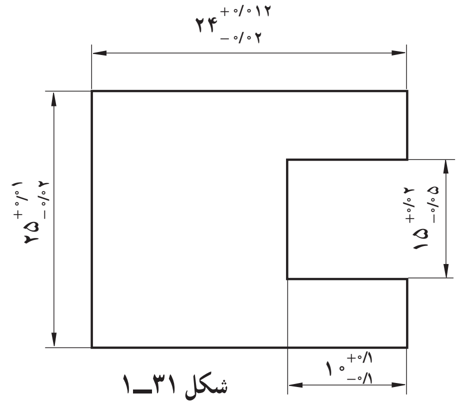
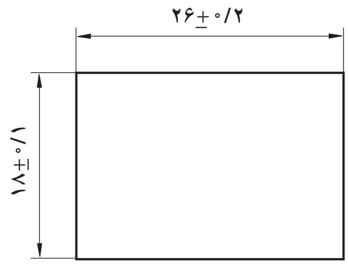
۳ــ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اندازه مجاز در نقشه‌های داده شده را به‌دست آورید.



شکل ۳۱ــ۱



شکل ۳۲ــ۱

۱۱ــ۱ــ جرم

مقدار ماده موجود در هر جسم را جرم آن جسم گویند. واحد جرم در سیستم SI کیلوگرم می‌باشد. یک کیلوگرم تقریباً معادل جرم یک دسی‌متر مکعب آب خالص در دمای ۴ درجه سانتی‌گراد می‌باشد.

اندازه‌گیری جرم: برای اندازه‌گیری جرم یک جسم از ترازوی شاهین‌دار استفاده کرده و برای این منظور جرم مورد اندازه‌گیری را در یک کفه ترازو و جرم نمونه را در کفه دیگر قرار می‌دهند تا تعادل برقرار گردد. با توجه به این‌که نیروی جاذبه وارده از طرف زمین به جرم مورد اندازه‌گیری و جرم‌های نمونه برابر می‌باشد، می‌توان گفت که ترازوی شاهین‌دار جرم جسم را با جرم نمونه مقایسه و اندازه‌گیری می‌کند.

جرم مخصوص (چگالی): ذرات متشکله مواد مختلف به یک اندازه متراکم نبوده بلکه با توجه به نوع ماده می‌توانند با تراکم زیاد و یا کم در کنار یکدیگر قرارگرفته و جسم موردنظر را به‌وجود آورند. بنابر این جرم حجم‌معینی از مواد مختلف با هم متفاوت می‌باشند.

جرم واحد حجم از هر ماده را جرم مخصوص آن ماده گویند.

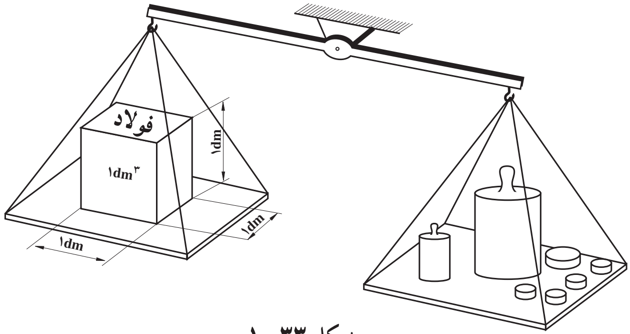
$$\text{جرم مخصوص} = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} \qquad (۱ــ۲۹)$$

واحد جرم مخصوص در سیستم SI کیلوگرم به متر مکعب ($\frac{kg}{m^۳}$) می‌باشد؛ ولی معمولاً آن را برحسب، $\frac{t}{m^۳}$، $\frac{kg}{dm^۳}$، $\frac{g}{cm^۳}$ و $\frac{mg}{mm^۳}$ نیز می‌سنجند. به عنوان مثال جرم مخصوص فولاد

$7850\frac{kg}{m^3}$، $7/85\frac{kg}{dm^3}$، $7/85\frac{g}{cm^3}$ و یا $7/85\frac{t}{m^3}$ می‌باشد.

برای تعیین جرم مواد می‌توان حجم آن‌ها را پیدا کرده و سپس با تعیین جرم مخصوص از جدول مربوطه و با استفاده از رابطه جرم مخصوص، جرم آن‌ها را به‌دست آورد.

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = V \times \rho$$

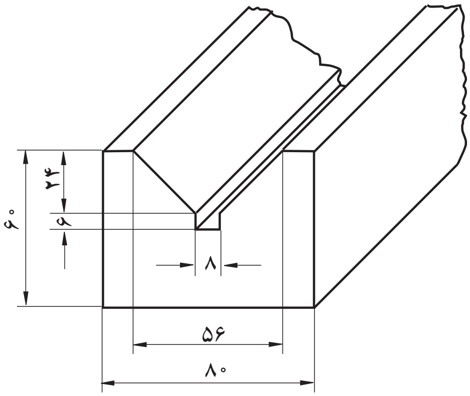


شکل ۳۳ــ۱

جدول ۶ــ۱ــ جرم مخصوص چند ماده برحسب $\frac{kg}{dm^3}$

مایعات		جامدات				گازها	
ماده	جرم مخصوص	ماده	جرم مخصوص	ماده	جرم مخصوص	ماده	جرم مخصوص
آب (۴°C)	۱	چوب آبنوس	۱/۲۶	چدن خاکستری	۷/۲۵	هوا	۱/۲۹
نفت	۰/۸۵	آلیاژهای منیزیم	۱/۸	برنج	۸/۵	اکسیژن	۱/۴۳
بنزین	۰/۷۲	آلومینیم	۲/۷	مس	۸/۹	استیلن	۱/۱۷۱
گازوئیل	۰/۸۵	روی	۷/۱۳	فولاد	۷/۸۵	هیدروژن	۰/۰۹
روغن موتور	۰/۹	قلع	۷/۳	سرب	۱۱/۳۵	ازت	۱/۲۵

مثال: جرم منشوری فولادی به طول ۱۲۰ میلی‌متر با سطح مقطعی مطابق شکل ۳۴ــ۱ را برحسب کیلوگرم حساب کنید.



