلف و طرح موقعیت‌هایی که چند مفهوم مختلف هم‌زمان و در ارتباط با یکدیگر حضور دارند.

- ایجاد نمایش‌های گوناگون از یک مفهوم و دیدن یک مفهوم در زمینه‌های مختلف

رویکرد برنامه درسی ریاضی

رویکرد برنامه درسی ریاضی بر این اصل استوار است که رسالت آموزش و پرورش از قوه به فعل در آوردن و شکوفا کردن استعدادهای الهی از طریق ایجاد فرصت‌های مناسب جهت یاددهی - یادگیری است. رویکرد اصلی حاکم بر این برنامه، یک رویکرد فرهنگی - تربیتی با تأکید بر حل مسئله از طریق محور قرار دادن یادگیرنده در بازسازی مستمر تجربه از راه مهارت‌های اکتشاف می‌باشد. در دوره متوسطه، تأکید عمده بر تجزیه و تحلیل و استدلال و تفکر منطقی است. آموزش در این دوره با ایجاد موقعیت‌های جدید و چالش برانگیز در یک زمینه فرهنگی و اجتماعی آغاز می‌شود و دانش‌آموزان با درگیر شدن در یک موقعیت مسئله‌گونه، مجبور می‌شوند با یک فعالیت عملی یا ذهنی، فردی یا جمعی، وضعیت جدید را تجزیه و تحلیل کنند و راه حل مناسب را بیابند و در این فرایند، نکات جدید را بیاموزند و ساخت شناختی خود را ارتقا دهند.

با توجه به مطالب فوق و پژوهش‌ها و نظریات آموزشی مطرح در دنیا، اصول رویکردهای آموزشی برنامه ریاضی دوره متوسطه به شرح زیر خواهد بود:

- ۱- توجه به پیشینه و معلومات دانش‌آموز
- ۲- توجه به میزان رشد ذهنی دانش‌آموز
- ۳- طرح مسائل معنادار و چالش برانگیز و قابل توجه
- ۴- هدایت کنترل شده دانش‌آموزان در حل مسائل طرح شده
- ۵- فعال‌سازی دانش‌آموزان برای کشف مفاهیم جدید و حل مسائل

- ۶- ایجاد مباحثه و به کلام در آوردن و به کارگیری صحیح زبان مادری و زبان ریاضی در بیان افکار و اعمال علمی
- ۷- انشانویسی و توصیف دانسته‌ها و یافته‌های خود
- ۸- بومی‌سازی مفاهیم ریاضی مطابق با فرهنگ و تمدن ایرانی - اسلامی

روش‌های یاددهی - یادگیری

در دوره متوسطه، فرایند یاددهی - یادگیری با حل یک مسئله برگرفته از دنیای واقعی آغاز می‌شود. این مسئله ترجیحاً شامل یک عنصر فرهنگی یا اجتماعی است و نیاز دارد تا به زبان ریاضی ترجمه شود. بنابراین، در ابتدا دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که چگونه از مدل‌سازی جبری با هنری استفاده کرده و مسئله را از دنیای واقعی به دنیای ریاضی منتقل کنند. در دنیای ریاضی با تکیه بر مهارت‌های فرایندی نسبت به حل مسئله اقدام می‌کنند. در این مسیر ممکن است چندین مرتبه بین دنیای واقعی و ریاضی رفت و برگشت داشته باشند. در نهایت با حل مسئله، لازم است پاسخ در دنیای واقعی تفسیر شود. در این فرایند، نقش اصلی و فعال را دانش‌آموز عهده‌دار است و سهم تسهیل‌کننده و هدایتگر بر عهده معلم است. مسئله‌های حل شده ی‌بار می‌توانند شروع‌کننده یا مولد مسئله‌های بعدی باشند و این تسلسل موجب توسعه و بسط یادگیری شناختی دانش‌آموزان می‌شود.

فعالیت‌های یاددهی - یادگیری از طریق حل این‌گونه مسئله‌ها انجام می‌شود. فعالیت‌های ارائه شده در کتاب‌های درسی نمونه‌هایی است که تا حدودی مسیر و جریان رشد و توسعه مفهومی را آشکار می‌سازد. یک معلم آگاه و توانمند می‌تواند متناسب با شرایط (توان ذهنی، سبک یادگیری و پیش‌دانسته‌های شناختی دانش‌آموز، شرایط اقلیمی، فرهنگی و اجتماعی) نسبت به بهبود، تکمیل و حتی جایگزینی فعالیت‌های مذکور اقدام کند.

استفاده از فناوری و وسایل دست‌ورزی می‌تواند به غنی‌سازی فرایند یاددهی - یادگیری کمک کند. این عوامل نیز می‌توانند در تغییر یا جایگزین کردن فعالیت‌ها نقش داشته باشند. همچنین معلم می‌تواند شرایط و زمینه‌های یادگیری مشارکتی را در کلاس فراهم نماید و از تأثیر بر هم نهی افکار و اندیشه‌های دانش‌آموزان در توسعه شناخت علمی یا ارزشی آنها بهره‌گیرد. در این خصوص از طراحی و انتخاب فعالیت‌هایی که ماهیتاً فردی هستند و انجام آنها نیاز کمتری به کار گروهی و مشارکتی دارد باید اجتناب شود.

در دوره متوسطه، توسعه ساخت شناختی و یادگیری از طریق درگیر شدن عملی در فرایند حل مسئله، فعال‌سازی، کشف فردی در موقعیت‌های تازه مسئله‌گونه و چالش برانگیز، جهت معنادار کردن مفاهیم جدید ریاضی انجام می‌شود. بنابراین، یکی از مناسب‌ترین روش‌های یاددهی، ایجاد موقعیت‌های مسئله‌گونه است تا از طریق حل آنها، نکته یا نکات موردنظر برای دانش‌آموزان روشن شود. بهترین مسائلی که می‌توان از آنها در آموزش استفاده کرد، آنهایی اند که با مفهوم مورد آموزش مرتبط باشند و مفهوم موردنظر در آنها دیده شود و برای دانش‌آموز معنادار و قابل توجه باشند و انگیزه کافی برای یافتن جواب در دانش‌آموز ایجاد کنند. معمولاً این مسائل آنهایی اند که در بافت فرهنگی و اجتماعی دانش‌آموز و در ارتباط با محیط پیرامونی مطرح می‌شوند.

از جمله روش‌های فعال یاددهی - یادگیری، می‌توان به روش‌های ذیل اشاره کرد:

تدریس تعاملی: تدریسی است فراتر از کمک به دانش‌آموزان در کسب محتوای علمی و مهارت‌ها. در این رویکرد علاوه بر توجه به کسب اطلاعات و مهارت‌ها، به فرایند تفکر و اهداف اجتماعی تأکید فراوان شده است. در چنین رویکردی، معلم و دانش‌آموزان از طریق یک نظام مشارکتی، فعالیت‌های آموزشی را دنبال می‌کنند و دانش‌آموزان نیز انسان‌های فعال و پویایی اند که همواره در کنش و واکنش متقابل با محیط می‌باشند.

روش پرسش و پاسخ (روش سقراطی): در روش پرسش و پاسخ، معلم هنگام جلب توجه دانش‌آموزان به مطالب و یا درس جدید و تدریس آن، مستقیماً به بیان مطلب نمی‌پردازد، بلکه با طرح سؤال‌های برنامه‌ریزی شده فعالیت ذهنی دانش‌آموزان را در مسیر مطالب

و مفاهیم جدید قرار داده تا خودشان به کشف مفاهیم جدید توفیق یابند. این روش برای مرور مطالبی که قبلاً آموخته شده و یا ارزشیابی میزان درکی که دانش‌آموزان از مفهوم درس دارند و همچنین برای پرورش قدرت تفکر و استدلال آنها روش بسیار مؤثری است. روش مشارکتی: نوعی از فعالیت آموزشی است که در آن دو عامل مهم و تأثیرگذار ساخت مشوق مشارکتی و ساخت وظیفه مشارکتی وجود دارد.

در ساخت مشوق مشارکتی، دانش‌آموزانی که به صورت مشارکتی فعالیت می‌کنند در دریافت پاداش به هم وابسته‌اند، به این معنا که نظام پاداش به جای فرد مدار، گروه مدار است.

در کار گروهی وقتی به دانش‌آموزان یاد داده شود که چگونه در گروه کار کنند و چه طور به کمک دادن و کمک گرفتن بپردازند، نافذترین سودمندی را دارد. کمک دریافتی هنگامی دارای بیشترین تأثیر است که به شکل توضیحات مشروح و نه صرفاً پاسخ بوده و از سوی دانش‌آموز کمک گیرنده برای حل مسئله به کار گرفته شود.

هنگامی که از گروه‌های کوچک در تعلیم ریاضیات استفاده می‌شود، معلمان باید به‌گزینش تکالیف و مطالبی بپردازند که در خور کار گروه و برای دانش‌آموز جالب است، همچنین بر اهداف گروهی و مسئولیت‌پذیری فردی هر دو تأکید کنند و آموزش و دستورهای روشنی به گروه‌ها بدهند و انتظارات خود را از هر گروه به روشنی بیان کنند.

بالاخره معلمان نباید گروه‌های کوچک را به چشم چیزی بنگرند که باید همواره مورد استفاده قرار گیرد و یا برعکس هرگز استفاده‌ای از آنها به عمل نیاید. درست این است که تعلیم در گروه‌های کوچک باید به عنوان عمل و مهارتی آموزشی نگریسته شود که برای بعضی مقاصد معین آموزشی در کلاس درس استفاده می‌شود.

روش اکتشافی: این روش معطوف به موقعیتی از تدریس است که در آن دانش‌آموزان با راهنمایی محدود یا بدون راهنمایی معلم روابط پدیده‌ها را کشف و یا اندیشه‌ای جدید را تولید می‌کنند که در این صورت روش اکتشافی هدایت شده و یا روش اکتشافی هدایت نشده نامیده می‌شود. در روش اکتشافی هدایت شده معلم اصولی که برای حل مسئله به کار می‌رود را ارائه می‌کند، اما راه حل مسئله را ارائه نمی‌کند یا بالعکس راه حل را ارائه می‌کند، اما اصول را ارائه نمی‌کند. دانش‌آموزان می‌توانند هم مفاهیم و هم مهارت‌ها را با حل مسئله بیاموزند و لازم نیست که معلمان نخست به پروراندن مهارت متمرکز شوند و بعد از آن به سمت حل مسئله حرکت کنند، بلکه هر دو کار را می‌توان با هم انجام داد. آموزش می‌تواند با مثالی به دانش‌آموزان که به طور شهودی پاسخ‌ش را می‌دانند، آغاز شود. از چنین نقطه عزیمتی، دانش‌آموزان مجازند تا به اکتشاف و پدیدآوردن روش‌های محاسبه خاص خودشان بپردازند. در این روش سودمند تدریس، معلم پیگیری می‌کند که کدام دانش‌آموز کدام راهبردها را به کار می‌برد و سپس دانش‌آموز را دعوت می‌کند که روش‌های حل مسئله خود را به ترتیبی که از پیش تعیین شده مورد بحث قرار دهد. این نوع ساختار تدریس در بسیاری از بخش‌های کتاب درسی قابل اجراست.

