

# بخش سوم

## فصل دوم

### پیوستگی

#### هدف کلی

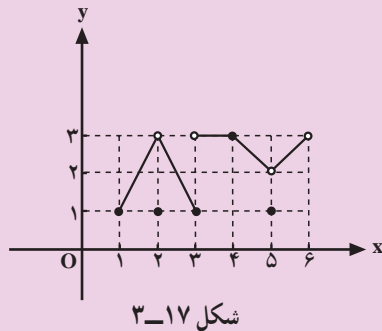
شناسایی توابع پیوسته و حل مسائل آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- تابع پیوسته را تعریف کند؛
- ۲- با استفاده از قضیه‌های پیوستگی، حد تابع را در نقطه‌های مورد نظر حساب کند؛
- ۳- نقطه‌های ناپیوستگی تابع‌ها را تعیین کند؛
- ۴- مسائل پیوستگی را به طور نسبی حل کند.

## پیش‌آزمون (۲)

### محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۲)



☐ : بلی

☐ : خیر

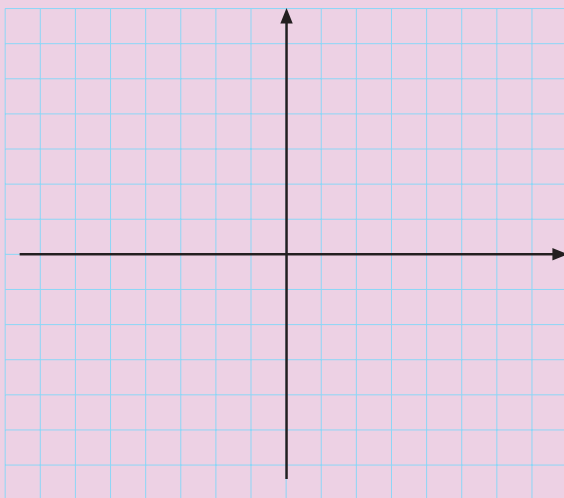
☐ : بلی

☐ : خیر

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \square$$

☐ : بلی

☐ : خیر



شکل ۳-۱۸

۱- شکل ۳-۱۷ نمودار تابع  $f$  با دامنه  $[1, 6]$  را نشان می‌دهد.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  را در جای خالی بنویسید.

ب)  $f(2)$  را محاسبه کنید و در جای خالی

بنویسید.

ج) آیا نمودار  $f$  در نقطه  $x = 2$  گسستگی دارد؟

د) آیا نمودار تابع  $f$  در  $[3, 5]$  پیوسته است؟

ه) آیا تابع در نقطه  $x = 5$  حد دارد؟

و) آیا نمودار تابع در نقطه  $x = 5$  پیوسته است؟

۲- نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$  را

رسم کنید و سپس به سؤالات صفحه بعد پاسخ دهید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۲)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \square$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \square$$

☐ : بلی

☐ : خیر

$$f(0) = \square$$

الف) حد  $f(x)$  وقتی  $x \rightarrow 0^+$  را بیابید.

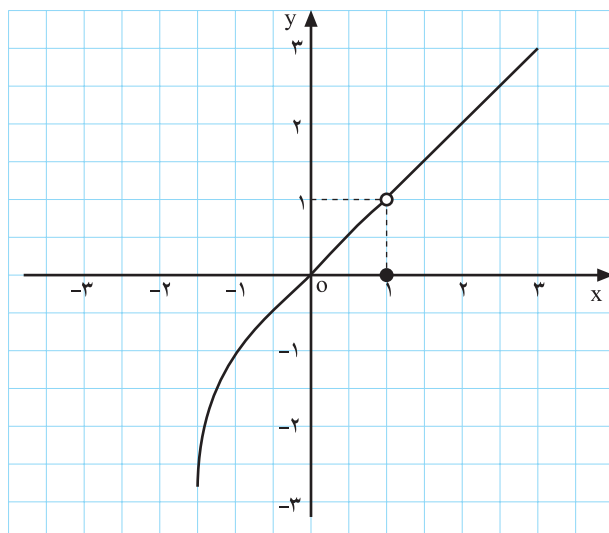
ب) حد  $f(x)$  وقتی  $x \rightarrow 0^-$  را بیابید.

ج) آیا تابع در نقطه‌ی  $x = 0$  دارای حد می‌باشد؟

د)  $f(0)$  را محاسبه کنید.

## ۳-۲ پیوستگی

اصطلاح پیوسته بودن یک تابع در ریاضی، به مفهوم یک پارچه بودن و عدم گسستگی است. به عبارت دیگر اگر تابع  $f$  در هیچ نقطه‌ای از دامنه‌اش بریدگی نداشته باشد پیوسته است.



شکل ۳-۱۹

– نمودار ۳-۱۹ مفروض است.

– در این نمودار یک بریدگی در نقطه‌ی  $(1, 1)$  مشاهده

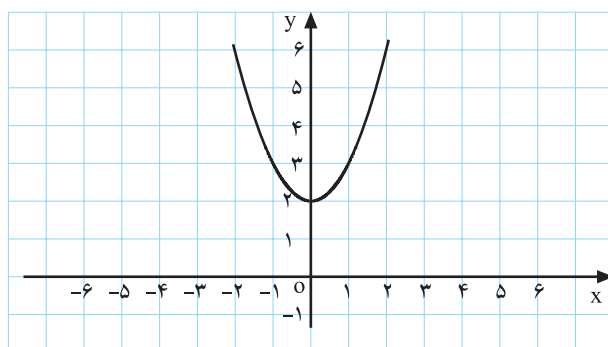
می‌کنیم، بنابراین تابع پیوسته نیست.

– در نمودار ۳-۱۹ وقتی  $x \rightarrow 1^-$  مقدار  $f(x)$  نیز به

عدد ۱ میل می‌کند در حالی که مقدار تابع در نقطه‌ی  $x=1$  برابر

صفر می‌باشد. بنابراین حد تابع در نقطه‌ی  $x=1$  با مقدارش برابر

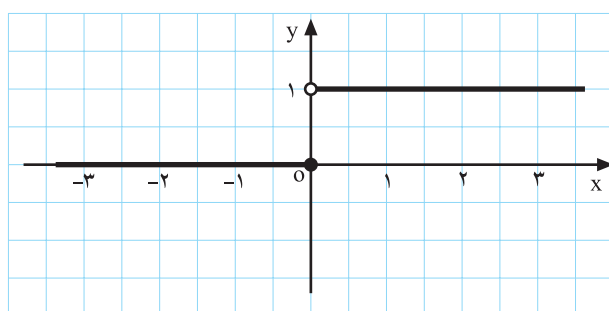
نیست.



شکل ۳-۲۰

در شکل ۳-۲۰ نمودار بریدگی ندارد، بنابراین پیوسته

است.