شکل ۳۴ـ۱

$$m = V \times \rho$$

$$V = Ag \times h$$

$$Ag = A_۱ - A_۲ - A_۳$$

$$A_۱ = L \times b = ۸۰ \times ۶۰ = ۴۸۰۰ \;\; mm^۲$$

$$A_۲ = L_۱ \times b_۱ = ۸ \times ۶ = ۴۸ \;\; mm^۲$$

$$A_۳ = \frac{L_۲ + L_۳}{۲} \times b_۲ = \frac{۵۶ + ۸}{۲} \times ۲۴ = ۷۶۸ \;\; mm^۲$$

$$Ag = ۴۸۰۰ - ۴۸ - ۷۶۸ = ۳۹۸۴ \;\; mm^۲$$

$$V = Ag \times h = ۳۹۸۴ \times ۱۲۰ = ۴۷۸۰۸۰ \;\; mm^۳$$

چون جرم برحسب کیلوگرم خواسته شده است بنابراین لازم است که حجم برحسب دسی‌متر مکعب محاسبه شود.

$$V = \frac{۴۷۸۰۸۰}{۱۰۰۰۰۰۰} = ۰/۴۷۸۰۸ \;\; dm^۳$$

$$m = V \times \rho = ۰/۴۷۸۰۸ \;\; dm^۳ \times ۷/۸۵ \frac{kg}{dm^۳} = ۳/۷۵۲ \;\; kg$$

محاسبه جرم ورق‌ها: حجم ورقی به مساحت یک متر مربع و ضخامت یک میلی‌متر برابر است با یک دسی‌متر مکعب.

بنابراین : جرم ورقی به مساحت یک متر مربع و ضخامت یک میلی‌متر برابر است با جرم مخصوص آن بر حسب $\frac{kg}{dm^۳}$.

برای محاسبه جرم ورق‌ها کافی است مساحت ورق را برحسب متر مربع در ضخامت آن برحسب میلی‌متر ضرب کرده و حاصل را که در اصل همان حجم ورق برحسب دسی‌متر مکعب می‌باشد در جرم مخصوص ضرب نمود.

$$m = A \times S \times \rho \qquad (۱\text{ـ}۳۰)$$

علایم اختصاری:

m = جرم ورق بر حسب کیلوگرم

A = سطح ورق برحسب متر مربع

S = ضخامت ورق بر حسب میلی‌متر

ρ = جرم مخصوص ورق برحسب کیلوگرم بر دسی‌متر مکعب

مثال: جرم ورق آلومینیمی به ابعاد $۱۵۰۰ \times ۳۰۰۰ \times ۲\text{mm}$ را برحسب کیلوگرم حساب کنید ($\rho = ۲/۷ \frac{kg}{dm^۳}$).

$$m = A \times S \times \rho$$

$$A = L \times b = ۳ \times ۱/۵ = ۴/۵ \ \ m^۲$$

$$m = ۴/۵ \times ۲ \times ۲/۷ = ۲۴/۳ \ \ kg$$

برای سهولت محاسبه جرم ورق‌ها، جداولی تهیه شده است که در آن‌ها جرم یک متر مربع ورق برحسب جنس و ضخامت آن داده شده است. بنابر این برای محاسبه جرم ورق‌ها کافی است جرم یک متر مربع از آن‌ها را از جدول به‌دست آورده و در سطح آن‌ها ضرب نمود.

$$m = m_A \times A \qquad (۱\text{ـ}۳۱)$$

علایم اختصاری:

m = جرم قطعه بر حسب کیلوگرم

m_A = جرم یک متر مربع از ورق بر حسب کیلوگرم

A = سطح ورق برحسب متر مربع

در جدول ۶ پیوست جرم برخی از ورق‌های مختلف برحسب $\frac{kg}{m^۲}$ داده شده است.

حال می‌توان مسئله قبل را به کمک جدول ۶ پیوست نیز حل نمود.

$$m = m_A \times A$$

$m_A \Rightarrow$ از جدول ۶ پیوست $= ۵/۴ \frac{kg}{m^۲}$

$A = L \times b = ۳ \times ۱/۵ = ۴/۵ m^۲$

$m = ۵/۴ \times ۴/۵ = ۲۴/۳ \ \ kg$

محاسبه جرم نیمه‌ساخته‌ها: برای سهولت محاسبه جرم نیمه ساخته‌ها (پروفیل‌ها، لوله‌ها، میله‌ها و غیره) معمولاً جرم یک متر از طول آن‌ها را محاسبه و در جداولی گردآوری نموده‌اند. بنابراین برای محاسبه جرم نیمه‌ساخته‌ها کافی است جرم یک متر از آن‌ها را از جدول به‌دست آورده و در طول آن‌ها ضرب نمود.

$$m = m_۱ \times L \qquad (۱\_۳۲)$$

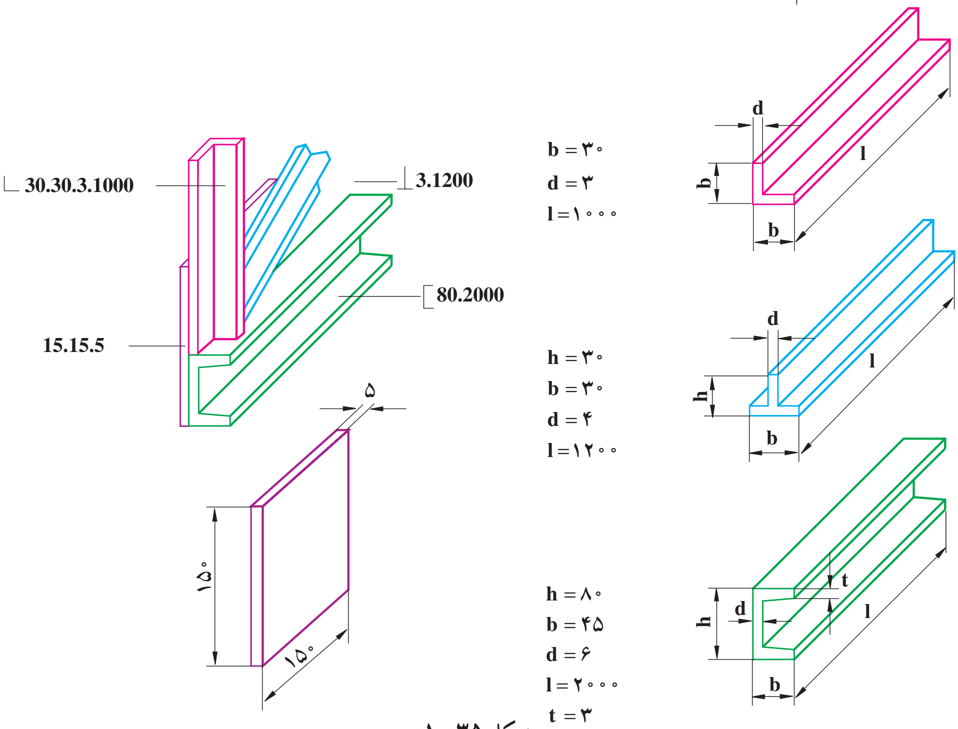
علایم اختصاری:

$m =$ جرم قطعه برحسب کیلوگرم

$m_۱ =$ جرم یک متر برحسب کیلوگرم

$L =$ طول قطعه برحسب متر

مثال: جرم قطعه (a) شکل ۳۵ــ۱ را حساب کنید.