ویژگی‌های ارزشیابی ریاضی در دوره متوسطه

یکی از ویژگی‌های مهم ارزشیابی، تشخیص موقعیت آموزشی دانش‌آموز توسط معلم و خود دانش‌آموز است. برای طی کردن مسیر آموزش در بهترین حالت، لازم است ارزشیابی به صورت جزئی از فرایند آموزش درآید تا با تشخیص خطاها و انحراف‌ها، مسیر آموزش و بدفهمی‌های احتمالی را اصلاح کرد. با این روش، ارزشیابی نه تنها مختل‌کننده فرایند آموزشی نیست، بلکه جزئی از آن است. از این لحاظ می‌توان ارزشیابی را به عنوان بستری برای آموزش بهتر در نظر گرفت.

با تغییر رویکردهای آموزشی کتاب‌های درسی، بدیهی است که روش‌ها و ابزارها و نگاه به ارزشیابی نیز تغییر کند. از آنجایی که رویکرد آموزشی کتاب‌های جدید، فعالیت محور و مسئله محور می‌باشد، ارزشیابی نیز باید در خدمت این رویکرد قرار گیرد. یک

ارزشیابی معتبر، اطلاعاتی از حدود موفقیت یا عدم موفقیت دانش‌آموزان در کسب دانش و مهارت‌ها ارائه می‌کند. در این راستا یک ارزشیابی درست ویژگی‌هایی را داراست:

- ۱- اهداف آموزشی را مورد ارزشیابی قرار می‌دهد.
- ۲- دانش پایه و عمیق که به خوبی سازماندهی شده باشد را می‌سنجد.
- ۳- توانایی تفکر، درک و استدلال علمی را مورد ارزیابی قرار می‌دهد.
- ۴- حدودی از مفهوم که دانش‌آموزان درک کرده‌اند را تعیین می‌کند.
- ۵- بر فراشناخت و خود ارزیابی تأکید دارد.
- ۶- تعامل مثبت بین معلم و دانش‌آموز برقرار می‌کند.
- ۷- تفکر واگرا، تلاش‌های گروهی و مهارت‌های پیچیده تفکر و برقراری ارتباط را می‌سنجد.
- ۸- هم به فرایند و فرصت‌های یادگیری و هم به نتیجه نهایی توجه دارد.
- ۹- به طور مستمر دانش‌آموزان را در فعالیت‌های روزمره و در فرایند آموزشی می‌سنجد و نتایج حاصل، مبنای طرح درس مرحله بعد می‌شود.

رویکردهای ناظر بر ارزشیابی

با توجه به تأثیرپذیری ارزشیابی از رویکردهای تدریس، با تغییر رویکردهای آموزشی، به طور طبیعی روش‌ها و ابزار و نگاه به ارزشیابی نیز دچار تغییر خواهد شد.

برخی رویکردهای موردنظر در ارزشیابی عبارت‌اند از:

- ۱- ارزشیابی کتبی به تنهایی پاسخگوی رویکردهای فعال و فرایند محور نیست و ارزشیابی از فرایندها، مستلزم ابزار و روش خاص خود است.
- ۲- ارزشیابی نه فقط در پایان فرایند، بلکه در طول فرایند آموزش انجام شود.
- ۳- ارزشیابی نباید فقط به دنبال سنجش ضعف‌های دانش‌آموزان باشد.
- ۴- ارزشیابی باید تفکر واگرا و تلاش‌های گروهی و مهارت‌های پیچیده تفکر و برقراری ارتباط را نیز بسنجد.

اهداف و شیوه‌های پیشنهادی برای ارزشیابی

- ۱- ارزشیابی مهارت تفکر نقاد و قضاوت کردن (بیان نظرها و ارزشیابی و قضاوت در مورد آنها)
روش‌های ارزشیابی پیشنهادی: انشانویسی، گزارش‌نویسی، خلاصه کردن و تفسیر مطالب
 - ۲- ارزشیابی مهارت حل مسئله و تکمیل یک فعالیت (تشخیص مسئله، ارائه مسئله، تعریف مسئله، تحلیل اطلاعات مسئله، ارائه تحلیل و استراتژی‌های حل، برنامه‌ریزی و به کار بستن اطلاعات)
روش‌های ارزشیابی پیشنهادی: ارزیابی کار گروهی، ارزیابی فرایند و نتیجه کارهای عملی، حل مسئله و ارائه مقاله در مورد آن
 - ۳- ارزشیابی مهارت انجام دادن و چگونگی انجام دادن (انجام محاسبات، استفاده از ابزار، دنبال کردن و اجرای دستورالعمل‌ها، قواعد و قراردادهای)
- روش‌های ارزشیابی پیشنهادی: گزارش دانش‌آموزان درباره فعالیت‌های ریاضی، تهیه دستورالعمل برای استفاده از ابزار

برای دیگران، مشاهده و مدل‌سازی واقعیات

۴- ارزشیابی توانایی ارائه و بازیابی دانش (یادآوری، توصیف کردن، گزارش دادن، تشریح و برقراری ارتباط با سایر علوم)

روش‌های ارزشیابی پیشنهادی: آزمون کتبی، آزمون شفاهی، گزارش نویسی

۵- ارزشیابی مهارت برقراری ارتباط (به شکل کلامی یا نوشتاری، ارتباط بدون کلام، بحث و گفت‌وگو کردن، توضیح دادن،

مصاحبه کردن و مذاکره کردن)

روش‌های ارزشیابی پیشنهادی: ارائه‌های کتبی مانند ارائه گزارش، مقاله، ارائه‌های شفاهی، مشاهده کار گروهی

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، روش و شیوه ارزشیابی با توجه به هدف تعیین می‌شود. اکثر روش‌های فوق، علاوه بر نتیجه به

فرایند نیز توجه دارند. شواهد نشان می‌دهد مشارکت دانش‌آموزان در فرایند ارزشیابی باعث می‌شود دانش‌آموزان با معیارهای ارزشیابی

آشنا شوند و خودشان را با آن بسنجند. این کار را می‌توان با پاسخ‌های فرضی یا برگه‌های دانش‌آموزان در کلاس‌ها یا سال‌های گذشته

انجام داد. دانش‌آموزان دلایل خود را برای اختصاص نمره‌ای خاص، به صورت سمینار، مقاله و غیره ارائه می‌کنند.

تحقیقات نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در حین بررسی و اعمال معیارهای ارزشیابی، می‌آموزند که به چه نکاتی باید توجه کنند؛

لذا مفاهیم را بهتر می‌آموزند و در مجموع، بر عملکرد آنها اثر مثبت می‌گذارد.

از جمله ابزارهای ارزشیابی که در حال حاضر برای ارزشیابی یک فرایند استفاده می‌شود، ارزشیابی عملکردی است. ارزشیابی

عملکردی مشاهده مستقیم و نظام‌دار و ارزش‌گذاری به هدف آموزشی در عملکرد دانش‌آموزان است که به طور مستمر انجام می‌گیرد.

در این شیوه از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا با عملکرد یا تولید چیزی، مهارت و تبحر خود را نشان دهند.

ارزشیابی عملکردی به مهارت‌های زیر توجه دارد:

- طراحی و اجرای یک طرح

- نوشتن مقالات و مطالبی که به تلفیق و به کارگیری اطلاعات نیاز دارد.

- مدل‌سازی

- تهیه و تغییر نمودار

- جمع‌آوری اطلاعات

- مقاله‌نویسی و نقد مقالات

- بیان استدلال شفاهی و سخنرانی

برای اینکه دانش‌آموزان بدانند بر چه اساسی ارزیابی می‌شوند، باید معیارهای عملکرد مشخص باشند. اگر این معیارها خوب

مشخص شده باشند، دانش‌آموزان می‌دانند که چگونه کیفیت کار خود را بالا ببرند. برای طراحی آزمون‌های عملکردی باید مراحل

زیر طی شود:

اول، فهرستی از مهارت‌ها و دانشی که انتظار می‌رود دانش‌آموز در پایان یک کار به آن دست پیدا کند، فهرست می‌شود؛ به این

منظور، چند سؤال زیر باید پاسخ داده شود:

- دانش‌آموزان چه مهارت‌های شناختی و ویژگی‌هایی را باید کسب کنند؟ (برای مثال برقراری ارتباط از طریق نوشتن، تجزیه و

تحلیل، ارجاع به منابع و مواد آموزشی، استفاده از ریاضیات برای حل مسائل روزمره و غیره)

- دانش‌آموزان چه مهارت‌های اجتماعی و چه ویژگی‌های مهمی را باید کسب کنند؟ (برای مثال مستقل کار کردن، گروهی کار

کردن، باور نسبت به خود، پشتکار و استمرار در حل مسئله و . . .)

- دانش‌آموزان چه اصول و مفاهیمی را باید به کار ببرند؟ (برای مثال درک روابط و پیوند دادن بین مفاهیم و حوزه‌ها یا اصول

و مفاهیم موضوعی مربوط)

دوم، تکالیف و آزمون‌هایی طراحی شوند که دانش‌آموزان بتوانند دانش لازم، مهارت‌ها و ویژگی‌های مختص به خود را بروز دهند. تکالیف عملکردی باید در دانش‌آموزان انگیزه به وجود آورند و چالشی برای آنها ایجاد کنند، ولی در عین حال قابل دستیابی باشند.

سوم، برای طراحی این گونه تکالیف باید به سؤالات زیر پاسخ داده شود:

– دانش‌آموزان برای کسب مهارت‌های مورد نظر و انجام تکالیف چقدر زمان لازم دارند؟
معمولاً تکالیفی که به یک یا دو روز زمان نیاز دارد، بیشتر مورد علاقه دانش‌آموزان است تا تکالیفی که به یک هفته زمان نیاز دارد.

– مهارت‌های مورد نظر تا چه اندازه با مهارت‌های شناختی و اجتماعی دیگر ارتباط دارند و تا چه حد بر آنها اثر می‌گذارند؟

– مهارت‌های خواسته شده تا چه اندازه با اهداف برنامه درسی و مدرسه مرتبط اند؟

– مهارت‌هایی که به تلفیق این اهداف می‌پردازند، اولویت دارند.

– چهارم: معیارهای نمره‌گذاری باید به وضوح تعیین شوند و قابل اندازه‌گیری باشند.

– معیارهای عملکردی باید شامل مراحل و نتایج مورد نظر برای نشان دادن میزان تبحر و سطح دستیابی دانش‌خواسته شده باشند. توصیه می‌شود برای دانش‌آموزان مثال‌هایی آورده شود تا آنها متوجه شوند چه انتظاری از آنها می‌رود.