شکل ۳-۲۱

– در شکل ۳-۲۱ در نقطه‌ی  $x=0$ ، نمودار دارای بریدگی

است، بنابراین تابع در آن نقطه پیوسته نیست و دارای حد نیز

نمی‌باشد، زیرا  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$  در حالی که  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

است؛ هرچند که مقدار تابع در  $x=0$  برابر با حد چپ تابع در

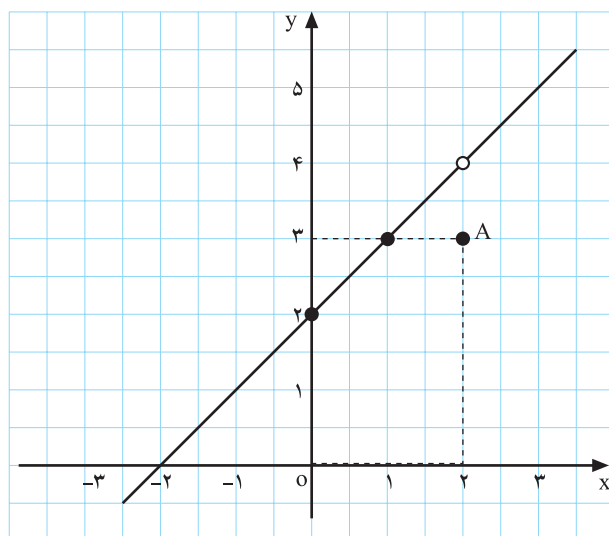
نقطه‌ی  $x=0$  می‌باشد.

مثال: تابع  $f$  با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است پس از رسم نمودار تابع، پیوستگی آن را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

حل: دامنه‌ی این تابع  $D_f = \mathbb{R}$  است. با فرض  $x \neq 2$  و با استفاده از اتحاد مزدوج  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$  داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$



شکل ۲۲-۳

نمودار این تابع در شکل ۲۲-۳ مشاهده می‌شود. با مشاهده‌ی شکل تابع می‌بینیم که تابع در نقطه‌ی  $(2, 4)$  دارای بریدگی است، بنابراین پیوسته نمی‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

از طرف دیگر با مشاهده‌ی نمودار تابع می‌بینیم وقتی  $x \rightarrow 2^+$  یا  $x \rightarrow 2^-$ ،  $f(x)$  به عدد ۴ میل می‌نماید.

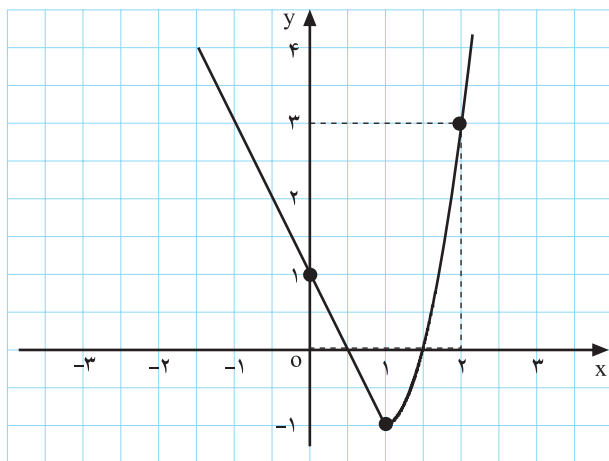
$$f(2) = 3$$

همچنین مقدار تابع در  $x = 2$  موجود می‌باشد، اما با حد تابع برابر نمی‌باشد در حالی که اگر  $f(2) = 4$  باشد بریدگی موجود در خط پوشانده می‌شود و تابع در دامنه‌اش پیوسته می‌گردد.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & x \leq 1 \\ x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$$

مثال: تابع  $f$  با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است، پس از رسم در مورد پیوستگی تابع بحث کنید.

حل: ضابطه‌ی تابع برای  $x \leq 1$  خط  $f(x) = 1 - 2x$  و



شکل ۳-۲۳

برای  $x > 1$ ، سهمی  $f(x) = x^2 - 2$  می‌باشد (شکل ۳-۲۳).  
با توجه به نمودار ۳-۲۳ مشاهده می‌کنیم که تابع در دامنه‌اش  $D_f = \mathbb{R}$  پیوسته می‌باشد. به ویژه مشاهده می‌کنیم که  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$  که با  $f(1) = -1$  برابر می‌باشد، پس تابع در این نقطه نیز پیوسته است.

تعریف: تابع  $f$  را در نقطه‌ی  $x = a$  پیوسته گوییم هرگاه:

- (۱) تابع  $f$  در  $x = a$  تعریف شده باشد.
  - (۲) حد تابع در  $x = a$  وجود داشته باشد.
  - (۳) حد تابع  $f$  وقتی  $x \rightarrow a$  وجود داشته باشد و با مقدار تابع برابر باشد.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  مشخص شده باشد.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  وجود داشته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

نتیجه‌ی ۱: شرط پیوستگی تابع  $f$  در  $x = a$ :

نتیجه‌ی ۲: از آن‌جا که با پیوسته بودن تابع  $f$  در  $x = a$  حد و مقدار تابع در این نقطه برابر است بنابراین برای به‌دست آوردن حد  $f$  وقتی  $x \rightarrow a$  کافی است در ضابطه‌ی آن به جای متغیر مقدار  $a$  را قرار دهیم.

خط با ضابطه‌ی  $f(x) = 2x + 1$  در  $\mathbb{R}$  پیوسته می‌باشد بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2(2) + 1 = 5$$

پیوستگی تابع  $f$  در بازه‌ی  $[a, b]$

تابع  $f$  به  $[a, b]$  پیوسته است هرگاه:

۱- در  $(a, b)$  پیوسته باشد؛ یعنی به ازای هر عضو این

بازه حد و مقدارش یکی باشد؛

به ازای هر  $c \in (a, b)$  داشته باشیم

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

۲- در  $x = a$  از راست پیوسته باشد (پیوستگی راست داشته باشد) یعنی داشته باشیم :

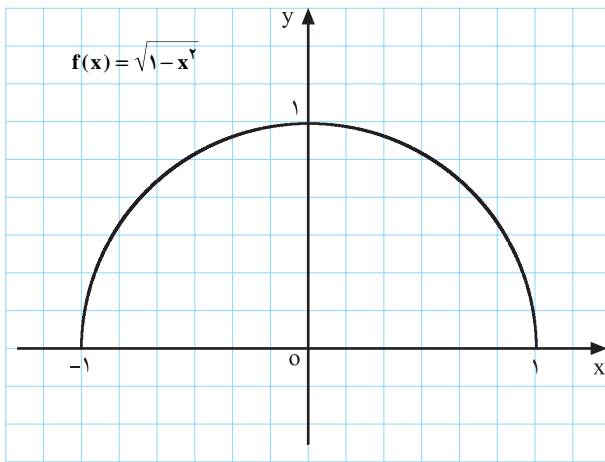
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

۳- در  $x = b$  از چپ پیوسته باشد (پیوستگی چپ داشته باشد).

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

مثال: پیوستگی تابع مقابل را در بازه  $[-1, 1]$  بررسی کنید.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$



شکل ۳-۲۴

حل : نمودار این تابع به صورت نیم دایره است (شکل ۳-۲۴).

با توجه به نمودار می بینیم که :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \sqrt{1-c^2} = f(c)$$

۱- به ازای هر  $c \in (-1, 1)$  داریم :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \sqrt{1-(-1)^2} = 0 = f(-1)$$

۲- در  $x = -1$  تابع پیوستگی راست دارد، زیرا :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{1-(1)^2} = 0 = f(1)$$

۳- در  $x = 1$  تابع پیوستگی چپ دارد، زیرا :

بنابراین تابع  $f$  در بازه  $[-1, 1]$  پیوسته می باشد.