شکل ۳۵ــ۱

حل:

$39/3\ kg \xrightarrow{\text{از جدول ۶ پیوست}}$ جرم یک متر مربع ورق فولادی به ضخامت ۵ میلی‌متر

$1/36\ kg \xrightarrow{\text{از جدول ۹ پیوست}}$ جرم یک متر نبشی فولادی به ابعاد ۳×۳۰×۳۰ میلی‌متر

$1/77\ kg \xrightarrow{\text{از جدول ۹ پیوست}}$ جرم یک متر سپری فولادی به ابعاد ۴×۳۰×۳۰ میلی‌متر

$8/64\ kg \xrightarrow{\text{از جدول ۹ پیوست}}$ جرم یک متر ناودانی فولادی به ابعاد ۶×۴۵×۸۰ میلی‌متر

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$$

$$m_1 = m_A \times A = 39/3 \times \frac{150}{1000} \times \frac{150}{1000} = 0/884\ \ kg$$

$$m_2 = m_L \times L = 1/36 \times \frac{1000}{1000} = 1/36\ \ kg$$

$$m_3 = m_L \times L = 1/77 \times \frac{1200}{1000} = 2/124\ \ kg$$

$$m_4 = m_L \times L = 8/64 \times \frac{2000}{1000} = 17/28\ \ kg$$

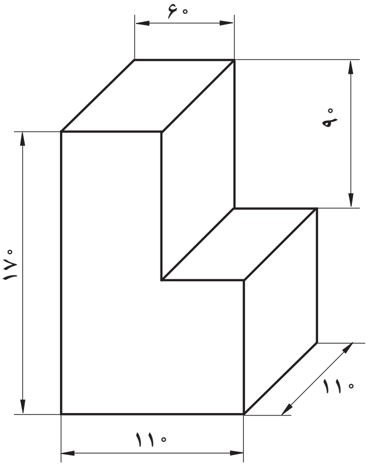
$$m = 0/884 + 1/36 + 2/124 + 17/28 = 21/648\ \ kg$$

تمرین

۱ــ یک قطعه آلومینیمی در شکل نشان داده شده است. حساب کنید :

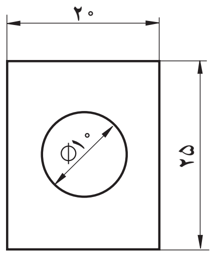
الف) جرم آن‌را برحسب کیلوگرم.

ب) چند قطعه از آن‌را می‌توان به‌وسیله کامیونی با ظرفیت ۳ تن حمل نمود.



شکل ۳۶ــ۱

توجه: در حل تمرینات، جرم مخصوص مواد مورد لزوم را از جدول ۶ ــ ۱ به‌دست آورید.



شکل ۳۷ــ۱

۲ــ مطلوب‌است جرم فلانش نشان داده شده در صورتی‌که جنس آن از چدن خاکستری و ضخامت آن 12mm باشد.

۳ــ حساب کنید جرم ورق‌هایی را که مشخصات آن‌ها در زیر داده شده‌اند :

الف) ورق فولادی به ابعاد ۱۰۰۰×۶۵۰×۲ میلی‌متر .

ب) ورق مسی به ابعاد ۱۲۰۰×۱۴۰۰×۰/۹ میلی‌متر.

ج) ورق آلومینیمی به ابعاد ۱۶۵۰×۸۵۰×۱/۴ میلی‌متر.

۱۲ــ۱ــ وزن (نیروی وزن)

کلیه اجسام به نسبت جرم و فاصله‌ای که نسبت به هم دارند با نیرویی به‌نام نیروی جاذبه به طرف همدیگر جذب می‌شوند ؛ که مقدار آن در اجسامی با جرم کم بسیار ناچیز ولی در اجسامی با جرم زیاد قابل توجه می‌باشد. به‌عنوان مثال کره زمین و همچنین کره ماه به‌دلیل جرم زیادی که دارند اجسام را

با همین نیرو به طرف خود جذب می‌نمایند. بدیهی است چون جرم کره‌زمین نسبت به کره ماه بیشتر است لذا نیروی جاذبه آن بیشتر از نیروی جاذبه کره ماه می‌باشد.

نیرویی را که با آن اجسام جذب کره زمین می‌گردند نیروی وزن می‌نامند.

واحد نیرو و نیروی وزن در سیستم SI نیوتن می‌باشد و آن عبارت از مقدار نیرویی است که بتواند در جسمی به جرم یک کیلوگرم شتابی معادل یک متر بر مجذور ثانیه ایجاد کند.

منظور از شتاب $۱\frac{m}{S^۲}$ عبارت از این است که بر سرعت متحرک در هر ثانیه به مقدار $۱\frac{m}{S}$ اضافه شود.

علایم اختصاری:

$$F = m \times a \qquad (۱\_۳۳)$$

F = نیرو بر حسب نیوتن

m = جرم بر حسب کیلوگرم

a = شتاب جسم برحسب متر بر مجذور ثانیه

$$۱N = ۱kg \times ۱\frac{m}{S^۲}$$

در حل مسایل فنی مقدار شتاب ثقل زمین را معادل $۹/۸۱\frac{m}{S^۲}$ در نظر می‌گیرند.

$$g = ۹/۸۱\frac{m}{S^۲}$$

لازم به تذکر است که نیروی جاذبه نه تنها به اجسام در حال سقوط، بلکه به اجسام در حال سکون نیز اثر می‌نماید. به عنوان مثال صفحه صافی که در روی میز کار قرارگرفته است با شتاب $g = ۹/۸۱\frac{m}{S^۲}$ جذب زمین می‌گردد ؛ ولی چون نمی‌تواند به‌طرف کره زمین حرکت کند به تکیه‌گاه خود (میز کار) نیرویی معادل نیروی وزن خود وارد می‌آورد.

مقدار نیروی وزن اجسام را می‌توان از حاصل‌ضرب جرم قطعه در شتاب ثقل محل استقرار آن به‌دست آورد.

$$W = m \times g \qquad (۱\_۳۴)$$

علایم اختصاری:

W = نیروی وزن جسم برحسب نیوتن

m = جرم جسم بر حسب کیلوگرم

g = شتاب ثقل برحسب متر بر مجذور ثانیه

$$m = V \times \rho$$

$$W = V \times \rho \times g$$

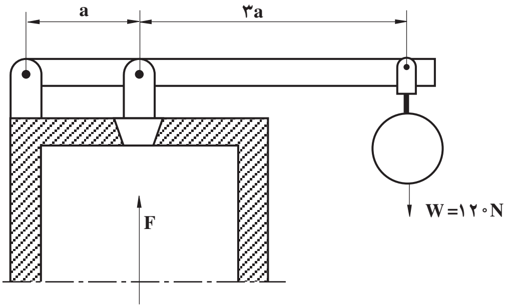
تمرین

۱ــ نیرو و فشار وارد بر کف مخزن استوانه‌ای شکل را در صورتی که قطر آن ۱۲/۵ متر، ارتفاع آن ۹/۸ متر و جرم مخصوص روغن محتوی آن $\rho = ۰/۸۸ \ kg/dm^۳$ باشد حساب کنید.