توجه داشته باشید که مفاهیم عملکردی، مفاهیم جدیدی نیستند، بلکه باید فعالیت‌هایی از دانش‌آموزان خواسته شود تا آنها را وادار به عمل کنند. تکالیفی طراحی کنید تا به مستندسازی نیاز داشته باشد و دانش‌آموزان اطلاعات و فرایندها را ثبت کنند. توجه به این نکته ضروری است که آزمون‌ها و تکالیف عملکردی به پروژه و تحقیقات و تهیه پوشه‌های کاری و تکالیف منزل محدود نمی‌شوند، بلکه می‌توان با توجه به معیارهای ذکر شده در بالا سؤال‌هایی برای آزمون‌های کتبی یا شفاهی طراحی کرد.

هر روش و ابزاری که برای ارزشیابی اتخاذ کنیم، باید توجه داشته باشیم که ارزشیابی فقط به منظور ارتقای دانش‌آموزان به پایه‌های بالاتر نیست. از ارزشیابی می‌توان به عنوان ابزاری برای بازبینی و اصلاح برنامه‌های آموزشی و تشخیص نقاط ضعف دانش‌آموزان استفاده کرد. اگر ارزشیابی فقط در پایان دوره زمانی خاص انجام نشود یا به عبارتی وقفه‌ای در آموزش نباشد، بلکه در طول فرایند آموزش بوده، به طور مستمر انجام شود می‌توان به اهداف فوق دست یافت.

به کارگیری فناوری اطلاعات و ارتباطات در آموزش ریاضی

به کارگیری فناوری اطلاعات و ارتباطات در آموزش، پدیده‌ای است که مؤسسات آموزشی با آن روبه‌رو هستند و نمی‌توان آثار مثبت آن را نفی کرد.

به کارگیری فناوری اطلاعات و ارتباطات در آموزش خیلی فراتر از توجه به مزایای ظاهری آن است. فناوری اطلاعات و ارتباطات، محیطی فراهم می‌کند تا دانش‌آموزان در کنار معلم بتوانند در محیط‌های شبیه‌سازی شده یا محیط‌های پویا به پرورش برخی از مهارت‌ها در خود بپردازند. نرم‌افزارهایی که در فرایند آموزش ریاضی استفاده می‌شوند را می‌توان به شکل زیر تقسیم کرد:

– نرم‌افزارهای عام مانند Excel که نرم‌افزار آموزش ریاضی نیست، ولی می‌توان از قابلیت آن برای رسم نمودار استفاده کرد.

– نرم‌افزارهای موضوعی مانند نرم‌افزار Mathematica که فقط در حوزه ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

– نرم‌افزارهای پویایی (دینامیک) هندسه، مانند نرم‌افزارهایی چون Geogebra، Geup و Cabri. این دسته نرم‌افزارها با

قابلیت پویایی که دارند می‌توانند امکانات بررسی و تحقیق و تفحص را برای دانش‌آموزان فراهم کنند.

– نرم افزارهای سیستم جبر رایانه‌ای (CAS) مانند Maple که قابلیت انجام محاسبات نمادین را دارند.
– درس افزارها: نرم افزارهایی اند که در راستای برنامه درسی یک درس خاص هستند. در این نرم افزارها سعی می شود تا با بهره گیری از محیط های شبیه سازی شده مجازی و در عین حال بهره گیری از محیط های پویا چون Geogebra برای ایجاد فرصت های مدل سازی، فرضیه سازی و غیره برای پرورش شهود و تجسم و مهارت های دیگر استفاده کرد.

ساختار کتاب ریاضیات ۲

کتاب ریاضیات ۲ مبتنی بر اصول و استانداردهای آموزش ریاضی و متناسب با دانش و سطح درک دانش آموزان، تألیف و ساختار آموزشی خاصی برای آن در نظر گرفته شده است. این کتاب هفت فصل دارد و هر فصل دارای بخش هایی است که هر بخش به آموزش یک مفهوم اختصاص دارد. ساختار هر بخش عموماً دارای قسمت های زیر است:

– طرح یک مسئله یا فعالیت

– جمع بندی و ارائه مثال

– تمرین در کلاس

– مسائل آخر بخش

در برخی از بخش ها، مطالبی با عنوان بیندیشیم، توجه کنید و خواندنی نیز وجود دارد که اهدافی جانبی را دنبال می کنند.
۱– طرح یک مسئله یا فعالیت: هدف از این قسمت، فعال سازی دانش آموزان و درگیر کردن عملی آنها برای ساختن مفاهیم جدید برای خودشان است. معلمان باید با انگیزه بخشی مناسب، دانش آموزان را ترغیب به حل مسئله یا انجام فعالیت کنند تا دانش آموزان خودشان آزمون و خطا کنند، حدس بزنند و خودشان مرکز ثقل یادگیری باشند. در اینجا نقش معلم، همراهی، هدایت و تصحیح روند فکری و اشتباهات احتمالی دانش آموزان است.

در صورتی که دانش آموزان با حل یک مسئله درگیرند، راهنمایی های مناسب معلم برای آموزش غیرمستقیم راهبردهای حل مسئله نقش تعیین کننده ای دارد. در این موارد باید اجازه دهید دانش آموزان خود مسئله را حل کرده و احتمالاً طرح های غلطی را دنبال کنند. اگر دانش آموزان به پاسخ صحیح نرسیدند، باید آنها را به بررسی کارهای خود راهنمایی کنید تا ببینند چه کارهای جدیدی می توانند انجام دهند و دوباره تلاش خود را شروع کنند. در صورت نیاز می توانید توجه دانش آموزان را به مسائل مشابه، ترسیم شکل و سرنخ های دیگر جلب کنید.

هنگام انجام فعالیت ها، معلمان می توانند با سرکشی به کار دانش آموزان و با توجه به تفاوت های فردی، راهنمایی های لازم را ارائه دهند. برای اینکه همه دانش آموزان درگیر انجام فعالیت شوند، معلمان می توانند به طور تصادفی، فرد یا افرادی را انتخاب کرده تا آنها مراحل مختلف انجام یک فعالیت را برای همه دانش آموزان بررسی کنند.

از آنجا که هدف اصلی روش فعالیت محور، ساختن مفاهیم به طور فعالانه توسط دانش آموزان است، معلمان می توانند با توجه به اهداف هر فصل، خودشان فعالیت های جدیدی را طرح و در کلاس اجرا کنند.

۲– جمع بندی و ارائه مثال: در پایان هر فعالیت، یک مسئله برای آموزش طرح شده است، معلم باید یک جمع بندی از نتایج به دست آمده ارائه کند تا آموزش مفهوم کامل شود. سپس با ارائه مثال های متنوع مرتبط با مفهوم مورد نظر (به فراخور سطح کلاس)، به تعمیق آموزش کمک کند.

۳– تمرین در کلاس: هدف از تمرین در کلاس ها آن است که با حضور معلم، دانش آموزان درک خود را از آموزش انجام شده به نمایش بگذارند تا معلم در صورت وجود بدفهمی، با راهنمایی های خود، آن را اصلاح کند.

همچنین، این بخش از آموزش در تثبیت و تعمیق درک دانش‌آموزان از مطالب، نقش مهمی دارد. در این بخش نیز همانند بخش فعالیت‌ها، دانش‌آموزان باید خودشان روی مسائل کار کنند و با راهنمایی معلمان به نتایج مورد نظر برسند. تفاوت اصلی «فعالیت» و «تمرین در کلاس» در آن است که در «فعالیت» مفهوم جدیدی در حال آموزش است ولی در «تمرین در کلاس» مفهوم جدیدی وجود ندارد و آموخته‌های قبلی مورد آزمایش قرار می‌گیرند.

۴- مسائل آخر بخش: در قسمت انتهایی بیشتر بخش‌ها یا انتهای هر فصل، مسائلی طراحی شده است که هماهنگ با اهداف آن بخش یا آن فصل است. این مسائل برای کار در منزل دانش‌آموزان است. دانش‌آموزان باید به طور مستقل روی این مسائل کار کرده، نتایج آن را در جلسات بعدی کلاس مطرح کنند. بهتر است که در مسائل چالش برانگیز که نیازمند تفکر و فهم دقیق مفاهیم است، یکبار در پی پاسخ صحیح نباشیم تا در طی فرایند با سعی، خطا و بازنگری به پاسخ نهایی برسیم. حتی در مسائلی که جنبه محاسباتی با نمادها را دارد، لازم است دانش‌آموزان عملیات محاسباتی خود را به نمایش بگذارند و برای هر عمل محاسباتی خود، دلیل ارائه کنند.

کتاب راهنمای معلم، شامل بخش‌های زیر است:

- ۱- **اهداف کلی:** در ابتدای هر فصل و هر بخش اهداف اصلی موضوع و مطالب درسی و فعالیت‌ها بیان می‌شوند.
- ۲- **اهداف آموزشی رفتاری:** محتوای کتاب درسی از قسمت‌های مختلفی تشکیل شده است که لازم است اهداف آموزشی در قالب اهداف رفتاری بیان شوند تا مشخص شود در پایان تدریس، دبیران از دانش‌آموزان چه انتظاراتی باید داشته باشند.
- ۳- **پیش‌نیازها:** مفاهیم و موضوعاتی است که دانستن آنها برای آموزش مفاهیم جدید ضروری است و معلم می‌تواند با یک ارزشیابی اولیه در کلاس درس، از میزان آشنایی دانش‌آموزان با آنها آگاه شود.
- ۴- **زمان بندی پیشنهادی برای تدریس:** که می‌تواند راهنمای معلمان محترم برای آموزش مطالب آموزشی در زمان مناسب باشد.

۵- نقشه مفهومی: نقشه‌های مفهومی بازنمایی تجسمی روابط معنادار میان مفاهیم است. نقشه‌های مفهومی اغلب به صورت سلسله مراتبی ارائه می‌شوند، یعنی مطالب کلی‌تر و جامع‌تر در رأس قرار می‌گیرند و هر چه به پایین نقشه نزدیک می‌شویم، مفاهیم و مطالب جزئی‌تر می‌شوند.

۶- دانستنی برای معلم: در تدریس هر بخش، معلمان نیازمند اطلاعات کامل‌تری در خصوص موضوع تدریس هستند تا بتوانند تدریس موفق داشته باشند. در این قسمت معلمان با فضای علمی عمیق‌تری آشنا می‌شوند و در بعضی مواقع با تاریخچه موضوع آشنا می‌شوند.

۷- نگاه کلی به بخش: ارائه دیدگاه مؤلفان کتاب نسبت به هر بخش در این قسمت مطرح شده است.

۸- ورود به مطلب: روش و چگونگی شروع مطلب درسی در این بخش پیشنهاد شده است.

۹- توصیه آموزشی: در هنگام تدریس، نکات ظریفی وجود دارد که در اثر تجربه کسب می‌شود و توجه به آن می‌تواند فرایند تدریس را روان‌تر و بهتر کند که این نکات در قالب توصیه آموزشی آمده است.