۱-۲-۳ قضیه های پیوستگی

قضیه ۱: توابع زیر در هر نقطه از دامنه شان پیوسته اند.

۱- تابع چند جمله ای

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

اعداد  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  اعداد حقیقی می باشند.

۲- توابع گویا  $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$  ,  $g(x) \neq 0$

۳- توابع رادیکالی  $f(x) = \sqrt[n]{x}$

۴- توابع مثلثاتی  $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, m(x) = \tan x, n(x) = \cot x$

۵- تابع قدرمطلق  $f(x) = |x|$

مثال: حد توابع مقابل را بیابید.

چون اعداد داده شده در دامنه‌ی توابع می‌باشد بنابراین برای محاسبه‌ی حد توابع مقدار هر یک از تابع‌ها را به ازای اعداد داده شده به دست می‌آوریم.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 1) = (1)^2 - 4(1) + 1 = -2$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{2x-1} = \sqrt{2(5)-1} = 3$

$\frac{f}{g}$ (۴) (با شرط $g(a) \neq 0$ ) $kf$ (۵)	$f + g$ (۱)	<b>قضیه‌ی ۲:</b> هرگاه $a$ و $k$ اعداد حقیقی و $f$ و $g$ دو تابع پیوسته در $x = a$ باشند توابع مقابل در $x = a$ پیوسته می‌باشند.
	$f - g$ (۲)	
	$f \times g$ (۳)	

**نکته:** با توجه به قضیه‌ی ۱ و ۲ می‌توان پیوستگی بسیاری از توابع دیگر را نتیجه گرفت؛ به طور مثال، توابع مقابل در دامنه‌شان پیوسته هستند.

$f(x) = 2x + \sin x$

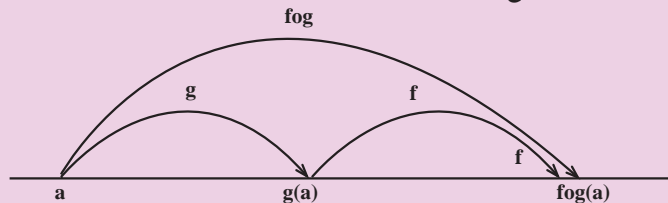
$f(x) = 7 \tan x$

$f(x) = \frac{x^2 + 3}{\cos x}$

**نکته:** حاصل جمع، تفریق و حاصل ضرب تعداد متناهی از توابع پیوسته در  $x = a$  در این نقطه پیوسته می‌باشند.



**قضیه:** اگر تابع  $g$  در  $a$  و  $f$  در  $g(a)$  پیوسته باشد آن گاه تابع مرکب با ضابطه  $\text{fog}(x) = f(g(x))$  در  $x = a$  پیوسته است.



شکل ۲۵-۳

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال: تابع با ضابطه } y = \left| \frac{\cos x}{x^2 + 4} \right| \text{ در } \mathbb{R} \text{ پیوسته است.} \\ \text{در } \mathbb{R} \text{ پیوسته است.} \end{array} \right\} \Rightarrow y = \text{fog}(x) \text{ در } \mathbb{R} \text{ پیوسته}$$

$$\text{مثال: تابع با ضابطه } y = \left| \frac{\cos x}{x^2 + 4} \right| \text{ در } \mathbb{R} \text{ پیوسته است.}$$

**مثال:** حدود الف و ب را به دست آورید.

**حل:** چون این دو تابع در دامنه شان پیوسته می باشند.

برای پیدا کردن حدهای آنها کافی است مقدار تابع را در نقاط خواسته شده پیدا کنیم.

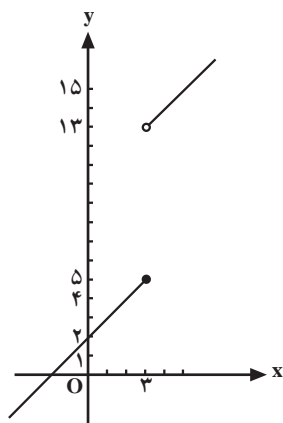
الف)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 + 2x + 1}{5 \sin x + 2} = \frac{3(0)^4 + 2(0) + 1}{5 \sin 0 + 2} = \frac{1}{2}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4-x^2}}{1+x} = \frac{\sqrt{4-(1)^2}}{1+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 7 & x > 3 \\ x + 2 & x \leq 3 \end{cases}$$

**مثال:** شکل ۲۶-۲ نمودار تابع مقابل است. نقاط

پیوستگی تابع را مشخص کنید.



شکل ۲۶-۳

**حل:** چون ضابطه ی تابع به ازای  $x > 3$ ،  $f(x) = 2x + 7$

و به ازای  $x \leq 3$ ،  $f(x) = x + 2$  چند جمله ای می باشد، بنابراین

قضیه ی ۱ پیوستگی، تابع در این بازه ها پیوسته است. بنابراین

تنها لازم است در نقطه ی  $x = 3$  پیوستگی آن بررسی شود.

به ازای  $x = 3$  مقدار  $f(x)$  برابر است با:

$$f(3) = 3 + 2 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3 + 2 = 5 \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2(3) + 7 = 13$$

— حد تابع، وقتی  $x \rightarrow 3^-$  و  $x \rightarrow 3^+$ ، برابر است با:

$$\mathbb{R} - \{3\}$$

— حد چپ و راست برابر نیستند. بنابراین تابع در  $x = 3$  حد ندارد و لذا پیوسته هم نمی‌باشد. ناحیه‌ی پیوستگی تابع با ضابطه‌ی بالا عبارت است از:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & x < 1 \\ x^2 + 3ax + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

مثال: مقدار  $a$  را در تابع روبه‌رو چنان محاسبه کنید که در  $x = 1$  پیوسته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

حل: شرط پیوستگی تابع  $f$  در  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + 2x = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 3ax + 2$$

پس تابع  $f$  در  $x = 1$  حد دارد، یعنی:

$$\Rightarrow a(1)^2 + 2(1) = 1^2 + 3a(1) + 2$$

— مقدار  $a$  برابر است با:

$$\Rightarrow 3a - a = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

مثال: مقدار  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که تابع  $f$  در  $x = 3$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + a & x < 3 \\ x - 1 & x = 3 \\ |x| + 2b & x > 3 \end{cases}$$

حل: چون تابع باید در  $x = 3$  پیوسته باشد بنابراین در این نقطه حد دارد و این حد با مقدار تابع  $(f(3))$  برابر است.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3(3)^2 + a = 27 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = |3| + 2b = 3 + 2b$$

$$f(3) = 3 - 1 = 2$$

— مقدار تابع به ازای  $x = 3$  از ضابطه‌ی  $x - 1$  به دست می‌آید، بنابراین:

$$\begin{cases} 27 + a = 2 \Rightarrow a = 2 - 27 \Rightarrow a = -25 \\ 3 + 2b = 2 \Rightarrow 2b = 2 - 3 = -1 \Rightarrow b = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

— با توجه به پیوستگی تابع به ازای  $x = 3$  حد چپ و راست برابر مقدار تابع است، پس:

– در  $x = 3$  تابع  $f$  پیوسته است، پس حد راست با مقدار تابع برابر است.

