بخش سوم

مشتق و کاربردهای آن

هدف کلی بخش

تعیین رفتار تابع‌ها و رسم دقیق نمودار آن‌ها.

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل	زمان
اول	مشتق	۸ ساعت
دوم	کاربرد مشتق (۱)	۱۰ ساعت

بخش سوم

فصل اول

مشتق

هدف کلی

درک مفهوم مشتق و به‌دست آوردن مشتق تابع‌های متداول

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ مشتق یک تابع را در یک نقطه تعریف کند.

۲ــ به کمک تعریف حد، مشتق تابع‌های ساده را حساب کند.

۳ــ قضیه‌های مشتق و فرمول‌های آن را برای تعیین مشتق تابع‌های دیگر به کار برد.

پیش‌آزمون (۱)

۱ــ فرض کنید تابع با ضابطه $f(x)=۲x+۳$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد.

الف) $f(x+\Delta x)$ را حساب کنید.

ب) $f(x+\Delta x)-f(x)$ را به‌دست آورید.

پ) عبارت $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ را تعیین کنید.

ت) $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ را حساب کنید.

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)=x^{۳}$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده است.

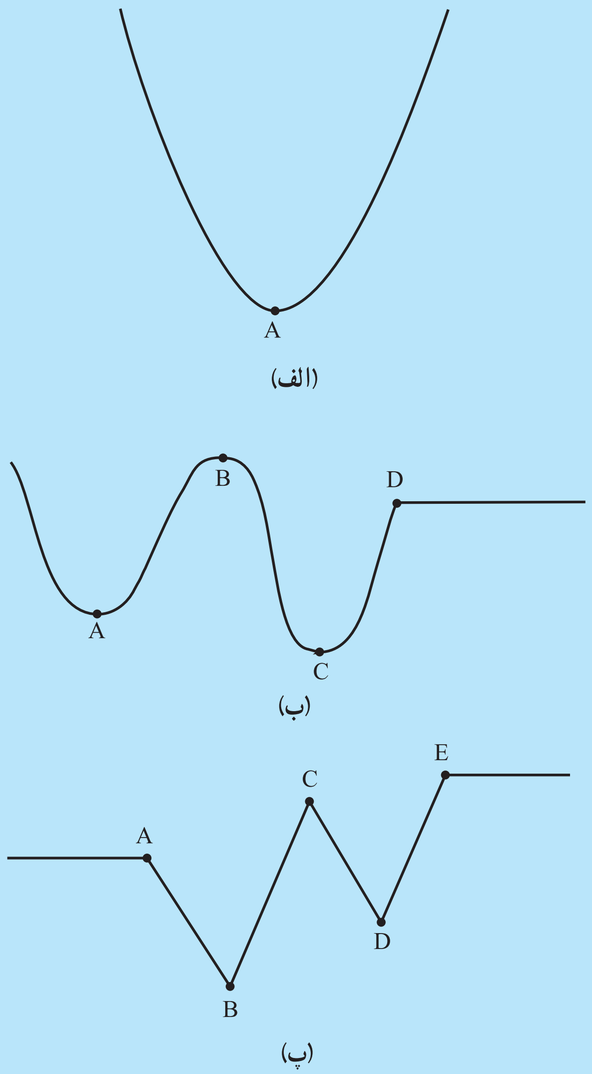
الف) اگر تغییر x برابر Δx باشد تغییر y را حساب کنید.

ب) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ را تعیین کنید.

پ) مقدار $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ را به‌دست آورید.

۳ــ در هر یک از منحنی‌های (الف) تا (پ) از شکل ۱ــ۳ نقاطی از منحنی را که در آن‌ها مماس بر منحنی وجود ندارد مشخص کنید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۱ــ۳

۱ــ۳ــ مشتق

جهت پرداختن به مطالب این فصل، نمونه‌ای از مسائل را که توسط مشتق حل می‌شوند بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۱ــ۳

شکل ۲ــ۳ یک ورق فلزی ربع دایره به شعاع ۶ سانتی‌متر را نشان می‌دهد. می‌خواهیم نقطه‌ای به فاصله‌ی x از O انتخاب کنیم به طوری که مساحت مستطیل حاصل، یعنی S(x)، بیشترین مقدار را داشته باشد.

کارهای زیر را انجام دهید شاید به نتیجه برسید!

۱ــ دو نقطه با xهای ۲ و ۳ روی پاره‌خط OA انتخاب شده است. بــه کمک شکــل‌هــای ۲ ــ۳ و ۳ ــ۳، مساحت مستطیل‌های ایجاد شده را حساب کنید و در جدول ۱ــ۳ بنویسید.

۲ــ شما نیز حداقل سه نقطه‌ی دیگر روی پاره‌خط OA انتخاب کنید و مساحت مستطیل‌های به‌دست آمده را در جدول ۱ــ۳ بنویسید.(می‌توانید از ماشین حساب نیز کمک بگیرید.)