۱۰- بپرسید: سؤالاتی که در حین انجام فعالیت‌ها و یا آموزش، توسط معلم مطرح می‌شود تا دانش‌آموزان را به تفکر عمیق‌تر و بازنگری در کارهای انجام شده، هدایت کند.

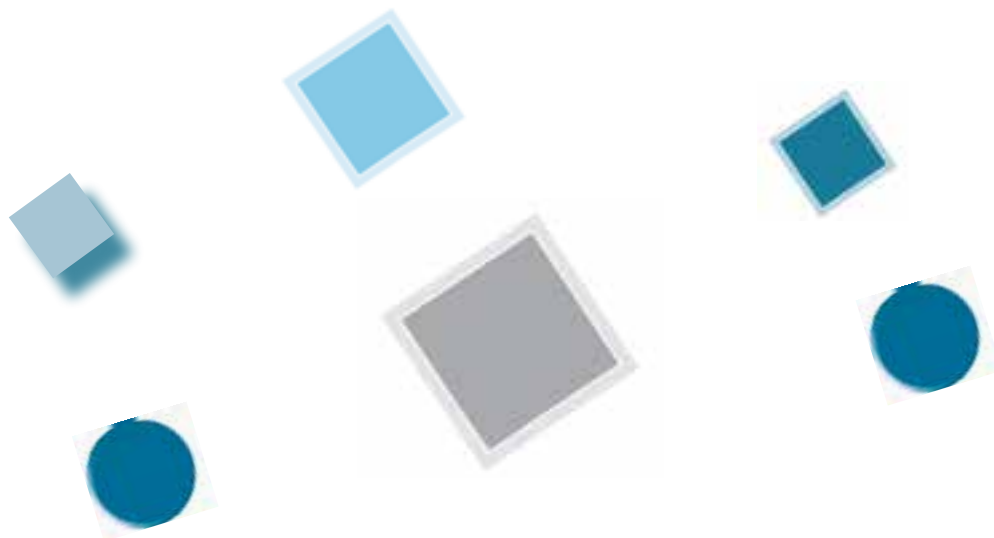
۱۱- جمع‌بندی: بعد از انجام فعالیت‌ها و یا کار در کلاس، چگونگی جمع‌بندی و نتیجه‌گیری موضوع و ایجاد آمادگی برای فعالیت و موضوع بعدی ارائه می‌شود.



بخش

راهنمای تدریس فصل‌های کتاب درسی

ریاضیات (۲)



الگو و دنباله

فصل ۱



نگاه کلی به فصل اول کتاب درسی

اهداف کلی

- ۱- آشنایی با مفهوم دنباله
- ۲- آشنایی با چند نوع دنباله خاص (دنباله‌های حسابی و هندسی)
- ۳- آشنایی با مفهوم اولیه حد دنباله‌ها
- ۴- آشنایی با تقریبات اعشاری اعداد
- ۵- تعمیم مفهوم ریشه‌گیری به ریشه‌های مراتب بالاتر
- ۶- آشنایی با ویژگی‌های اساسی ریشه‌گیری
- ۷- آشنایی با توان‌رسانی با توان اعداد گویا
- ۸- آشنایی با توان‌رسانی با توان اعداد حقیقی

عملکرد مورد انتظار دانش‌آموزان

دانش‌آموزان باید بتوانند:

- ۱- دنباله را بشناسند، آن را تعریف و نمونه‌هایی از آن ارائه کنند.
- ۲- الگوی موجود در برخی از دنباله‌ها را تشخیص دهند و بر اساس آن، سایر جملات آن دنباله‌ها را بنویسند.
- ۳- در برخی از دنباله‌ها، با استفاده از الگوی دنباله، جمله عمومی یا جمله n ام دنباله را حدس بزنند.
- ۴- دنباله‌های حسابی و هندسی را تشخیص دهند و برای هر کدام مثال‌هایی ارائه کنند.
- ۵- در دنباله‌های حسابی و هندسی قدر نسبت و جمله عمومی یا جمله n ام را به دست آورند.
- ۶- جملات مختلف یک دنباله حسابی و هندسی را با استفاده از جمله عمومی، قدر نسبت و جمله اول به دست آورند.
- ۷- با معلوم بودن حداقل دو جمله از یک دنباله حسابی یا هندسی، آن دنباله را مشخص کنند.
- ۸- از دنباله‌های حسابی و هندسی برای حل مسائل مرتبط به درستی استفاده کنند.
- ۹- مفهوم نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد را تشخیص دهند و در موارد ساده آن عدد را بیابند.
- ۱۰- برای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ ، با انجام عمل تقسیم a بر b ، دنباله‌ای از اعداد اعشاری بسازند به طوری که جملات این دنباله به عدد گویای $\frac{a}{b}$ نزدیک شوند.
- ۱۱- برای هر عدد حقیقی (گویا یا گنگ)، دنباله‌ای از اعداد اعشاری به دست آورند که جملات آن رفته رفته به آن عدد نزدیک می‌شوند.
- ۱۲- ریشه k ام اعداد را بشناسند و در حالت زوج و فرد بودن k ، تعداد ریشه‌ها را تشخیص دهند.
- ۱۳- قوانین مربوط به ریشه k ام اعداد را بدانند و مسائل مربوط را به درستی حل کنند.

۱۴- با استفاده از ویژگی‌های اساسی توان‌رسانی با توان اعداد گویا و حقیقی، محاسبات لازم را انجام دهند و مسائل مربوط را حل کنند.

پیش‌نیازها

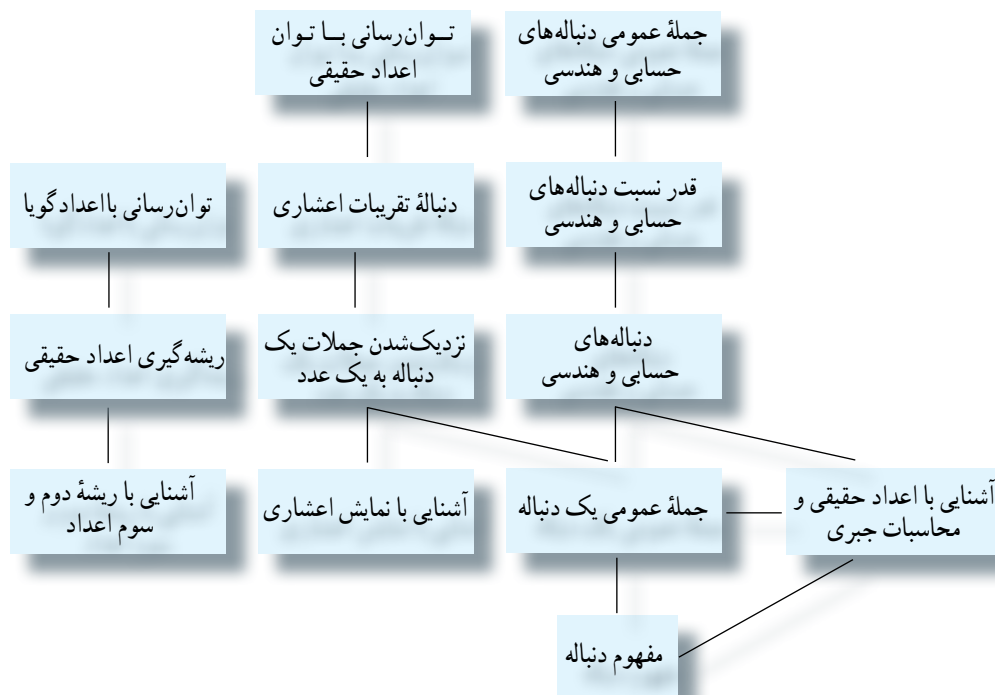
برای ورود به مطالب این فصل لازم است دانش‌آموزان با اعداد و خواص اساسی آنها، محاسبات جبری، ریشه دوم و سوم اعداد و توان‌رسانی اعداد، آشنایی کافی داشته باشند.

زمان‌بندی پیشنهادی برای تدریس این فصل

- جلسه اول
- جلسه دوم
- جلسه سوم
- جلسه چهارم
- جلسه پنجم
- جلسه ششم
- جلسه هفتم
- جلسه هشتم

مفهوم دنباله
 دنباله حسابی
 دنباله هندسی
 ارزشیابی پایانی
 نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد و دنباله تقریبات اعشاری
 ریشه‌گیری اعداد حقیقی و توان‌رسانی با توان اعداد گویا
 توان‌رسانی با توان اعداد حقیقی
 ارزشیابی پایانی

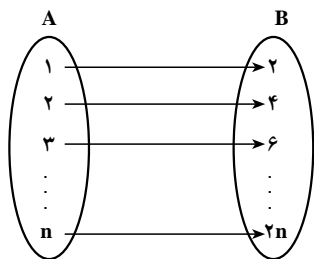
نقشه مفهومی فصل اول کتاب درسی



دانستنی برای معلم

به یک فهرست مرتب شده از اشیاء، دنباله و به هر یک از این اشیاء، یک عنصر یا جمله دنباله می گویند. تعداد این جملات را نیز طول دنباله می نامند.

یک فهرست مرتب شده از تعداد متناهی شیء را یک دنباله متناهی می نامند. به عبارت دیگر، دنباله متناهی با k عضو، تابعی است از مجموعه $N_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ (قطعه‌ای از اعداد طبیعی) به مجموعه اعداد حقیقی در صورتی که به هر عدد صحیح و مثبت n ، یک عدد حقیقی چون a_n نظیر شود، آنگاه مجموعه مرتب شده a_1, a_2, a_3, \dots یک دنباله نامتناهی را تعریف می کند. یک دنباله نامتناهی، تابعی است از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه اعداد حقیقی. بنابراین می توان گفت، یک دنباله، تابعی است که دامنه اش مجموعه اعداد طبیعی یا قطعه‌ای از آن باشد. مجموعه اعداد زوج طبیعی را در نظر بگیرید (مثال صفحه ۵ کتاب درسی) اولین عضو این مجموعه، عدد ۲ و n امین عضو آن $2n$ است. می توان یک تابع از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه اعداد زوج طبیعی را در آن یک عضو از مجموعه اعداد طبیعی را به یک عضو از مجموعه اعداد زوج، متناظر می کند.



تناظر روبه‌رو را می توان به صورت یک جدول نیز نمایش داد.

دامنه	۱	۲	۳	...	N
برد	۲	۴	۶	...	$2n$

این دنباله را می توان بر حسب اندیس جملات آن به صورت صعودی نوشت.

$$a_1 \ 2, \ a_2 \ 4, \ a_3 \ 6, \ \dots, \ a_n \ 2n$$

جملات a_1 تا a_n حتماً لازم نیست با هم متفاوت باشند. قانون نوشتن جملات هر دنباله را می توان از جمله عمومی آن، یعنی a_n به دست آورد. یعنی جمله عمومی دنباله، ضابطه یا قانون دنباله را مشخص می کند. در مثال های زیر داریم:

$$a_n \ n \quad 1, 2, 3, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

$$a_n \ (1)^n \quad 1, 1, 1, \dots$$

البته لازم به ذکر است که همه دنباله ها جمله عمومی ندارند و یا ممکن است بتوان برای یک دنباله چندین جمله عمومی تعریف کرد. به عنوان مثال، تاکنون جمله عمومی برای دنباله اعداد اول تعیین نشده است. همچنین ممکن است یک سری اعداد را به عنوان جملات یک دنباله انتخاب نمود که بتوان میان آنها رابطه ای برقرار کرد و جمله عمومی برای آنها نوشت.