مثال: تابع  $f$  با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. پیوستگی این تابع را در  $x = 3$  بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{3} x & x > 3 \\ 9 - x^2 & x \leq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 9 - (3)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} \times 3\right) = \sin \pi = 0$$

– با توجه به پیوسته بودن هر یک از ضابطه‌ها داریم:  
بنابراین تابع در  $x = 3$  حد دارد.

مقدار تابع در نقطه‌ی  $x = 3$  برابر است با:

$$f(3) = 9 - 3^2 = 0$$

چون حد و مقدار تابع با یکدیگر برابرند تابع در  $x = 3$  پیوسته است.

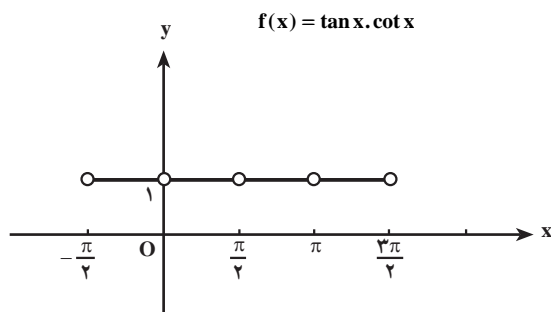
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 0$$

مثال: شکل ۲۷–۳ نمودار تابع  $f$  با ضابطه‌ی روبه‌رو را

در بازه‌ی  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  نشان می‌دهد. تابع در چه نقاطی پیوسته نیست؟

حل: تابع در نقاط  $(\frac{\pi}{4}, 1)$ ،  $(\pi, 1)$ ،  $(\frac{3\pi}{4}, 1)$  و

$(-\frac{\pi}{4}, 1)$  دارای ناپیوستگی است.



شکل ۲۷–۳

## تمرین

۱- پیوستگی تابع‌های زیر را در نقاط داده شده بررسی

کنید.

$$۱) f(x) = \begin{cases} 1-2x & x \neq 5 \\ -14 & x = 5 \end{cases} \quad (x_0 = 5 \text{ در})$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 2x & x = 1 \\ x^2 + x & x > 1 \end{cases} \quad (x_0 = 1 \text{ در})$$

۲- شکل ۳-۲۸ نمودار تابع  $f$  را نشان می‌دهد.

الف) آیا  $f(1)$  وجود دارد؟ بلی ☐ خیر ☐

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  را در صورت وجود به دست آورید.

ج) آیا نمودار  $f$  در  $x=1$  پیوسته است؟

۳- به ازای چه مقدار از  $a$  تابع  $f$  در  $x=2$  پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < 2 \\ 3ax & x \geq 2 \end{cases}$$

۴- نقاط ناپیوستگی توابع زیر را بیابید.

$$۱) f(x) = \frac{2x}{x^2 - 5x}$$

$$۲) f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$۳) f(x) = \sqrt{x-2}$$

$$۴) f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 5x}$$

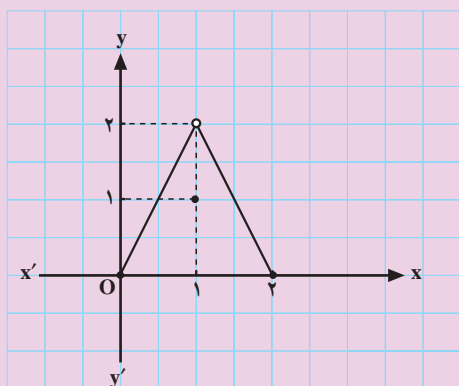
۵- تابع‌های  $f$  با ضابطه‌های زیر داده شده است در هر

یک از قسمت‌های الف و ب مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید

که تابع‌ها در  $\mathbb{R}$  پیوسته باشند.

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} 5 \sin x + 2 & x < 0 \\ b+1 & x = 0 \\ bx^2 + a & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{ب) } f(x) = \begin{cases} 1-x+a & x < 4 \\ 2x & x = 4 \\ \frac{1}{x} - b & x > 4 \end{cases}$$



شکل ۳-۲۸

## آزمون پایانی (۲)

### محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۲)

۱- پیوستگی تابع‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید.

$$۱) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 3 & x < 2 \\ 5x - 6 & x \geq 2 \end{cases} \quad (x=2)$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & x \neq -1 \\ 3 & x = -1 \end{cases} \quad (x=-1)$$

۲- نقاط پیوستگی تابع‌های زیر را بیابید.

$$۱) f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{x^3 - x}$$

$$۲) f(x) = \sqrt{3 - x}$$

۳- تابع  $f$  با ضابطه‌ی زیر داده شده است. مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که تابع در  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{3x+1} & x > 2 \\ 5 & x = 2 \\ 5bx+4 & x < 2 \end{cases}$$

# بخش سوم

## فصل سوم

### تعمیم حد

#### هدف کلی

تعیین حد تابع وقتی متغیر به سمت  $+\infty$  یا  $-\infty$  میل می‌کند، همچنین بررسی تابع‌هایی که حد آن‌ها، وقتی  $x$  به سمت یک عدد حقیقی یا  $+\infty$  یا  $-\infty$  میل می‌کند، برابر  $+\infty$  یا  $-\infty$  است.

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هرنجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- حد بی‌نهایت را تعریف کند؛
- ۲- حد در بی‌نهایت را برای یک تابع تعریف کند.

### پیش‌آزمون (۳)

#### محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۳)

$$f(x) = \frac{3}{x-4}$$

جدول ۳-۱۴

x	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	۴
f(x)	-۱	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	...	<input type="text"/>

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \boxed{\phantom{00}}$$

$$f(x) = \frac{3}{x-4}$$

جدول ۳-۱۵

x	۵	۴/۵	۴/۱	۴/۰۱	۴/۰۰۱	<input type="text"/>
f(x)	۳	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \boxed{\phantom{00}}$$

الف)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{3x-2} = ?$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 - 4x + 2}{-5x + 3} = ?$

۱- تابع  $f$  با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) جدول ۳-۱۴ را کامل کنید.

ب) هر چقدر  $x$  با مقادیر کمتر از ۴ به عدد ۴ نزدیک می‌شود  $f(x)$  به چه عددی میل می‌کند؟

۲- تابع  $f$  با ضابطه‌ی مقابل مفروض است :

به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) جدول ۳-۱۵ را کامل کنید.

ب) هر چقدر  $x$  با مقادیر بیش‌تر از ۴ به عدد ۴ نزدیک و نزدیک‌تر شود  $f(x)$  به چه عددی میل می‌کند؟

۳- حدهای مقابل را محاسبه کنید.