توجه: فشار عبارت است از نسبت نیرو بر سطحی که نیرو بر روی آن اثر می‌کند.

$$P = \frac{F}{A} \qquad (۱ــ۳۵)$$

۲ــ وزن وزنه سوپاپ اطمینانی بایستی ۱۲۰ نیوتن باشد. در صورتی که وزنه کروی و جنس آن از چدن باشد، قطر آن‌را به‌دست آورید ($g = ۱۰ \frac{m}{S^۲}$).

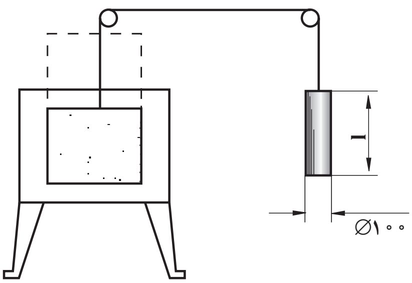


شکل ۳۸ــ۱

۳ــ درِ یک کوره آبکاری به کمک وزنه استوانه‌ای شکلی باز و بسته می‌شود. اگر جرم وزنه مربوطه $m = ۱۸kg$ و جنس آن از فولاد باشد حساب کنید (از اصطکاک قرقره‌ها صرف‌نظر شود).

الف) نیروی کشش سیم متصل به وزنه را برحسب نیوتن اگر $g = ۱۰ \frac{m}{S^۲}$ منظور شود.

ب) طول وزنه را برحسب میلی‌متر.



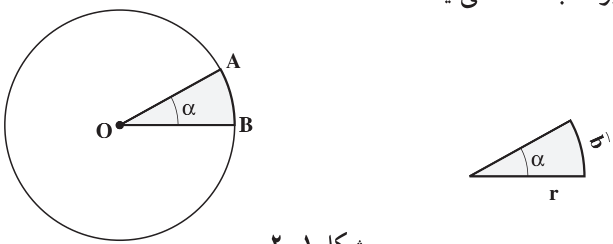
شکل ۳۹ ــ۱

فصل دوم

کاربرد مثلثات

۱ــ۲ــ زاویه

زاویه از تقاطع دو خط پدید می‌آید مقدار هر زاویه از حاصل تقسیم طول قوس مقابل به آن زاویه به شعاع مربوطه به‌دست می‌آید.



شکل ۱ــ۲

علایم اختصاری:

$\alpha =$ مقدار زاویه برحسب رادیان

$\widehat{b} =$ طول قوس مقابل به زاویه

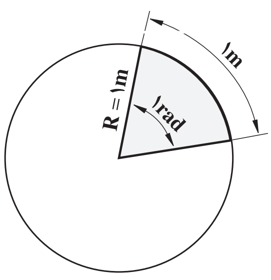
$r =$ شعاع دایره (طول ضلع زاویه)

$$\alpha = \frac{\widehat{b}}{r} \qquad (۱ــ۲)$$

برای نشان دادن زوایا معمولاً از حروف یونانی α (آلفا)، β (بتا)، γ (گاما)، δ (دلتا) و ε (اپیسیلن) استفاده می‌شود.

واحد زاویه: واحد زاویه رادیان (rad) می‌باشد که مقدار آن در دایره‌ای به شعاع یک متر، برابر است با نسبت طول قوسی به‌اندازه یک متر به شعاع آن.

$$1\text{rad} = \frac{1\text{m}}{1\text{m}}$$



شکل ۲ــ۲

مثال: در دایره‌ای به شعاع ۱۰۰ میلی‌متر حساب کنید.
الف) زاویه مقابل به طول قوس $\overset{\frown}{b} = ۱۵۰\,mm$.
ب) زاویه دایره کامل.

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{b}}{r} = \frac{۱۵۰}{۱۰۰} = ۱/۵ \ \ rad$$ (الف

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{b}}{r} = \frac{U}{r} = \frac{۱۰۰ \times ۲ \times ۳/۱۴}{۱۰۰} = ۶/۲۸ \ \ rad$$ (ب

$$\alpha = ۲\pi rad$$

برای اندازه‌گیری زوایا در صنعت از واحد دیگری به‌نام درجه استفاده می‌گردد. یک درجه برابر است با $\frac{۱}{۹۰}$ زاویه قائمه (L) و از آن‌جایی که زاویه قائم برابر $\frac{۱۶}{۲}$ rad می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$۱^\circ = \frac{۱}{۹۰} L = \frac{\frac{\pi}{۲} rad}{۹۰} = \frac{\pi}{۱۸۰} rad$$

$$۱^\circ = \frac{\pi}{۱۸۰} rad \ , \ ۱rad = ۵۷/۳^\circ \qquad (۲\_۲)$$

مثال: زاویه $\alpha = ۳۰^\circ$ را به رادیان تبدیل کنید.

$$۱^\circ = \frac{\pi}{۱۸۰} rad$$

$$\alpha = ۳۰^\circ = ۳۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} rad = \frac{\pi}{۶} rad$$

$$\alpha = ۰/۵۲۳ rad$$

مثال: زاویه $\beta = ۰/۷۳۳۰ rad$ چند درجه است.

$$۱rad = ۵۷/۳۰^\circ$$

$$\beta = ۰/۷۳۳۰ rad = ۰/۷۳۳۰ \times ۱rad = ۰/۷۳۳۰ \times ۵۷/۳^\circ = ۴۲^\circ$$

واحدهای کوچک‌تر درجه عبارتند از دقیقه (′) و ثانیه (″)، که ضریب تبدیل آن‌ها به یکدیگر عدد ۶۰ می‌باشد.

$$۱^\circ = ۶۰' = ۳۶۰۰''$$

$$۱ ثانیه \underset{:۶۰}{\overset{\times ۶۰}{\rightleftarrows}} ۱ دقیقه \underset{:۶۰}{\overset{\times ۶۰}{\rightleftarrows}} ۱ درجه$$

در محاسبات زوایا به مواردی برخورد می‌کنیم که مقدار زاویه به‌صورت کسر اعشاری (مانند $۳۶/۲^\circ$) به‌دست آمده است. در این گونه موارد بهتر است که قسمت اعشاری را به‌واحدهای کوچک‌تر درجه تبدیل نمود.

مسئله: $۴۵/۴^\circ$ را برحسب درجه و اجزاء آن به‌دست آورید.

$$۴۵/۴^\circ = ۴۵^\circ + ۰/۴^\circ = ۴۵^\circ + ۰/۴ \times ۱^\circ = ۴۵^\circ + ۰/۴ \times ۶۰' = ۴۵^\circ,۲۴'$$

مثال: $۶۴/۳۸^\circ$ را برحسب درجه و اجزاء آن به‌دست آورید.