یک دنباله را می توان به روش های دیگر هم نشان داد. به شرطی که بتوان به قانون دنباله پی برد. به عنوان مثال، مقادیر تقریبی

$$1/4, 1/41, 1/414, \dots$$

ریشه دوم عدد ۲ را می توان به صورت دنباله مقابل نوشت:

در اینجا قانون یا جمله عمومی دنباله داده نشده است، ولی روند ریشه گیری در محاسبه $\sqrt{2}$ تا تقریب $\frac{1}{10^n}$ کاملاً مشخص است.

از آنجا که هر دنباله، یک تابع می باشد، می توان حد آن را بررسی کرد. مفهوم نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد به منظور آشنایی اولیه دانش آموزان با مفهوم حد دنباله و مشخص کردن دنباله تقریبات اعشاری یکی از مباحثی است که در این فصل به آن پرداخته خواهد شد.

تعیین حدّ مجموع جملات دنباله هندسی نزولی، تعیین حد طول محیط دایره، مباحث منحنی‌ها و تعیین حجم اجسام در ارتباط با این پرسش است که حد دنباله یعنی چه؟ و شرط کافی برای وجود حدّ دنباله چیست؟

برای پاسخ به این سؤالات، ابتدا لازم است دانش‌آموزان با مفهوم نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد آشنا شوند. برخی دنباله‌ها به گونه‌ای اند که جملات آنها به عدد خاصی نزدیک می‌شوند، که در این صورت می‌گوییم دنباله همگراست؛ به عنوان مثال، دنباله $a_n = \frac{1}{n}$ که جملات آن به صورت

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

هستند، جملات به تدریج به عدد صفر نزدیک می‌شود؛ یعنی هر چه n بزرگ‌تر می‌شود، جمله n ام آن به صفر نزدیک‌تر می‌شود. مسلماً تمام جمله‌های دنباله به صفر خیلی نزدیک نیستند؛ مثلاً اگر $n > 10$ باشد آنگاه $a_n < \frac{1}{10}$ و اگر $n > 100$ آنگاه $a_n < \frac{1}{100}$ می‌باشد؛ یعنی اگر 100 جمله اول این دنباله را کنار بگذاریم، بقیه جمله‌های دنباله که تعدادشان بی‌نهایت است، همگی فاصله‌شان تا صفر در بازه $(0, \frac{1}{100})$ قرار می‌گیرد. پس می‌توانیم بگوییم بقیه جمله‌ها در همسایگی صفر گرد هم می‌آیند. در این شرایط می‌گوییم این دنباله به صفر همگراست و همچنین حد دنباله، عدد صفر است.

یک دنباله مانند $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ همگراست و حد آن برابر عدد 1 است؛ هرگاه فاصله a_n تا 1 از هر عدد مثبتی که بخواهیم کم‌تر شود، به شرط آنکه n به اندازه کافی بزرگ باشد. به عبارت دیگر عدد حقیقی 1 را حد دنباله $\{a_n\}$ می‌نامیم اگر و فقط اگر برای هر عدد حقیقی $\epsilon > 0$ ، عدد طبیعی چون N باشد که برای هر $n > N$ ، فاصله بین $\{a_n\}$ و 1 از ϵ کمتر باشد. یعنی $|a_n - 1| < \epsilon$. در این حالت می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. لازم به ذکر است که حد یک دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است.

از طرف دیگر، این طور نیست که هر دنباله‌ای حد داشته باشد. در بسیاری از دنباله‌ها جمله عمومی آنها به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شود. برای مثال دنباله $\{1\}^n$ که جملات آن به صورت:

$$1, 1, 1, 1, \dots$$

هستند، حد ندارد؛ زیرا جمله‌های این دنباله 1 و -1 هستند و به هیچ عددی نزدیک نمی‌شوند.

تعیین همگرایی یک دنباله و وجود حد دنباله، با استفاده از مفاهیم کرانداری دنباله بررسی می‌شود که در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال بیشتر به این موضوع پرداخته خواهد شد.

مثال، تمرین و مسائل در کتاب به گونه‌ای طراحی شده‌اند که دانش‌آموزان با استفاده از حدس و آزمایش، همگرایی یک دنباله را بررسی کنند.

آموزش بخش‌های فصل اول کتاب درسی

(مفهوم دنباله)

اهداف

- انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند:
- ۱- دنباله را بشناسند، آن را تعریف و نمونه‌هایی از آن ارائه کنند.
 - ۲- الگوی موجود در برخی دنباله‌ها را تشخیص دهند و بر اساس آن سایر جملات آن دنباله‌ها را بنویسند.
 - ۳- در صورت امکان با استفاده از جملات یک دنباله، جمله عمومی یا جمله n ام آن دنباله را حدس بزنند.

پیش‌نیازها

دانش‌آموزان باید با اعداد و خواص اساسی آنها و همچنین با محاسبات جبری آشنا باشند.

نگاه کلی به بخش

در این بخش، دانش‌آموزان با مفهوم دنباله، به عنوان یک توالی از اعداد و یافتن الگوی حاکم بر آنها آشنا می‌شوند. در این تعریف دنباله‌های متناهی و نامتناهی تفکیک نشده‌اند و هر دو نوع دنباله مورد بحث قرار گرفته‌اند. همچنین دانش‌آموزان با جمله عمومی یک دنباله که به صورت کلی a_n نمایش داده می‌شود نیز آشنا می‌شوند. لازم به ذکر است در این کتاب مبحث دنباله‌ها مدخلی برای ورود به مبحث تابع است.

ورود به مطلب: برای آغاز آموزش مفهوم دنباله، می‌توان از مثال‌هایی واقعی مانند پدیده حرکت قاره‌ها که در کتاب درسی به آن اشاره شده است و یا نتایج برخی مسابقات ورزشی مثل نتایج نهایی مسابقات وزنه برداری یا مسابقات دو سرعت، استفاده کرد. در این مثال، اندازه‌گیری سالیانه میزان حرکت قاره‌ها، اعدادی به ما می‌دهد که این اعداد به دنبال هم یک دنباله را تشکیل می‌دهند. بیان مسائل تاریخی یا پدیده‌های طبیعی که در محیط پیرامون دانش‌آموزان رخ می‌دهد و با مفاهیم دنباله مرتبط می‌باشد، می‌تواند انگیزه‌ای برای یادگیری این مفهوم در دانش‌آموزان ایجاد کند.

فعالیت‌های صفحه‌های ۲ و ۴

هدف: آشنا شدن دانش‌آموزان با مفهوم دنباله، جملات دنباله و روند پیدا کردن الگو و یا جمله عمومی برای یک دنباله.

در فعالیت صفحه ۲، دانش‌آموزان به نوشتن جملات دنباله مربوط به اندازه حرکت قاره‌ها طی سالیان مختلف هدایت می‌شوند و در نهایت با تشکیل جدولی که رابطه بین عدد سال و اندازه حرکت قاره‌ها را نشان می‌دهد، خواهند توانست جمله عمومی این دنباله را بیابند. همین روش در فعالیت صفحه ۴ نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد و دانش‌آموزان با هدایت معلم خواهند توانست رابطه بین تعداد مربع‌های هر شکل با شماره آن شکل را بیابند و پس از یافتن الگوی حاکم به این دنباله، سایر جملات این دنباله را پیدا کنند.

پس از انجام فعالیت‌های بالا، تعریف دنباله و جمله عمومی به دانش‌آموزان ارائه می‌شود و سپس با مثال و تمرین در کلاس صفحه ۵، سعی می‌شود تا دانش‌آموزان این مفاهیم را به درستی درک کنند.

توصیه آموزشی

با توجه به اینکه جملات دنباله‌های تمرین در کلاس و اغلب مثال‌های این بخش طوری طراحی شده‌اند که دانش‌آموزان با کمی تأمل و دقت بتوانند جمله عمومی دنباله‌ها را تشخیص دهند، توصیه می‌شود معلمان محترم، دانش‌آموزان را هدایت کنند تا در حل مسائل این چنینی با تشکیل جدولی مانند مثال جدول اندازه حرکت قاره‌ها، مهارت حل مسئله، حدسیه سازی و آزمودن حدس‌ها را در خود تقویت کنند. لازم به ذکر است که دانش‌آموزان باید پس از پیدا کردن قاعده، بتوانند دلیل آن را توضیح داده و سپس قاعده را به سایر جملات تعمیم دهند.

پرسید: آیا با معلوم بودن جملات هر دنباله، می‌توان جمله عمومی آن را پیدا کرد؟

در بعضی موارد با داشتن چند جمله اول یک دنباله، می‌توان جمله عمومی آن را پیدا کرد. اما در بسیاری از مواقع با معلوم بودن چند جمله اول، نمی‌توان جمله عمومی را پیدا کرد. مانند دنباله اعداد اول یا دنباله رقم‌های اعشاری عدد π . آیا می‌توان دنباله‌هایی مثال زد که جملات آنها تغییر نکنند یا به اندازه مقدار ثابتی افزایش یا کاهش یابند؟ با پاسخ به این سؤال، علاوه بر اینکه می‌توان دانش‌آموزان را برای یادگیری مفاهیم دنباله حسابی آماده کرد، رابطه بین مفهوم دنباله و مفاهیم بعدی نیز برای دانش‌آموزان قابل درک خواهد شد.

مسائل صفحه‌های ۵ و ۶

۷- کافی است در جمله عمومی، به جای n ، اعداد طبیعی به ترتیب از عدد یک را قرار دهیم تا جملات دنباله به دست آید.

$$n=1 \rightarrow a_1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{-1+6}{2} = \frac{5}{2}$$

۸- در پایان هفته اول، مبلغ ۸۰۰ تومان در کشوی میز رضا باقی مانده است که در هفته دوم، مبلغ ۱۶۰۰ تومان به آن افزوده شده و تا پایان هفته دوم، نیمی از این مبلغ، یعنی $1200 = \frac{1600+800}{2}$ تومان در کشوی میز باقی خواهد ماند. با توجه به صورت این مسئله، می‌توان جدول زیر را تشکیل داد:

شماره هفته	۱	۲	۳	۴
مقدار پول باقی مانده در پایان هفته	۸۰۰	$\frac{800+1600}{2} = 1200$	$\frac{1200+1600}{2} = 1400$	$\frac{1400+1600}{2} = 1500$

همان‌طور که می‌بینیم، مقدار پول در پایان هر هفته برابر است با نصف حاصل جمع پول باقی مانده از هفته قبل و مبلغ ۱۶۰۰

تومان، بنابراین می‌توان نوشت: $a_{n+1} = \frac{a_n + 1600}{2}$

دنباله حسابی

اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند:

۱- دنباله حسابی را تشخیص دهند و برای آن، مثال ارائه کنند.