### ۳-۳- حد بی‌نهایت

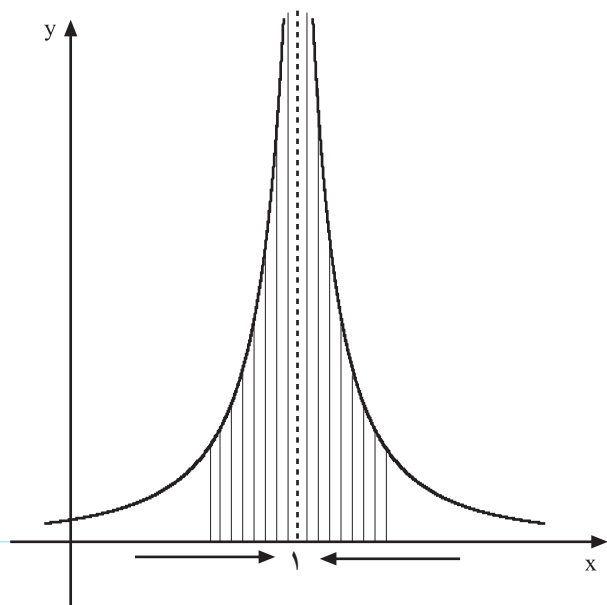
در قسمت‌های قبل با حدهایی که به صورت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  است و در آن‌ها  $a$  و  $L$  هر دو اعداد حقیقی می‌باشند، آشنا شدیم. اکنون با حدهایی که در آن‌ها  $L$  بی‌نهایت است آشنا می‌شویم.

### فعالیت ۳-۸

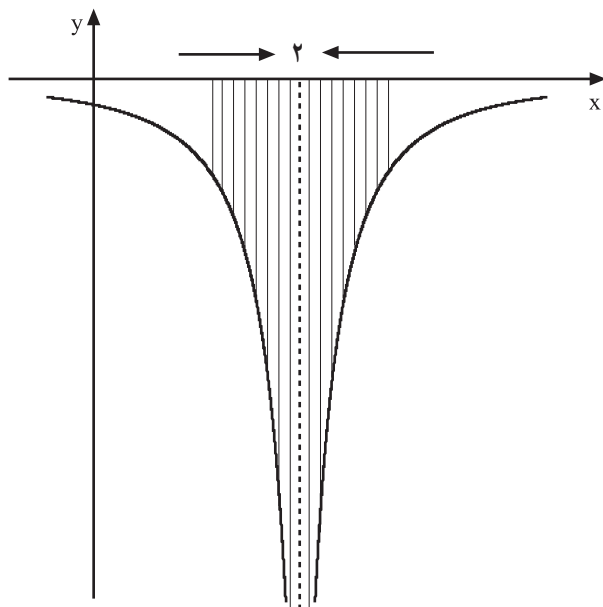
با توجه به نمودارهای مقابل به هر یک از سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱- در نمودار ۳-۲۹ وقتی  $x$  به عدد ۱ (یک) میل می‌کند مقدار  $f(x)$  از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌شود، یعنی به  $+\infty$  میل می‌کند و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \bigcirc$$



نمودار ۳-۲۹

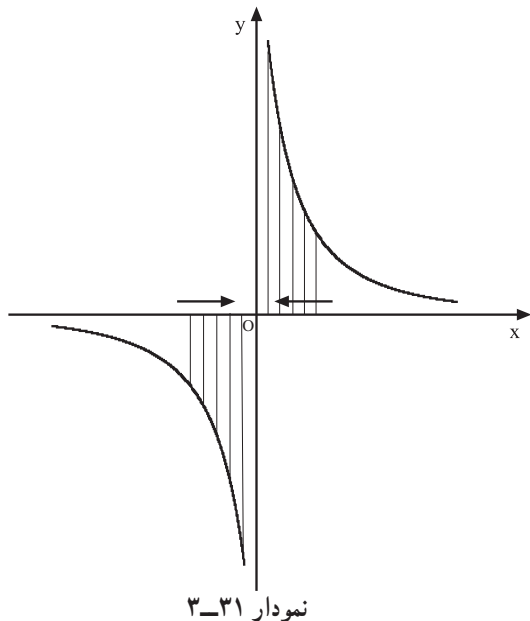


نمودار ۳-۳۰

۲- در نمودار ۳-۳۰ وقتی  $x$  به عدد ۲ میل می‌کند  $f(x)$  از هر عدد منفی کوچکی کوچک‌تر می‌شود، یعنی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \bigcirc$$





۳- در نمودار ۳-۳۱ وقتی  $x$  با مقادیر بیش‌تر از صفر به عدد ۰ نزدیک شود  $(x \rightarrow 0^+)$ ،  $f(x)$  از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌شود  $(f(x) \rightarrow +\infty)$  پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \square$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

جدول ۳-۱۶

$x$	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	...
$f(x)$	۱	۴	$10^2$	$10^4$	$10^6$	$10^8$	...

جدول ۳-۱۷

$x$	۲	۱/۵	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱
$f(x)$	۱	۴	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

با توجه به نمودار، حد چپ تابع در  $x=0$  برابر چیست؟  
آیا تابع  $f$  در  $x=0$  دارای حد می‌باشد؟  
مثال: تابع  $f$  با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

جدول‌های ۳-۱۶ و ۳-۱۷ مقادیر مختلف تابع را به ازای اعداد نزدیک به یک نشان می‌دهند (شکل ۳-۲۹). هر چه  $x$  از مقادیر کم‌تر از ۱ و یا بیش‌تر از یک به عدد ۱ میل می‌کند مقدار  $f(x)$  از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌گردد. بنابراین به مثبت بی‌نهایت  $(+\infty)$  میل می‌کند، پس می‌توان نوشت:

### فعالیت ۳-۹

تابع  $f$  با ضابطه‌ی مقابل مفروض است.

$$f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

جدول ۳-۱۸

$x$	۳	۲/۵	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱	...۲
$f(x)$	-۱	$\square$	$\square$	$-10^4$	$\square$	$-10^8$	

در نمودار ۳-۳۰ شکل این تابع را مشاهده کرده‌اید.  
۱- جدول ۳-۱۸ را تکمیل کنید.

۲- وقتی  $x$  با مقادیر بیش‌تر از ۲ (از راست) به عدد ۲ میل می‌کند آیا مقدار  $f(x)$  از هر عدد منفی کم‌تر می‌شود؟ (جدول ۳-۱۸)

بلی ☐ خیر ☐

۳- جدول ۳-۱۹ را تکمیل کنید.

جدول ۳-۱۹

$x$	۱	$\rightarrow$	$1/5$	$\rightarrow$	$1/9$	$\rightarrow$	$1/99$	$\rightarrow$	$1/999$	$\rightarrow$	$1/9999$	$\rightarrow$	۲
$f(x)$	-۱		<input type="text"/>		-۱۰۰		-۱۰۰۰۰		-۱۰۰۰۰۰۰		<input type="text"/>		

۴- وقتی  $x$  با مقادیر کم‌تر از ۲ (از چپ) به عدد ۲ میل می‌کند جدول ۳-۱۹ مقدار  $f(x)$  از هر عدد کوچکی کوچک‌تر می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \boxed{\phantom{00}}$$

۵- با توجه به جدول ۳-۱۸ حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \boxed{\phantom{00}}$$

۶- با استفاده از جدول ۳-۱۹ حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \boxed{\phantom{00}}$$

۷- حاصل حد مقابل را به دست آورید.