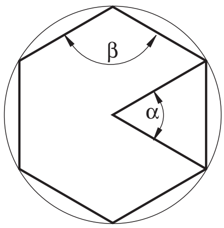
$$۶۴/۳۸^\circ = ۶۴^\circ + ۰/۳۸^\circ = ۶۴^\circ + ۰/۳۸ \times ۶۰' = ۶۴^\circ + ۲۲/۸'$$

$$۶۴^\circ + ۲۲/۸' = ۶۴^\circ + ۲۲' + ۰/۸' = ۶۴^\circ + ۲۲' + ۰/۸ \times ۶۰''$$

$$= ۶۴^\circ + ۲۲' + ۴۸''$$

$$۶۴/۳۸^\circ = ۶۴^\circ,۲۲',۴۸''$$

برای محاسبه زاویه مرکزی مقابل به یک ضلع (α) و همچنین زاویه بین دو ضلع (β) در n ضلعی‌های منتظم از روابط زیر استفاده می‌گردد :



شکل ۳ــ۲

علایم اختصاری:

$\alpha =$ زاویه مرکزی مقابل به یک ضلع در چند ضلعی منتظم (۳ــ۲) $\alpha = \frac{۳۶۰^\circ}{n}$

$n =$ تعداد اضلاع

$\beta =$ زاویه بین دو ضلع در چند ضلعی منتظم (۴ــ۲) $\beta = ۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{n}$

چهار عمل اصلی زوایا

برای حل مسائل مربوط به زوایا در برخی از موارد نیاز به جمع، تفریق، ضرب و تقسیم زاویه‌ها

می‌باشد. روش انجام چهار عمل اصلی در زوایا به شرح زیر می‌باشد :

جمع زاویه‌ها: در جمع زاویه‌ها به ترتیب ثانیه با ثانیه و دقیقه با دقیقه و درجه با درجه جمع می‌شود و باید در نظر گرفت که بازاء هر ۶۰ ثانیه یک واحد به دقیقه و بازاء هر ۶۰ دقیقه یک واحد به درجه اضافه می‌شود.

مثال:

$۳۰^\circ + ۴۰', ۵۰'' + ۲۰^\circ, ۳۰', ۴۰''$

$۳۰^\circ, ۴۰', ۵۰'' +$

$۲۰^\circ, ۳۰', ۴۰''$

$۵۰^\circ, ۷۰', ۹۰'' =$

$۵۰^\circ, ۷۱', ۳۰'' =$

$۵۱^\circ, ۱۱', ۳۰''$

تفریق زاویه‌ها: در تفریق زاویه‌ها به‌ترتیب ثانیه از ثانیه و دقیقه از دقیقه و درجه از درجه کسر می‌شود و باید در نظر گرفت که اگر عدد بالایی ثانیه از عدد پایینی کوچک‌تر باشد ۶۰ ثانیه به عدد بالا اضافه نموده و یک واحد از رقم دقیقه بالایی کم می‌نماییم و به همین ترتیب در مورد دقیقه نیز عمل می‌کنیم.

مثال:

$۶۱^\circ, ۳۴', ۴۲'' - ۳۸^\circ, ۳۶', ۲۷''$

$۶۱^\circ, ۳۴', ۴۲'' -$

$۳۸^\circ, ۳۶', ۲۷''$

$۶۱^\circ, ۳۴', ۴۲'' =$

$۶۰^\circ, ۹۴', ۴'' =$

$۶۰^\circ, ۹۴', ۴۲'' -$

$۳۸^\circ, ۳۶', ۲۷'' =$

$۲۸^\circ, ۵۸', ۱۵''$

ضرب زاویه: زاویه‌ها را در یکدیگر نمی‌توان ضرب کرد ولی زاویه را به منظور چند برابرکردن می‌توان در عددی ضرب کرد بدین ترتیب که عدد را به ترتیب در ثانیه و دقیقه و درجه ضرب کرده و حاصل ضرب را می‌نویسیم درصورتی‌که حاصل ضرب ثانیه و دقیقه بیش‌تر از ۶۰ باشد بازاءِ هر ۶۰ ثانیه اضافی یک واحد به دقیقه و هم‌چنین بازاءِ هر ۶۰ دقیقه اضافی یک واحد به درجه حاصل‌ضرب می‌افزاییم و نتیجه ساده شده را می‌نویسیم.

مثال:

۵ ضرب در $۶۲^\circ, ۳۴', ۵۶''$

$$\underline{(۶۲^\circ, ۳۴', ۵۶'')\times ۵}$$

$$۶۲^\circ \times ۵ = ۳۱۰^\circ$$

$$۳۴' \times ۵ = \quad ۱۷۰'$$

$$۵۶'' \times ۵ = \qquad ۲۸۰''$$

$$\overline{۳۱۰^\circ, ۱۷۰', ۲۸۰''} =$$

$$۳۱۲^\circ, ۵۴', ۴۰''$$

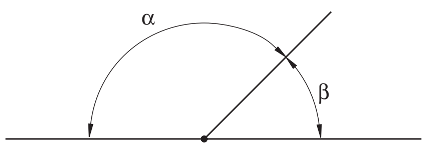
تقسیم زاویه به عدد: زاویه را به یک‌دیگر نمی‌توان تقسیم نمود ولی زاویه را به‌منظور چند قسمت‌کردن به عددی تقسیم می‌کنند بدین ترتیب که ابتدا اندازه زاویه برحسب درجه را به عدد مورد نظر تقسیم می‌کنیم اگر باقی‌مانده‌ای به‌دست آمد آن را در ۶۰ ضرب کرده و با عدد دقیقه‌ی همان زاویه جمع و بر عدد مقسوم‌علیه تقسیم می‌نماییم و این عمل را در مورد دقیقه و ثانیه نیز عمل می‌کنیم.

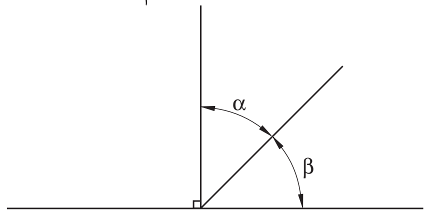
۲ــ۲ــ یادآوری برخی از قضایای هندسی

از آن‌جایی‌که در حل مسایل فنی مربوط به زوایا از قضایای حساب و هندسه نیز کمک گرفته می‌شود، قضایایی را که در حل مسایل این قسمت از آن‌ها استفاده خواهد شد یادآوری می‌نماییم.

۱ــ دو زاویه را متمم یکدیگر گویند در صورتی‌که مجموع زوایای آن‌ها ۹۰ درجه باشد.

۲ــ چنانچه مجموع دو زاویه ۱۸۰° باشد آن دو زاویه را مکمل یکدیگر گویند.

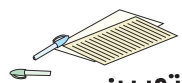




شکل ۴ـ۲

۳ـ مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° و مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی بسته ۳۶۰° می‌باشد.