- ۲- قدر نسبت یک دنباله حسابی را پیدا کنند.
- ۳- با استفاده از جملات یک دنباله حسابی، جمله عمومی با n ام آن را بنویسند.
- ۴- با استفاده از جمله عمومی یک دنباله حسابی، سایر جملات دنباله را بنویسند.
- ۵- با معلوم بودن حداقل دو جمله از یک دنباله حسابی، دنباله را مشخص کنند.
- ۶- از دنباله حسابی، برای حل مسائل مرتبط به درستی استفاده کنند.

پیش‌نیازها

- ۱- دانش‌آموزان با مفهوم دنباله آشنایی داشته باشند.
- ۲- دانش‌آموزان بتوانند در صورت امکان با استفاده از جملات یک دنباله، جمله عمومی یا جمله n ام آن را بیابند.
- ۳- دانش‌آموزان بتوانند با استفاده از جمله عمومی یا جمله n ام یک دنباله، جملات آن دنباله را بنویسند.

ارزشیابی تشخیصی

- ۱- چند جمله اول دنباله‌ای به صورت زیر است. ساده‌ترین جمله عمومی آن را بیابید.
 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$
- ۲- در دنباله‌ای با جمله عمومی روبرو، پنج جمله اول را بنویسید.
 $a_n = 2^n$

نگاه کلی به بخش

در این بخش دانش‌آموزان با دنباله‌های حسابی یا عددی به عنوان نوع خاصی از دنباله‌ها و برخی خواص این نوع دنباله‌ها همچون قدر نسبت و جمله عمومی یا جمله n ام آشنا می‌شوند و در پایان نیز با مدل‌سازی ریاضی برخی مسائل که در زندگی خود با آن روبه‌رو هستند، یادگیری خود را تعمیق می‌بخشند.

ورود به مطلب: در ابتدای این بخش دانش‌آموزان با یک مسئله واقعی مانند آسیب دیدن یک بازیکن فوتبال و مدت زمان لازم برای بازگشت او به زمین بازی و دنباله حاصل از نوشتن زمان‌های دویدن او برای آمادگی حضور در زمین بازی در هفته‌های متوالی آشنا می‌شوند. معلم می‌تواند از مسائل واقعی دیگری که دانش‌آموزان در زندگی روزمره خود با آن روبه‌رو هستند و پس از مدل‌سازی ریاضی آنها، یک دنباله حسابی به دست آورد و برای ورود به بحث آموزش دنباله حسابی استفاده کند.

فعالیت صفحه ۷

هدف: دانش‌آموزان با ویژگی خاص دنباله حسابی آشنا شوند و ضمن یافتن الگوی حاکم به جملات این دنباله، جملات بعدی، قدر نسبت و جمله عمومی یا n ام این فعالیت را بیابند.

پس از بحث و بررسی پیرامون فعالیت فوق، تعریف دنباله حسابی، جمله اول و قدر نسبت این نوع از دنباله‌ها و روش به دست آوردن جمله عمومی یا جمله n ام یک دنباله حسابی در حالت کلی، در کلاس ارائه می‌شود.

تمرین در کلاس صفحه ۹

هدف: دانش‌آموزان با تشکیل جملات و قدر نسبت این دنباله، نوع دنباله را تشخیص دهند.
 در این تمرین، در هر دقیقه، $\frac{3}{5}$ لیتر آب وارد حوض می‌شود و این حوض از ابتدا ۲۵ لیتر آب داشته است. مقدار آب حوض پس از گذشت یک، دو، سه، چهار و پنج دقیقه یک دنباله حسابی به صورت زیر می‌سازد:

$$28/5, 32, 35/5, 39, 42/5$$

که با استفاده از روابط گفته شده، می‌توان پاسخ سؤالات مطرح شده را پیدا کرد.

توصیه آموزشی

در پایان این بخش، انتظار می‌رود دانش‌آموزان با درک مفهوم دنباله حسابی بتوانند مسائل مرتبط با این نوع دنباله‌ها را حل کنند، بنابراین، به معلمان توصیه می‌شود با ارائه مسائل و تمرین‌های بیشتری که نشان‌دهنده اهمیت این نوع دنباله‌ها در زندگی روزمره باشد، به تعمیق و کاربردی کردن و فهم بهتر این مطالب کمک کنند. در پایان نیز بهتر است با ذکر مثال‌هایی که منجر به تولید یک دنباله هندسی می‌شوند، دانش‌آموزان را برای ورود به بخش بعدی آماده کرد.

پرسید: آیا با معلوم بودن جمله عمومی یک دنباله، می‌توان تشخیص داد که این دنباله یک دنباله حسابی است؟ این سؤال با مسئله ۳ صفحه ۹ ارتباط دارد. در واقع دانش‌آموزان در تعریف صفحه ۷ آموخته‌اند که قدر نسبت یک دنباله حسابی، مقدار ثابتی است که به هر جمله دنباله اضافه می‌شود تا جمله بعدی به دست آید، بنابراین، در یک دنباله حسابی، تفاضل جمله n ام و $(n-1)$ ام مقدار ثابتی است که همان قدر نسبت است.

مسائل صفحه های ۹ و ۱۰

۳- شکل کلی یک دنباله حسابی به صورت زیر است: $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+(n-1)d, \dots$

که در آن $a_n = a + (n-1)d$ و $a_{n-1} = a + (n-2)d$

بنابراین $a_n - a_{n-1} = a + (n-1)d - (a + (n-2)d) = a + (n-1)d - a - (n-2)d = d$

این مقدار ثابت، همان قدر نسبت است.

۸- شکل کلی یک دنباله حسابی به صورت زیر است: $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+(n-1)d, \dots$

که با ضرب این جملات در عدد ثابتی مانند c ، جملات دنباله به صورت زیر در می‌آیند:

$ca, ca+d, ca+2d, ca+3d, \dots, ca+(n-1)d, \dots$

دنباله فوق دنباله‌ای است حسابی با جمله اول ca و قدر نسبت cd

۹- اگر زاویه‌های مثلث ABC را به ترتیب از کوچک به بزرگ $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ بنامیم، با توجه به اینکه در مسئله گفته شده است این

جملات یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند، می‌توانیم بنویسیم: $2\hat{B} = \hat{A} + \hat{C}$

از طرفی می‌دانیم: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ ، بنابراین، $3\hat{B} = 180^\circ$ و نتیجه می‌شود $\hat{B} = 60^\circ$

۱- با توجه به اینکه طول ضلع کوچک این مثلث یک واحد است و از طرفی طول اضلاع این مثلث به ترتیب از کوچک به بزرگ

تشکیل یک تصاعد حسابی را می‌دهند بنابراین، اگر قدر نسبت این تصاعد حسابی d باشد، طول اضلاع مثلث به شکل دنباله $1, 1+d, 1+2d$ خواهند بود. از طرفی چون مثلث قائم‌الزاویه است و اندازه‌وتراین مثلث $1+2d$ است، بنابراین، می‌توانیم بنویسیم $(1+2d)^2 = (1+d)^2 + 1^2$.

پس از حل این معادله درجه دوم، پاسخ $d = \frac{1}{3}$ به دست خواهد آمد، بنابراین طول اضلاع مثلث عبارت‌اند از $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$.

اگر طول ضلع کوچک مثلث a باشد، برای به دست آوردن طول اضلاع مثلث، همانند روش فوق عمل می‌کنیم، یعنی کافی است

$a, a+d, a+2d$

در دنباله حسابی روبه‌رو، مقدار d را به دست آوریم

$a, \frac{4}{3}a, \frac{5}{3}a$

که در پایان، پاسخ مورد نظر، دنباله روبه‌رو خواهد بود.

دنباله هندسی

اهداف

- انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند:
 - دنباله هندسی را تشخیص دهند و برای آن، مثال ارائه کنند.
 - قدر نسبت یک دنباله هندسی را پیدا کنند.
 - با استفاده از جملات یک دنباله هندسی، جمله عمومی یا n ام آن را بنویسند.
 - با استفاده از جمله عمومی یک دنباله هندسی، جملات آن دنباله را بنویسند.
 - با معلوم بودن حداقل دو جمله از یک دنباله هندسی، دنباله را مشخص کنند.
 - از دنباله هندسی برای حل مسائل مرتبط به درستی استفاده کنند.

پیش‌نیازها

- دانش‌آموزان به طور کلی با مفاهیم دنباله و جمله عمومی و روش یافتن جمله عمومی در برخی دنباله‌ها و همچنین نوشتن جملات یک دنباله با استفاده از جمله عمومی آشنایی داشته باشند.
- دانش‌آموزان با مفاهیم دنباله حسابی و قدر نسبت و جمله عمومی در این نوع دنباله‌ها آشنایی داشته باشند.

ارزشیابی تشخیصی

- آیا دنباله روبرو حسابی است؟ $1, 2, 3, \dots$ و $1, 2, 4, 8, \dots$
- دنباله حسابی $1, 6, 11, 16, \dots$ چند جمله دارد؟

نگاه کلی به بخش

در این بخش، دانش‌آموزان پس از یادگیری دنباله حسابی و برخی ویژگی‌های آن، با نوع دیگری از دنباله‌ها، به نام دنباله هندسی و برخی خواص این نوع از دنباله‌ها مانند قدر نسبت و جمله عمومی آشنا می‌شوند و در پایان نیز به حل مسائلی می‌پردازند که به تعمیق بیشتر مفاهیم کمک خواهد کرد.

ورود به مطلب: آموزش مفاهیم مرتبط با دنباله هندسی با طرح مسئله زمین خوردن یک توپ و به هوا رفتن آن به دفعات مختلف آغاز می‌شود. معلمان می‌توانند با طرح مسائل دیگری که دانش‌آموزان در دنیای واقعی با آن روبه‌رو هستند، آموزش این بخش را آغاز کنند. در این گونه مثال‌ها باید دانش‌آموزان تفاوت جملات این دنباله‌ها با دنباله‌های حسابی را درک کنند و به این نتیجه برسند که برای حل این گونه مسائل به گونه جدیدی از دنباله‌ها نیاز داریم.