تمرین

تابع  $f$  با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

۱- جدولی تنظیم کنید که وقتی  $x$  با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود مقادیر  $f(x)$  را نشان دهد.

۲- جدولی را تنظیم کنید که وقتی  $x$  با مقادیر بیش‌تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود مقادیر  $f(x)$  را نشان دهد.

محل پاسخ:

$$f(x) = \frac{5}{x-2}$$

مثال: تابع  $f$  با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. نمودار  $f(x)$  را در شکل ۳-۳۱ مشاهده می‌کنید.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

جدول ۳-۲۰

$x$	$\circ$	$\dots$	$\leftarrow$	$\circ/\circ\circ\circ\circ$	$\leftarrow$	$\circ/\circ\circ\circ$	$\leftarrow$	$\circ/\circ\circ$	$\leftarrow$	$\circ/\circ$	$\leftarrow$	$\circ/\circ$
$f(x)$	$\dots$	$\dots$	$\leftarrow$	$10000$	$\leftarrow$	$1000$	$\leftarrow$	$100$	$\leftarrow$	$10$	$\leftarrow$	$1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

جدول ۳-۲۱

$x$	$\circ$	$\dots$	$\rightarrow$	$\circ/\circ\circ\circ\circ$	$\rightarrow$	$\circ/\circ\circ\circ$	$\rightarrow$	$\circ/\circ\circ$	$\rightarrow$	$\circ/\circ$	$\rightarrow$	$\circ/\circ$
$f(x)$	$\dots$	$\dots$	$\rightarrow$	$-10000$	$\rightarrow$	$-1000$	$\rightarrow$	$-100$	$\rightarrow$	$-10$	$\rightarrow$	$-1$



با مشاهده‌ی جدول ۳-۲۱ در می‌یابیم وقتی  $x$  از چپ به عدد  $\circ$  نزدیک می‌شود  $f(x)$  از هر عدد منفی کوچک‌تر می‌شود به عبارت دیگر  $f(x)$  می‌تواند از هر عدد منفی، کوچک‌تر شود، به شرط آن که  $x$  به اندازه‌ی کافی به  $\circ$  نزدیک شود.

شکل ۳-۳۲

در این حالت می‌گوییم حد تابع  $f$  وقتی  $x \rightarrow 0^-$  برابر با  $-\infty$  می‌باشد، و آن را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

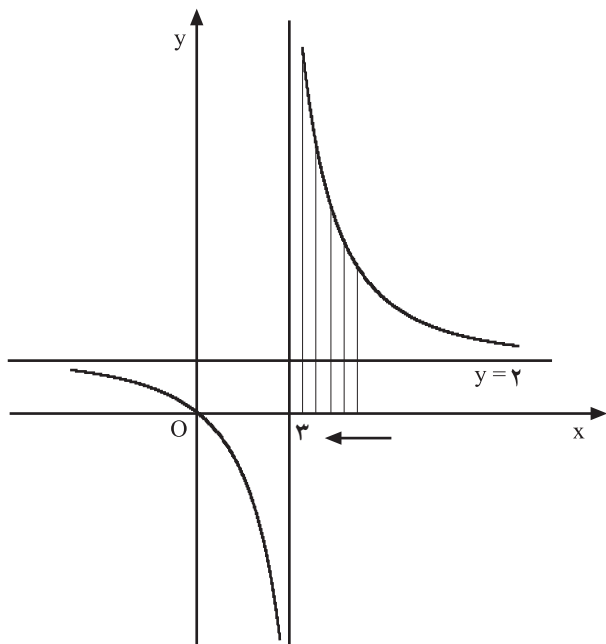
نتیجه: با توجه به مثال‌های حل شده، در می‌یابیم وقتی مخرج کسر به صفر میل کند و صورت کسر مخالف صفر باشد قدر مطلق کسر از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر می‌شود، یعنی کسر بی‌کران افزایش می‌یابد.

مثال: حدهای الف، ب و ج را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3}$

**حل الف:** چون وقتی  $x \rightarrow 3^+$  مقدار صورت کسر  $(2x \rightarrow 6)$  عددی مثبت و مخرج کسر از سمت مقادیر بزرگ‌تر از صفر به عدد ۰ میل می‌کند، بنابراین حاصل کسر به  $+\infty$  میل می‌کند (نمودار ۳-۳۳). یعنی:

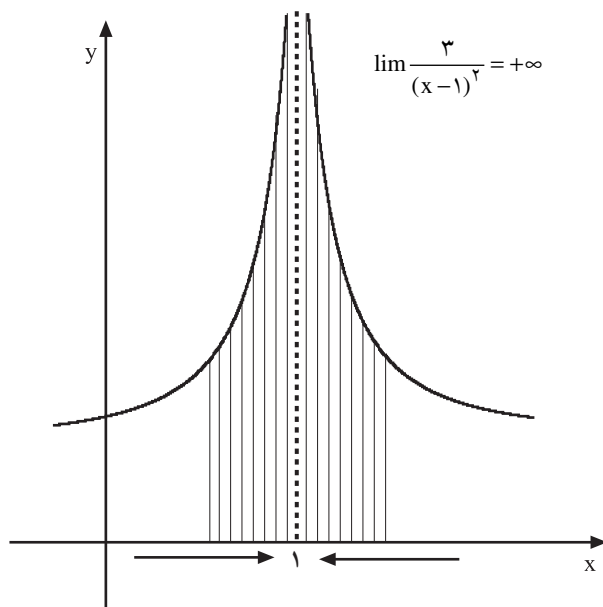
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3} = +\infty$$



نمودار ۳-۳۳

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x-1)^2} = +\infty$

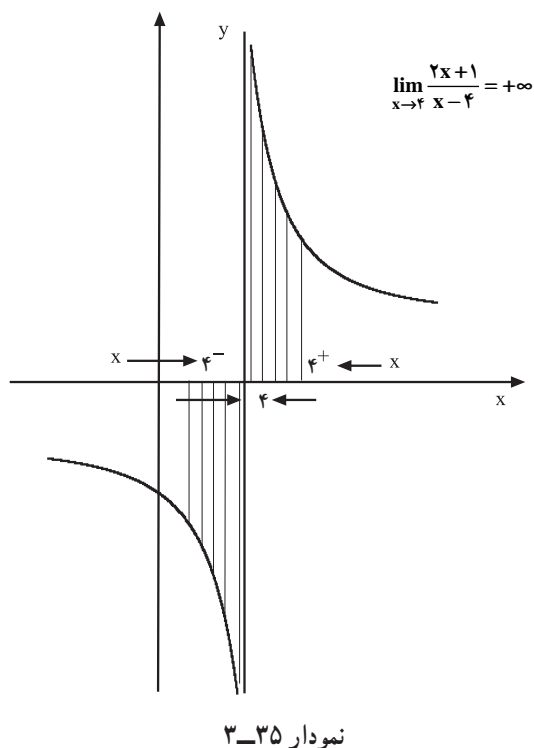
**حل ب:** وقتی  $x \rightarrow 1$  در مخرج کسر:  $(x-1)^2 \rightarrow 0^+$ ؛ بنابراین مقدار کسر به  $+\infty$  میل می‌کند (نمودار ۳-۳۴).