شکل ۵ـ۲



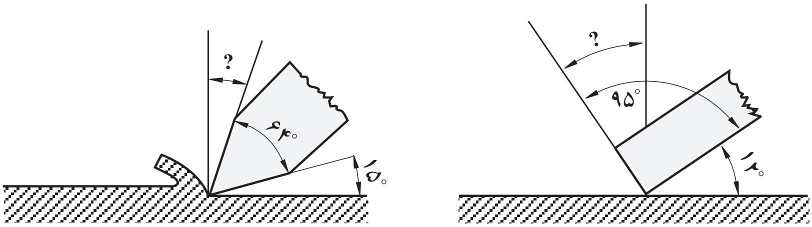
تمرین

۱ـ اندازه زوایای داده شده را برحسب درجه و اجزاء آن مشخص کنید.

الف ـ $۲۷\frac{۱}{۲}^\circ$ ب ـ $۶۲/۶۷^\circ$

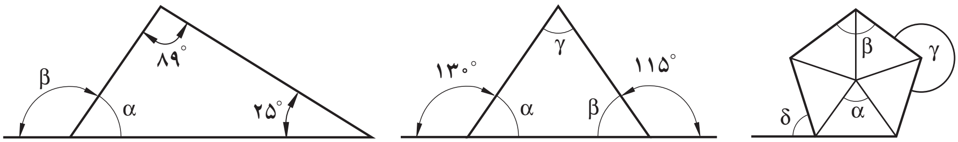
ج ـ $۱۵/۵^\circ$ د ـ $۳۸/۲۳^\circ$

۲ـ از ابزارهای براده برداری داده شده در اشکال صفحه‌ی بعد مقدار زاویه مجهول را به‌دست آورید.



شکل ۶ــ۲

۳ــ زوایای مجهول در اشکال داده شده را به‌دست آورید.



$\alpha = ?$
$\beta = ?$
$\gamma = ?$
$\delta = ?$

شکل ۷ــ۲

۴ــ زاویه مرکزی (α) را برای سوراخ‌کاری فلانش‌هایی با تعداد سوراخ داده شده در جدول به‌دست آورید.

حالت	الف	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط
n	۴	۶	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲

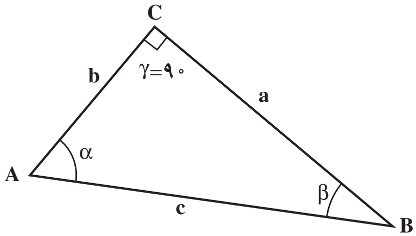
شکل ۸ــ۲

قضیه‌ی فیثاغورث

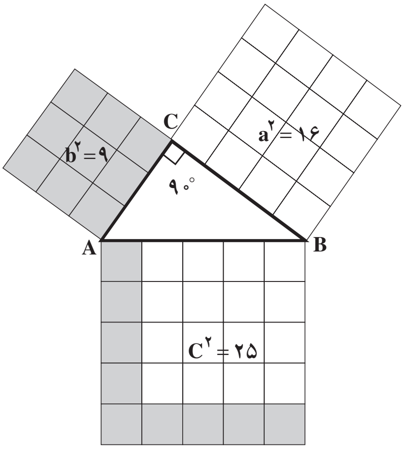
در مثلث قائم‌الزاویه رسم شده زیر A,B,C گوشه‌های مثلث که در آن ($\gamma = ۹۰^\circ$) و a و b دو ضلع مجاور به زاویه قائمه و c ضلع مقابل به زاویه قائمه وتر مثلث می‌باشد که از دو ضلع دیگر طولش بیش‌تر است. با توجه به شکل می‌توان نوشت.

مساحت مربع به ضلع a برابر است با $۱۶ = ۴^۲ = a^۲$

مساحت مربع به ضلع b برابر است با $۹ = ۳^۲ = b^۲$



شکل ۹ــ۲



شکل ۱۰ــ۲

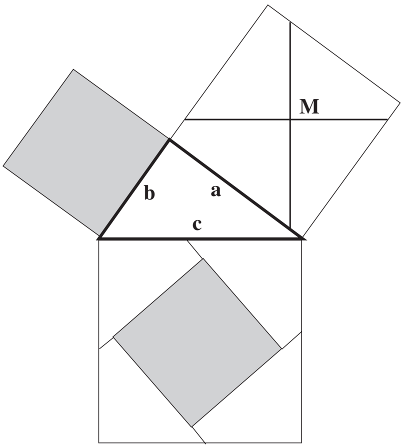
جمع مساحت‌های این دو مربع برابر است با

$a^۲+b^۲=۲۵$

مساحت مربع به ضلع C برابر است با

$c^۲=۵^۲=۲۵$

با توجه به مثال بالا قضیه فیثاغورث را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :



شکل ۱۱ــ۲

قضیه فیثاغورث ۱: در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر

$$\boxed{c^۲=a^۲+b^۲}$$

از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} a^۲=c^۲-b^۲ \\ b^۲=c^۲-a^۲ \end{cases}$$

مثال: در یک مثلث قائم‌الزاویه ضلع مجاور به زاویه قائمه $a=۸۵$ میلی‌متر و وتر آن $c=۱۶۰$ میلی‌متر می‌باشد، حساب کنید.

۱ــ طول سوم (b)

$$b^۲=c^۲-a^۲$$

$$b=\sqrt{۱۶۰^۲-۸۵^۲}$$

$$b=۱۳۵\text{mm}$$

۲ــ مساحت مثلث برحسب سانتی‌مترمربع

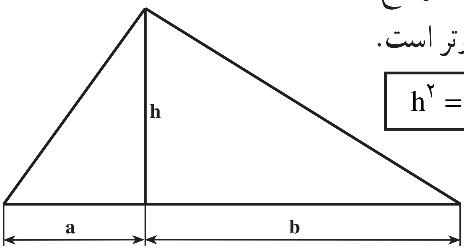
$$A=\frac{g.h}{۲}$$

$$A = \frac{۱۳/۵ \times ۸/۵}{۲}$$

$$A = ۵۷/۳۵\,cm^{۲}$$

قضیه فیثاغورث ۲: در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین دو **قطعه** تقسیم‌شده وتر است.

$$\boxed{h^{۲} = a.b}$$



شکل ۱۲ـ۲

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه شکل۱۳ـ۲ ارتفاع وارد بر وتر (h) را حساب کنید.