برای ورود به بحث این بخش می‌توان عنوان کرد که ما در دنباله‌های حسابی برای ساختن جملات، عدد ثابتی را به جمله قبلی اضافه یا از آن کم می‌کنیم؛ حال اگر هر جمله را در عدد ثابتی ضرب یا بر عدد ثابتی تقسیم کنیم، دنباله جدید چه نوع دنباله‌ای خواهد بود؟

فعالیت صفحه ۱۰

هدف: دانش‌آموزان با ویژگی خاص دنباله هندسی آشنا شوند و ضمن یافتن الگوی حاکم بر جملات این دنباله، جملات بعدی،

قدر نسبت و جمله عمومی یا n ام این فعالیت را بیابند. معلّمان محترم می‌توانند قبل از این فعالیت، با ارائه مثال‌هایی از دنباله هندسی با قدر نسبت اعداد صحیح، دانش‌آموزان را با این نوع از دنباله‌ها و ویژگی‌های آنها آشنا کنند.

در حل این فعالیت به دنباله‌ای می‌رسیم که جمله اول آن $\frac{6}{100} \times 25$ ، یعنی عدد ۱۵ خواهد بود و سایر جملات از ضرب عدد گویای $\frac{6}{100}$ به عنوان قدر نسبت این دنباله در جمله قبل به دست می‌آیند.

پرسید: با استفاده از مثال صفحه ۱۱، از دانش‌آموزان بپرسید که تفاوت بین دنباله حسابی و هندسی چیست و چگونه می‌توان قدر نسبت را در یک دنباله هندسی به دست آورد. در اینجا می‌توانیم دنباله‌هایی را مثال بزنیم که قدر نسبت آن‌ها عدد یک یا صفر یا یک عدد منفی هستند و از دانش‌آموزان بخواهیم مثال‌های بیشتری در این خصوص ارائه کنند و ویژگی این نوع دنباله‌ها را بیان کنند.

تمرین در کلاس صفحه ۱۱

هدف: پس از آشنایی با مفاهیم دنباله هندسی و قدر نسبت و روش یافتن جمله عمومی یک دنباله هندسی، دانش‌آموزان با حل این تمرین با کمک معلّم و در کلاس درس، درک عمیق‌تری از این مفاهیم پیدا خواهند کرد و در ادامه با تعریف قدر نسبت در دنباله هندسی و شکل کلی جمله عمومی در دنباله هندسی آشنا می‌شوند.

(جمعیت سال قبل) $\times 3\%$ جمعیت سال قبل جمعیت هر سال

$$50 \times (1 + 0.03) \quad 50 \times (1 + 0.03) \times 0.03 \quad 50 \quad \text{جمعیت سال دوم}$$

$$\text{جمعیت سال دوم} = \frac{(1 + 0.03) \times 50}{0.03} = 1703$$

جمعیت سال دوم، 1703 برابر جمعیت سال اول است.

(جمعیت سال دوم) $\times 0.03$ جمعیت سال دوم جمعیت سال سوم

جمع‌بندی

پس از آموزش مفاهیم کلی دنباله، دنباله هندسی و حل مسائل صفحه‌های ۱۲ و ۱۳ کتاب درسی، می‌توان به تفاوت‌های دنباله حسابی و هندسی اشاره مجددی داشت و در نهایت با ارائه مسائلی اضافی، دانش‌آموزان را در تثبیت و تعمیق مفاهیم آموزش داده شده یاری کرد.

مسائل صفحه‌های ۱۲ و ۱۳

۷- شعاع اولین دایره را r می‌نامیم. بنابراین، مساحت اولین دایره، πr^2 است، یعنی $S_1 = \pi r^2$. در مرحله دوم دو دایره با شعاع

$\frac{r}{4}$ داریم که مساحت آنها $\pi(\frac{r}{4})^2 + \pi(\frac{r}{4})^2$ خواهد بود، یعنی $S_2 = \frac{1}{4}\pi r^2$. در مرحله سوم ۴ دایره داریم که شعاع هر یک از آنها $\frac{r}{4}$ است و مجموع مساحت آنها $4 \times \pi(\frac{r}{4})^2$ ، یعنی $S_3 = \frac{1}{4}\pi r^2$ خواهد بود.

در هر مرحله، تعداد دایره‌ها دو برابر تعداد دایره‌های مرحله قبل و شعاع آنها نصف شعاع دایره‌های مرحله قبل است. بنابراین،

شعاع دایره‌ها یک دنباله به شکل زیر تشکیل می‌دهند:

$$r, \frac{1}{4}r, \frac{1}{4}r, \frac{1}{8}r, \dots$$

و تعداد دایره‌ها یک دنباله به صورت $1, 2, 4, 8, \dots$ خواهد بود.

بنابراین، در مرحله n ام، شعاع دایره‌ها $\frac{1}{4^{n-1}}r$ و تعداد آنها 2^{n-1} است و مجموع مساحت آنها $2^{n-1} \times \pi(\frac{r}{4^{n-1}})^2$ است.

یعنی:

$$\pi r^2, \frac{1}{4} \pi r^2, \frac{1}{9} \pi r^2, \dots, \frac{1}{n^2} \pi r^2, \dots$$

بنابراین دنباله فوق، یک دنباله هندسی با جمله اول πr^2 و قدر نسبت $\frac{1}{4}$ است.

۸- شکل کلی یک دنباله هندسی به صورت کلی $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$ است، حال اگر جملات دنباله را در عدد b ضرب

کنیم دنباله جدید به شکل روبه‌رو خواهد بود:

این دنباله، یک دنباله هندسی با جمله اول ab و قدر نسبت q است.

۹- شکل کلی یک دنباله هندسی به صورت کلی $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$ است. حال اگر جملات دنباله را به توان دو برسانیم،

دنباله جدید به شکل $a^2, a^2q^2, a^2q^4, \dots, a^2q^{2n-2}, \dots$ خواهد بود. این دنباله، یک دنباله هندسی با جمله اول a^2 و با قدر نسبت q^2 است.

۱۰- فرض کنید دنباله‌ای هم حسابی و هم هندسی باشد. پس این دنباله به صورت زیر است:

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$$

و چون دنباله فوق، یک دنباله حسابی نیز هست، بنابراین، تفاضل دو جمله متوالی باید مقداری ثابت باشد. تفاضل جملات

متوالی دنباله فوق به صورت زیر است:

$$a(q-1), aq(q-1), aq^2(q-1), \dots$$

بنابراین، مقادیر فوق باید با هم مساوی باشند؛ یعنی $a(q-1) = aq(q-1)$

تساوی فوق در حالی برقرار است که $a \neq 0$ یا $q = 1$. در حالت $a \neq 0$ ، دنباله به شکل دنباله ثابت $0, 0, 0, \dots$ خواهد بود که

دنباله‌ای است حسابی، با قدر نسبت صفر و دنباله‌ای است هندسی با قدر نسبت هر عدد دلخواه و در حالت $q = 1$ ، دنباله به شکل دنباله

ثابت a, a, a, \dots خواهد بود که دنباله‌ای است حسابی با قدر نسبت صفر و دنباله‌ای است، هندسی با قدر نسبت یک.

$$\begin{cases} a_4 a_3 = 4 \\ a_3 a_5 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \times (a \times q^2) = 4 \\ (a \times q^2) \times (a \times q^4) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 q^2 = 4 \\ a^2 q^6 = 16 \end{cases} \quad \text{۱۱-}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 q^2}{a^2 q^6} = \frac{4}{16} \Rightarrow q^4 = 4 \Rightarrow q = \pm \sqrt{2}, a = \pm \sqrt{2}$$

نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد

اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند:

۱- مفهوم نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد را تشخیص دهند و در موارد ساده آن عدد را بیابند.

۲- برای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ ، با انجام عمل تقسیم a بر b ، دنباله‌ای از اعداد اعشاری بسازند به طوری که جملات این دنباله،

به عدد گویای $\frac{a}{b}$ نزدیک شوند.

پیش‌نیازها

دانش‌آموزان باید با دنباله‌ها و خواص آنها آشنا باشند.

ارزشیابی تشخیصی

در دنباله هندسی زیر، قدر نسبت را پیدا کنید:

$$\frac{a-b}{a+b}, a-b, a^2-b^2$$

نگاه کلی به بخش

در این بخش، دانش‌آموزان با مفاهیم اولیه حد دنباله‌ها بدون آنکه مستقیماً نامی از آن برده شود، آشنا می‌شوند و بیشتر به نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد خاص اشاره می‌شود. این بخش در سال‌های بعد با تدریس مفهوم حد تکمیل خواهد شد. ورود به مطلب: همان‌طور که می‌دانیم، همه دنباله‌های حسابی و هندسی به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند. بنابراین، برای آغاز آموزش این بخش بهتر است از دنباله‌هایی استفاده کنیم که به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؛ به عنوان مثال، در دنباله $0, 0.1, 0.01, 0.001, \dots$ این سؤال را مطرح می‌کنیم که جملات این دنباله چگونه تغییر می‌کنند؟ و آیا می‌توانیم حدس بزنیم که جملات این دنباله به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ برای فهم بهتر دانش‌آموزان می‌توان چند مثال دیگر نیز در کلاس ارائه کرد تا با انگیزه و آمادگی بیشتری آماده ورود به بحث شوند.

توصیه آموزشی

با توجه به اینکه دانش‌آموزان با مفاهیم اولیه دنباله‌ها آشنا شده‌اند، می‌توان رویکرد آموزشی اکتشافی نیمه هدایت شده را در گروه‌های کوچک دانش‌آموزی برای انجام فعالیت مربوط به کار برد به طوری که دانش‌آموزان پاسخ‌های خویش را با یکدیگر در میان دهند و مقایسه کنند و در پایان به نتیجه‌گیری بپردازند.

فعالیت صفحه ۱۳

هدف: دانش‌آموزان بتوانند برای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ ، با انجام عمل تقسیم و نوشتن دنباله‌ای از اعداد اعشاری در هر مرحله تقسیم، تشخیص دهند که جملات آن به عدد گویای $\frac{a}{b}$ نزدیک می‌شود. در تقسیم عدد ۱ بر ۳، خارج قسمت‌ها تا ۱ رقم، ۲ رقم، ۳ رقم و ۴ رقم اعشار، دنباله زیر را می‌سازند:

$$0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, \dots$$

حال اگر این اعداد را از $\frac{1}{3}$ کم کنیم، اعداد زیر به دست می‌آیند.

$$\frac{1}{3} - 0.3 = \frac{1}{30} = \frac{0.1}{3}$$

$$\frac{1}{3} - 0.33 = \frac{1}{300} = \frac{0.01}{3}$$

$$\frac{1}{3} - 0.333 = \frac{1}{3000} = \frac{0.001}{3}$$

بنابراین شش جمله دنباله تفاضل‌ها به شکل زیر خواهد بود :

$$\frac{0}{3}, \frac{0/0}{3}, \frac{0/00}{3}, \frac{0/000}{3}, \dots$$

همان‌طور که می‌بینیم، صورت کسرهای جملات دنباله فوق به عدد صفر نزدیک می‌شوند، بنابراین، خود کسرها نیز به سمت صفر نزدیک می‌شوند. می‌توان گفت با توجه به اینکه جملات دنباله تفاضل به عدد صفر نزدیک می‌شوند، جملات دنباله اصلی، یعنی دنباله $\frac{0}{3}, \frac{0/0}{3}, \frac{0/00}{3}, \frac{0/000}{3}, \dots$ نزدیک می‌شوند.