نمودار ۳-۳۴

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x-4}$$

حل ج: وقتی  $x \rightarrow 4^+$  مخرج کسر با مقادیر بیش‌تر از صفر به صفر میل می‌کند. بنابراین با توجه به مثبت بودن صورت کسر ( $2x+1 \rightarrow 9$ ) مقدار حد به  $+\infty$  میل می‌کند (نمودار ۳-۳۵).



هرگاه  $x \rightarrow 4^-$  مخرج کسر با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند. با توجه به مثبت بودن صورت کسر، حاصل کسر از هر عدد منفی کم‌تر می‌باشد. بنابراین به  $-\infty$  میل می‌کند (نمودار ۳-۳۵).

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x+1}{x-4} = -\infty$$

با توجه به مثال‌های حل‌شده می‌توان قضیه‌ی زیر را نتیجه گرفت:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad L \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

قضیه‌ی ۲-۳- هرگاه  $a$  عدد حقیقی باشد و داشته باشیم:

الف) اگر  $L > 0$  و  $g(x)$  با مقادیر مثبت به صفر میل کند،

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ب) اگر  $L < 0$  و  $g(x)$  با مقادیر مثبت به صفر میل کند، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

ج) اگر  $L > 0$  و  $g(x)$  با مقادیر منفی به صفر میل کند، آن گاه :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

د) اگر  $L < 0$  و  $g(x)$  با مقادیر منفی به صفر میل کند، آن گاه :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

مثال: حد کسر مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x-1} = ?$$

حل: حد صورت کسر برابر است با :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 3x+1 = 3(1)+1 = 4$$

– مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می کند، پس بنابر

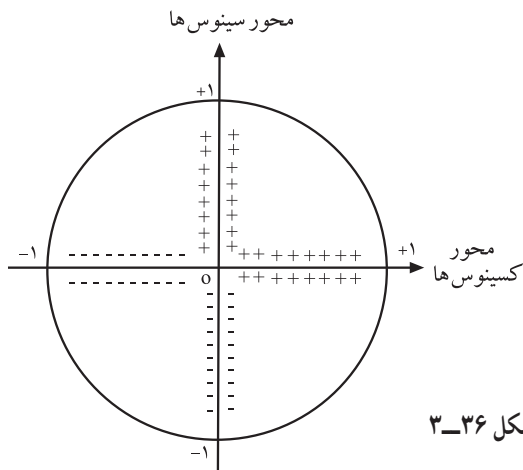
قضیه ی الف –۲– داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x-1} = +\infty$$

مثال: حد کسر مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sin x + 1}{\cos x} = ?$$



– با توجه به دایره ی مثلثاتی، وقتی  $x$  با مقادیر بیش تر از

$\frac{\pi}{4}$  به  $\frac{\pi}{2}$  میل می کند چون زاویه در ناحیه ی دوم قرار دارد مقدار

کسینوس آن منفی است (شکل ۳–۳۶) بنابراین مخرج کسر با

مقادیر منفی به عدد صفر میل می کند. بنابر قضیه ی ج–۲–

مقدار کسر از هر عدد منفی کوچکی کوچک تر می باشد در نتیجه :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sin x + 1}{\cos x} = -\infty$$

مثال: حد کسر مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x}{4-x^2} = ?$$

حل: چون  $x > 2$  بنابراین  $x^2 > 4$  و  $-x^2 < -4$  لذا

داریم :

$$4-x^2 < 0$$

– یعنی مخرج کسر با مقادیر منفی به صفر میل می کند.

حد صورت کسر برابر است با :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} -2x = -4$$

بنابر قضیه ی (د-۲-۳) داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x}{4-x^2} = +\infty$$

**قضیه ی ۳-۳-۲** اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  (عددی ثابت است)  $L \neq 0$  آن گاه :

(الف) حد حاصل مجموع دو تابع برابر است با :  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

(ب) حد حاصل ضرب دو تابع وقتی  $L > 0$ ، برابر است با :  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = +\infty$

(ج) حد حاصل ضرب دو تابع وقتی  $L < 0$ ، برابر است با :  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = -\infty$

**مثال ۱:** حد عبارت روبه رو را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left( \frac{5}{x-3} + \frac{2}{x+1} \right) = ?$$

**حل:** حد هر یک از کسر ها را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5}{x-3} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x+1} = \frac{1}{2}$$

**حل:** طبق قضیه ی (الف-۳-۳) داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left( \frac{5}{x-3} + \frac{2}{x+1} \right) = +\infty + \frac{1}{2} = +\infty$$

**مثال ۲:** حد عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{2}{1-x} \right) = ?$$

**حل:** حد هر یک از کسر ها را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{1-x} = -2$$

– طبق قضیه ی (ج-۳-۳) داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{2}{1-x} \right) = (+\infty)(-2) = -\infty$$

قضیه ۳-۴ اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  (عددی ثابت است)  $L \neq 0$  آن گاه :

الف) حد حاصل مجموع دو تابع برابر است با :  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$

ب) اگر  $L > 0$  ، حد حاصل ضرب دو تابع برابر است با :  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$

ج) اگر  $L < 0$  ، حد حاصل ضرب دو تابع برابر است با :  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$

مثال: حد عبارت روبه‌رو را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left( \frac{2x}{x-4} \cdot \frac{3}{x-7} \right) = ?$

چون  $x \rightarrow 4^-$  ، بنابراین  $x < 4$  و  $x - 4 < 0$  می‌باشد، لذا

داریم :  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x}{x-4} = \infty$

از طرفی :

$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3}{x-7} = -1$

بنابر قضیه ج-۳-۴ داریم :

$\lim_{x \rightarrow 4^-} \left( \frac{2x}{x-4} \cdot \frac{3}{x-7} \right) = (\infty)(-1) = -\infty$

مثال: حد عبارت مقابل را به‌دست آورید.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{-x^2 + 3}{(x+2)^2} + \frac{2x+1}{x-1} \right) = ?$

چون وقتی  $x \rightarrow 2^-$  ،  $(x+2)^2$  با مقادیر مثبت به صفر

میل می‌کند ؛ بنابراین :

$\lim_{x \rightarrow 2^-} -x^2 + 3 = -1$  ،  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + 3}{(x+2)^2} = \infty$

از طرفی  $x < 2$  و نزدیک ۲- است، بنابراین :

$\lim_{x \rightarrow 2^-} 2x+1 = -3$

لذا خواهیم داشت :

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{-3}{-3} = 1$

پس حد مجموع این دو تابع برابر است با :

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{-x^2 + 3}{(x+2)^2} + \frac{2x+1}{x-1} \right) = (\infty) + 1 = \infty$



## تمرین

۱- حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-3x}{x(2-x)}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$$