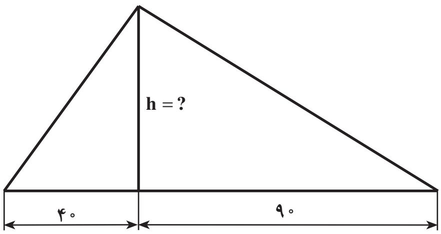
$$h^{۲} = a.b$$

$$h = \sqrt{a.b}$$

$$h = \sqrt{۴۰ \times ۹۰}$$

$$h = \sqrt{۳۶۰۰}$$

$$h = ۶۰\,mm$$



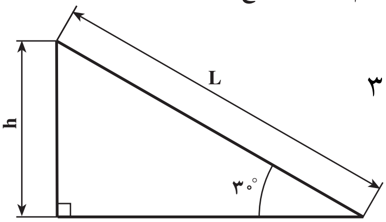
شکل ۱۳ـ۲

قضیه تالس: در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه °۳۰ نصف وتر است.

L ــ وتر مثلث قائم‌الزاویه

h ــ ضلع مقابل به زاویه °۳۰

$$\boxed{h = \frac{۱}{۲}L}$$



شکل ۱۴ـ۲

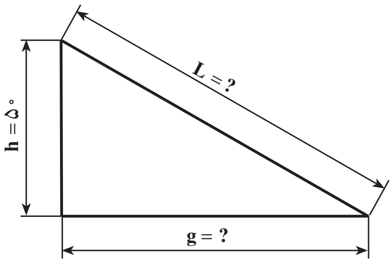
مثال: طول ضلع g را در شکل **۱۵ـ۲** محاسبه کنید.

$$L = ۲h = ۲ \times ۵۰ = ۱۰۰$$

$$g = \sqrt{L^{۲} - h^{۲}}$$

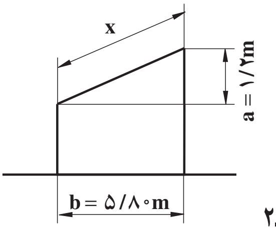
$$g = \sqrt{۱۰۰^{۲} - ۵۰^{۲}}$$

$$g = \sqrt{۷۵۰۰} \Rightarrow g \approx ۸۶/۶$$



شکل ۱۵ـ۲

مثال: برای ساخت سقف گاراژی اندازه X مورد نیاز است. با توجه به ابعاد داده شده اندازه آن‌را به‌دست آورید.



شکل ۱۶ــ۲

حل:

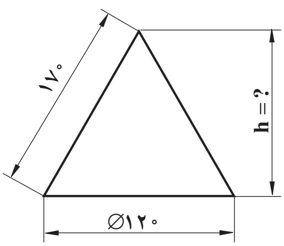
$$x^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$$

$$x = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}} = \sqrt{۱/۲^{۲} + ۵/۸^{۲}} = \sqrt{۳۵/۰۸}$$

$$x = ۵/۹۲m$$

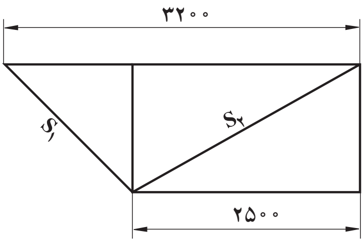
تمرین

۱ــ اندازه ارتفاع مخروط را به‌دست آورید.



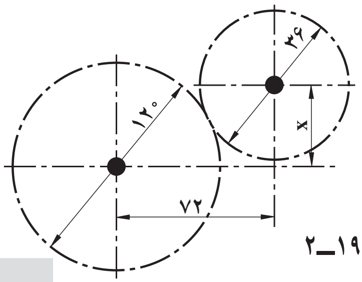
شکل ۱۷ــ۲

۲ــ در خرپای نشان داده شده طول عضوهای $S_۱$ و $S_۲$ را به‌دست آورید.



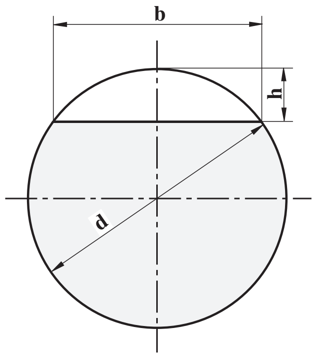
شکل ۱۸ــ۲

۳ــ شکل ۱۹ــ۲ حالت درگیری دو چرخ‌دنده را نشان می‌دهد. در این شکل اندازه x را حساب کنید.



شکل ۱۹ــ۲

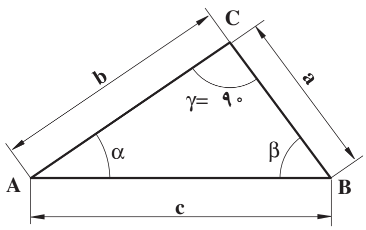
۴ــ قطعه‌ای مطابق شکل زیر از میله‌گردی به قطر $d = 80mm$ ساخته خواهد شد اندازه عمق بار (h) را در صورتی‌که عرض قسمت تخت شده $b = 50mm$ باشد حساب کنید.



شکل ۲۰ــ۲

۳ــ۲ــ روابط مثلثاتی

قبل از پرداختن به روابط مثلثاتی، زوایا و اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه را مطابق شکل ۲۱ــ۲ در نظر می‌گیریم.



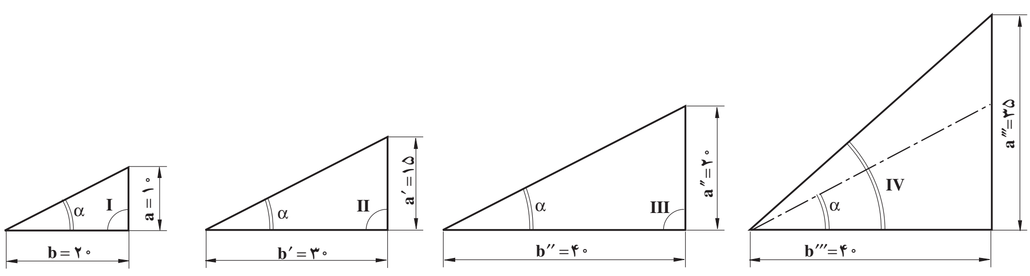
شکل ۲۱ــ۲

$a =$ ضلع مقابل به زاویه α و مجاور به زاویه β

$b =$ ضلع مقابل به زاویه β و مجاور به زاویه α

$c =$ وتر یا ضلع مقابل به زاویه قائمه

روابط بین زوایا و اضلاع در مثلث قائم‌الزاویه: با مقایسه زاویه و اضلاع مثلث‌های شکل ۲۱ــ۲ می‌توان نتیجه گرفت :



شکل ۲۲ــ۲

۱ــ چون زاویه α در مثلث‌های قائم‌الزاویه I و II و III با هم برابر است، نسبت اضلاع آن‌ها نیز با هم برابر خواهند بود.

$$\frac{b}{a}=\frac{۲۰}{۱۰}=\frac{۲}{۱}=۲ \qquad \frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

$$\frac{b'}{a'}=\frac{۳۰}{۱۵}=\frac{۲}{۱}=۲ \qquad \frac{a'}{b'}=\frac{۱۵}{۳۰}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

$$\frac{b''}{a''}=\frac{۴۰}{۲۰}=\frac{۲}{۱}=۲ \qquad \frac{a''}{b''}=\frac{۲۰}{۴۰}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

۲ــ اگر مقدار زاویه α در مثلث III مطابق شکل مثلث IV تغییر کند نسبت اضلاع آن نیز تغییر خواهد کرد.