توصیه آموزشی

در فعالیت قبل دیدیم که جملات دنباله تقریبات اعشاری $\frac{1}{3}$ به عدد $\frac{1}{3}$ نزدیک می‌شود؛ یعنی این دنباله همگراست و حد آن $\frac{1}{3}$ است. البته بیان مفهوم همگرایی و مفهوم حد به صورت بیان ریاضی جزء اهداف آموزشی این کتاب نیست. به طور کلی جملات تقریبات اعشاری هر عددی مانند a ، به خود a نزدیک می‌شود و این نزدیک شدن به گونه‌ای است که فاصله تقریبات اعشاری a از هر عددی کوچک‌تر می‌شود و این به معنای نزدیک شدن جملات به a می‌باشد؛ به منظور درک این فرایند و مفهوم بهتر است دانش‌آموزان برای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ طی چند مثال، ابتدا دنباله‌ای از خارج قسمت‌های به دست آمده در هر مرحله را تعیین و سپس هر جمله را از عدد گویا کم کنند و با توجه به اینکه تفاضل به صفر نزدیک می‌شود، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. توسعه دهید: جملات یک دنباله ثابت به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ به این سؤال در مثال دوم صفحه ۱۴ پرداخته شده است.

نتیجه‌گیری

با انجام تمرین در کلاس صفحه ۱۴، دانش‌آموزان می‌توانند به این نتیجه برسند که برای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ می‌توانیم با انجام عمل تقسیم a بر b در هر مرحله، دنباله‌ای از اعداد اعشاری بسازیم که جملات آن به عدد گویای $\frac{a}{b}$ نزدیک می‌شوند.

دنباله تقریبات اعشاری

اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند:
برای هر عدد حقیقی (گویا یا گنگ)، دنباله‌ای از اعداد اعشاری به دست آورند که جملات آن رفته رفته به آن عدد نزدیک می‌شوند.

پیش‌نیازها

دانش‌آموزان باید با اعداد حقیقی، محور اعداد حقیقی، دنباله‌ها و خواص آنها آشنا باشند.

نگاه کلی به بخش

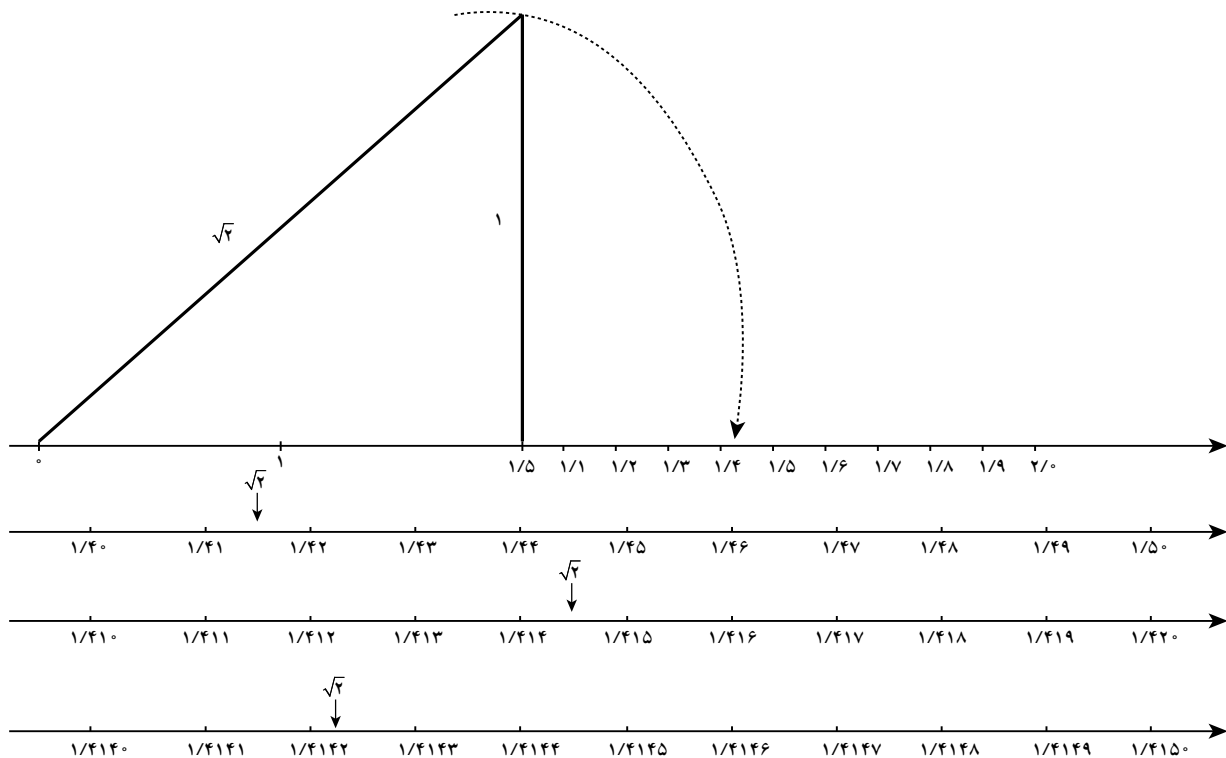
هدف این بخش، ارائه یکی از مفاهیم اساسی اعداد است که دنباله تقریبات اعشاری یک عدد نام دارد. مفهوم نمایش اعشاری در سال قبل گفته شده است ولی در اینجا، این مفهوم به شکل یک دنباله نزدیک شونده به عدد مطرح خواهد شد. تنها مفهوم جدید این

بخش، دیدن تقریبات اعشاری به شکل یک دنباله و درک نزدیک شدن جملات این دنباله به عددی خاص است. در این بخش از رویکرد هندسی برای ارائه مفهوم استفاده شده است و برای هر عدد، با استفاده از محور اعداد با یک الگوریتم مشخص و ساده چگونگی ساختن تقریبات اعشاری ارائه شده است. این روش چه در مورد اعداد گنگ و چه در مورد اعداد گویا یکسان است. در نهایت در مورد اعداد گویا یک روش مستقیم جبری برای محاسبه دنباله تقریبات اعشاری بیان شده است. ورود به مطلب: بهتر است بحث را با محاسبه مقدار تقریبی اعداد داده شده، مانند $\frac{1}{3}$ (اعداد اعشاری) شروع کنید و این پرسش را مطرح کنید که این اعداد تقریباً چند می‌باشند؟ سپس سعی کنید تقریبات بهتری به دانش‌آموزان ارائه کنید و دانش‌آموزان را راهنمایی کنید که ساختن این تقریبات به ساختن یک دنباله می‌انجامد. با توجه به اینکه دانش‌آموزان فراگرفته‌اند که برای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ می‌توان دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخت، درس را با این پرسش آغاز کنید که آیا می‌توان این دنباله را روی محور اعداد نمایش داد؟

فعالیت صفحه ۱۵

هدف: دانش‌آموزان بتوانند برای هر عدد حقیقی a ، دنباله‌ای از اعداد اعشاری به دست آورند که جملات آن به a نزدیک می‌شود. همچنین بتوانند دنباله تقریبات اعشاری هر عدد را با تقسیم محور به ده‌تایی به دست آورند. برسید: با انجام فعالیت صفحه ۱۵، دنباله تقریبات اعشاری $\frac{3}{7}$ به صورت $0/4, 0/42, 0/428, 0/4285, \dots$ به دست می‌آید. با توجه به این، می‌توان این پرسش را مطرح نمود که چه رابطه‌ای بین هر جمله از این دنباله و تعداد رقم‌های اعشاری آن وجود دارد؟ و جمله n ام این دنباله چند رقم اعشار دارد؟ توسعه دهید: با طرح این پرسش که آیا برای اعداد گنگ نیز می‌توان دنباله‌ای از تقریبات اعشاری ساخت؟ بحث دنباله تقریبات اعشاری را توسعه دهید.

به عنوان مثال برای به دست آوردن دنباله تقریبات اعشاری عدد $\sqrt{2}$ مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:



نتیجه گیری

با انجام فعالیت صفحه ۱۵ و تعیین دنباله تقریبات اعشاری برای اعداد گویا و گنگ، نتیجه گیری کلی که برای هر عدد حقیقی مثبت x مطرح شده را بیان کنید. در این نتیجه گیری، بحث حد دنباله‌های همگرا با استفاده از تقریبات اعشاری مطرح می‌شود. لازم به ذکر است اشاره به دنباله‌های همگرا، جزء اهداف آموزشی کتاب نمی‌باشد.

توصیه آموزشی

در این بخش دانش‌آموزان همگرایی یک دنباله را با استفاده از حدس و آزمایش به دست می‌آورند. لازم است سؤالاتی که در این زمینه مطرح می‌شود به گونه‌ای باشد که حدس زدن امکان‌پذیر باشد.

توسعه دهید: برای ارزشیابی درک دانش‌آموزان از مفهوم نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد، می‌توان از دانش‌آموزان پرسید که جملات دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = \frac{n+1}{n}$ به چه عددی نزدیک می‌شود؟ همچنین از دانش‌آموزان بخواهید برای دنباله هندسی مثالی بزنند که جملات آن به عددی نزدیک می‌شوند.

مسائل صفحه ۱۶

۲- در یک دنباله حسابی که به صورت کلی $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d, \dots$ ، اگر $d \neq 0$ ، جملات از نظر قدر مطلق همواره در حال بزرگ شدن هستند و بنابراین جملات این دنباله به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند. اما در حالتی که $d = 0$ باشد، این دنباله به یک دنباله ثابت تبدیل می‌شود و دیدیم که دنباله ثابت با جمله a ، به a نزدیک می‌شود.

$$2x - 1 < 8/1316 \rightarrow 2x < 7/1316 \rightarrow x < 3/5658 \quad \text{—۵}$$

$$4x < 0/4343 \rightarrow 4 \cdot 0/4343 < x \rightarrow 3/5657 < x$$

بنابراین $3/5657 < x < 3/5658$ و چهار جمله اول تقریبات اعشاری x به صورت زیر است:

$$3/5, 3/56, 3/565, 3/5658$$

$$n = \sqrt{2} \rightarrow 1/4 < \sqrt{2} < 1/5 \quad \text{—۶}$$

$$1/4, 1/41, 1/42, \dots$$

ریشه گیری اعداد حقیقی

اهداف

انتظار می‌رود در پایان آموزش این بخش، دانش‌آموزان بتوانند:

- ۱- ریشه k ام اعداد را بشناسند و در حالت زوج و فرد بودن k ، تعداد ریشه‌ها را تشخیص دهند.
- ۲- قوانین مربوط به ریشه k ام اعداد را بدانند و مسائل مربوط را به درستی حل کنند.

پیش‌نیازها

دانش‌آموزان با مفهوم ریشه دوم و سوم اعداد حقیقی آشنایی داشته باشند.