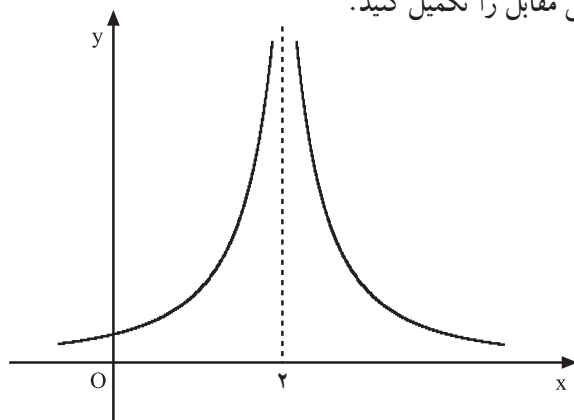
$$۵) \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^4}$$

۲- با توجه به نمودار ۳-۳۷، ۳-۳۸، ۳-۳۹ و ۳-۳۹ جاهای خالی مقابل را تکمیل کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \square$$

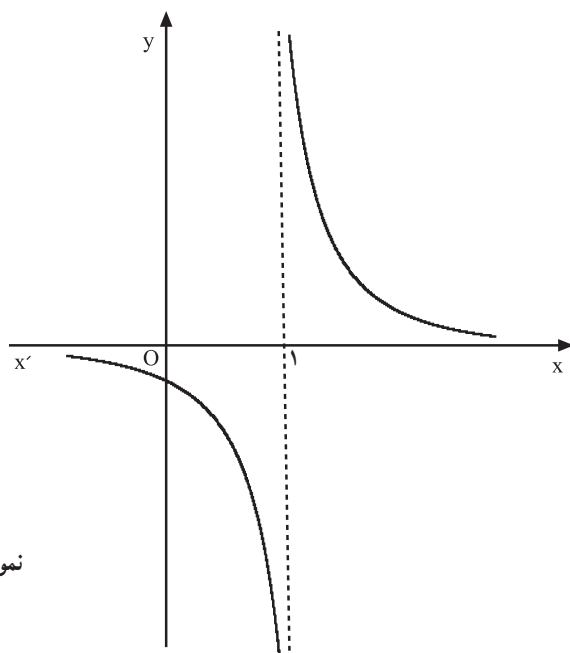
نمودار ۳-۳۷



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \square$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \square$$

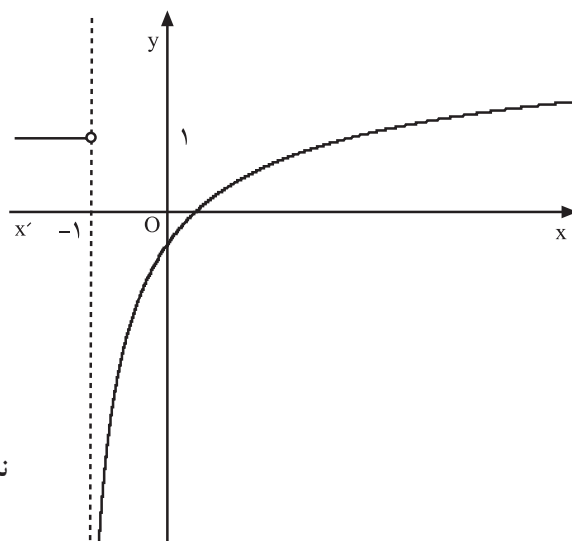
نمودار ۳-۳۸

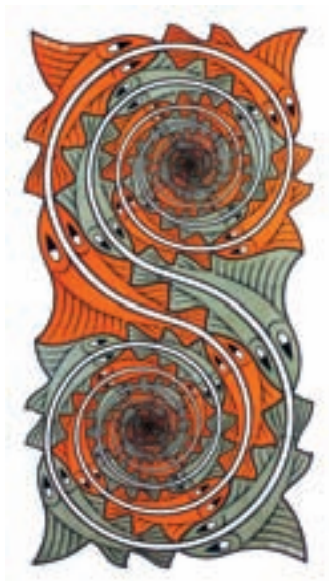


$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \square$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \square$$

نمودار ۳-۳۹





شکل ۳-۴۰

۳-۳-۱ حد در بی‌نهایت : در  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  هرگاه

$a$  بی‌نهایت باشد، حد حاصل را حد در بی‌نهایت می‌نامند.

برای داشتن درک بهتری از این نوع حدها به مثال‌های

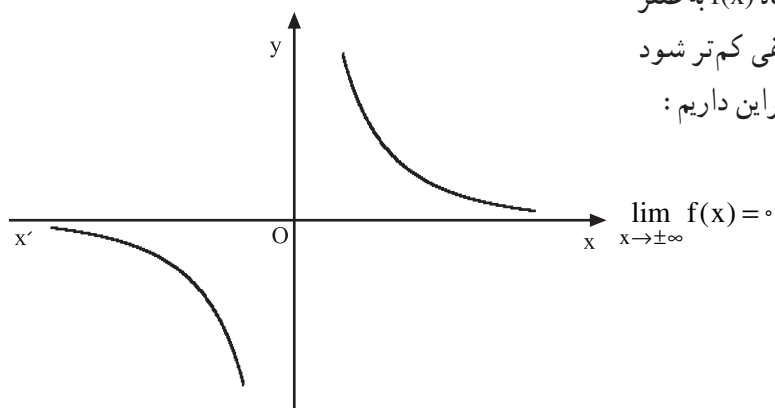
زیر توجه کنید.

مثال: با توجه به نمودار ۳-۴۱ درمی‌یابیم که هرگاه مقدار

$x$  از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر شود ( $x \rightarrow +\infty$ ) آن‌گاه  $f(x)$  به صفر

نزدیک می‌گردد. همچنین وقتی  $x$  از هر عدد منفی کم‌تر شود

( $x \rightarrow -\infty$ ) مقدار  $f(x)$  به صفر میل می‌کند. بنابراین داریم :



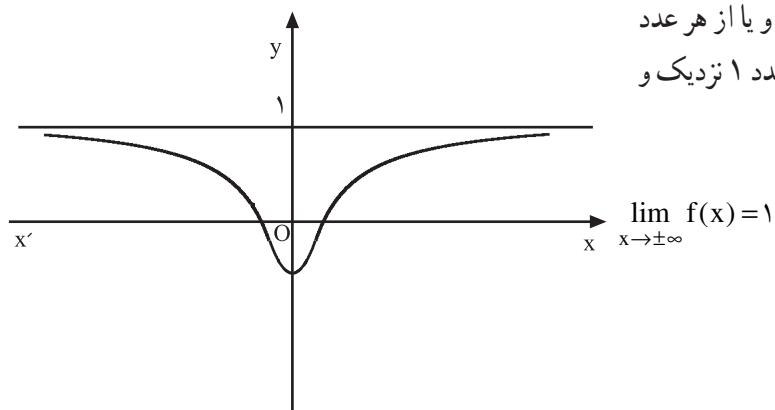
نمودار ۳-۴۱

همچنین هرگاه به نمودار ۳-۴۲ توجه کنیم درمی‌یابیم که

وقتی  $x$  از هر عدد مثبتی بیش‌تر باشد ( $x \rightarrow +\infty$ ) و یا از هر عدد

منفی کوچک‌تر شود ( $x \rightarrow -\infty$ ) مقدار  $f(x)$  به عدد ۱ نزدیک و

نزدیک‌تر می‌گردد ( $f(x) \rightarrow 1$ ) یعنی داریم :



نمودار ۳-۴۲