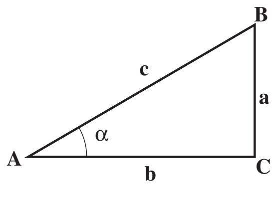
$$\frac{b'''}{a'''}=\frac{۴۰}{۳۵}=\frac{۸}{۷}=۱/۱۴۲ \qquad \frac{a'''}{b'''}=\frac{۳۵}{۴۰}=\frac{۷}{۸}=۰/۸۷۵$$

۳ــ در هر مثلث قائم‌الزاویه برای هر زاویه (مثلاً ۴۲°) نسبت اضلاع معینی وجود داشته و همچنین برای هر نسبت اضلاع معین (مانند $۰/۹=\frac{۹}{۱۰}$) نیز زاویه مشخصی وجود دارد بنابراین:

در هر مثلث قائم‌الزاویه مقدار زوایای α و یا β به نسبت اضلاع بستگی داشته و همچنین نسبت اضلاع آن نیز به مقدار زاویه α و یا β بستگی دارد.

۴ــ در هر مثلث قائم‌الزاویه با داشتن نسبت اضلاع می‌توان مقدار زاویه و همچنین با در اختیار داشتن مقدار زاویه می‌توان نسبت اضلاع را به‌دست آورد.

نسبت‌های اضلاع و وابستگی آن‌ها با زوایا در مثلث قائم‌الزاویه را روابط مثلثاتی می‌نامند. مهم‌ترین روابط مثلثاتی عبارت‌اند از:



شکل ۲۳ــ۲

$$\text{کسینوس}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{b}{c} \qquad (۲ــ۹)$$

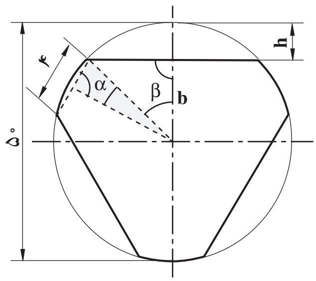
$$\text{سینوس}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{a}{c} \qquad (۲ــ۱۰)$$

$$\text{کتانژانت} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{b}{a} \qquad (۲\text{ـ}۱۱)$$

$$\text{تانژانت} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad (۲\text{ـ}۱۲)$$

از روابط مثلثاتی در حل بسیاری از مسایل فنی استفاده می‌گردد ؛ که در زیر نمونه‌ای از آن‌ها را مشاهده می‌نمایید.

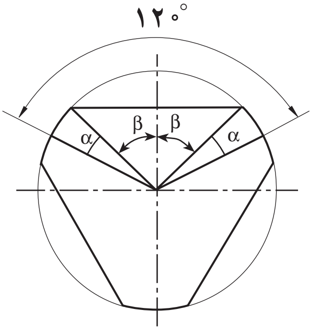
مثال: از میله‌گردی به قطر $d = ۵۰mm$ ، قطعه‌ای مطابق شکل **۲۴ــ۲** ساخته خواهد شد. حساب کنید عمق بار (h) را در صورتی که عرض سطوح تخت شده با هم مساوی باشد.



شکل ۲۴ــ۲

حل: در حل این‌گونه مسایل سعی می‌کنیم با تشکیل مثلث قائم‌الزاویه و استفاده از روابط مثلثاتی مسئله را حل نماییم.

در مسئله با تشکیل مثلث قائم‌الزاویه که در شکل مشخص شده است ؛ ابتدا زاویه α و سپس زاویه β را به‌دست آورده و با استفاده از رابطه کسینوس مسئله را حل می‌کنیم.



شکل ۲۵ــ۲

$$\sin\alpha = \frac{\frac{۴}{۲}}{\frac{۵۰}{۲}} = \frac{۲}{۲۵} = ۰/۰۸ \qquad \text{از جدول سینوس} \Rightarrow \alpha \approx ۴^\circ,۳۰'$$

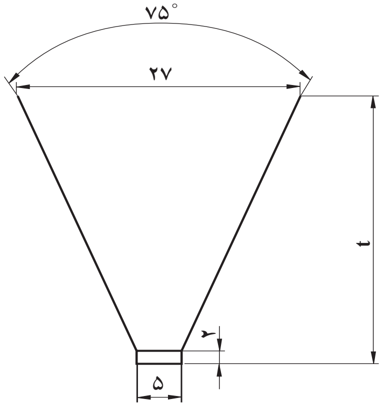
$$\beta = \frac{\frac{۳۶۰^\circ}{۳} - ۲a}{۲} = \frac{۱۲۰^\circ - ۲ \times ۴^\circ,۳۰'}{۲} \approx ۵۵^\circ,۳۰'$$

$$\cos\beta = \frac{b}{r} \Rightarrow b = \cos\beta \times r = ۰/۵۶۶۴ \times ۲۵ \approx ۱۴/۱۶\text{mm}$$

$$h = r - b = ۲۵ - ۱۴/۱۶ = ۱۰/۸۴\text{mm}$$

تمرین

۱ــ عمق بار (t) را برای ساختن منشور مطابق شکل ۲۶ــ۲ حساب کنید.

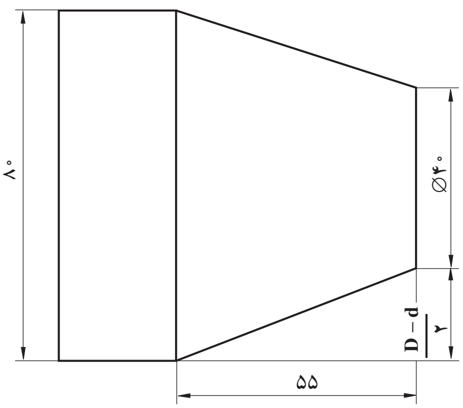


شکل ۲۶ــ۲

۲ــ مخروط ناقص مطابق شکل۲۷ــ۲ مفروض است حساب کنید :

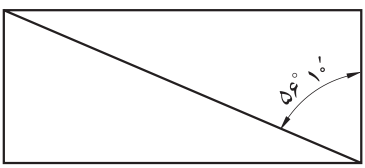
الف) شیب مخروط ($\tan\frac{\alpha}{۲}$).

ب) زاویه شیب ($\frac{\alpha}{۲}$) و همچنین زاویه رأس مخروط.



شکل ۲۷ــ۲

۳ــ طول اضلاع و همچنین قطر مستطیل مطابق شکل۲۸ــ۲ را، در صورتی‌که مساحت آن $۴۷/۴۸m^۲$ باشد حساب کنید.



شکل ۲۸ــ۲