۳ــ با استفاده از جدول ۱ــ۳ درباره‌ی تغییرات تابع S(x) چه می‌توان گفت؟ آیا به این ترتیب به جواب می‌رسید؟

جدول ۱ــ۳

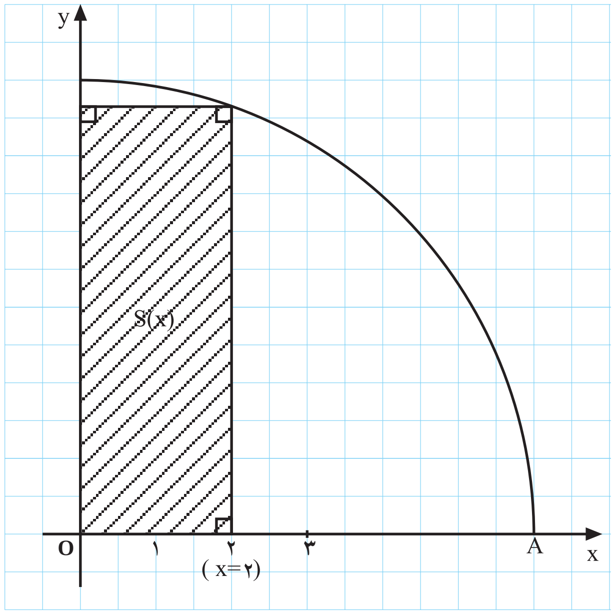
x	S(x)
۲	
۳	

آیا مقدار S(x) با افزایش x، افزایش می‌یابد؟ (S(x) افزایشی) صعودی است؟)

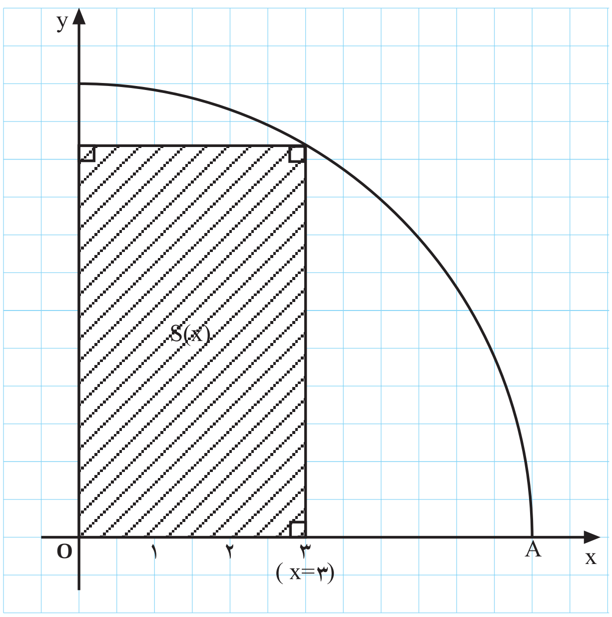
در چه بازه‌ای S(x) با افزایش x، کاهش می‌یابد؟ (S(x) کاهشی) نزولی است.)

بیشترین مقدار (ماکسیمم) S(x) چقدر است؟ و به ازای چه مقداری از x حاصل می‌شود؟

در این فصل به کمک مشتق به این سؤال‌ها پاسخ خواهیم داد.



شکل ۲ــ۳



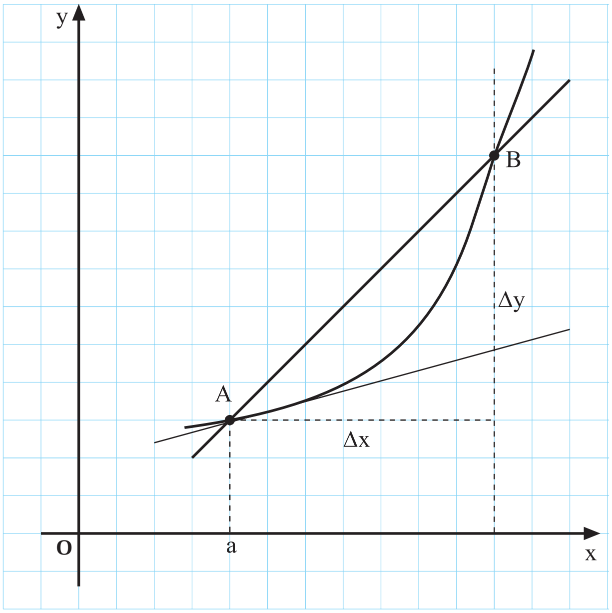
شکل ۳ــ۳

در ابتدای بخش‌دوم (صفحه‌ی۸۱) ملاحظه کردید که شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}a\\f(a)\end{matrix}\right.$ برابر است با

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در واقع، اگر این حد وجود داشته باشد همان مشتق تابع f در $x=a$ است (شکل ۴ـ۳).

در حالت کلی تعریف زیر را داریم.



شکل ۴ـ۳

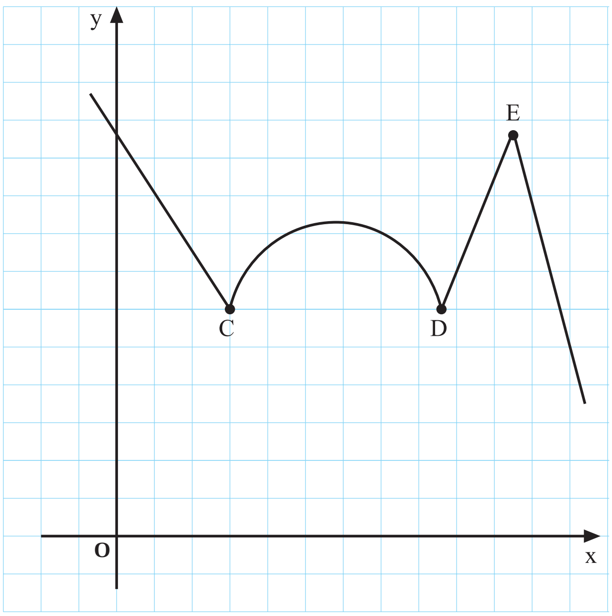
تعریف: مشتق تابع f در $x=a$ برابر است با

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a)$$

به شرط آن که این حد وجود داشته باشد. اگر $y=f(x)$ ، مقدار مشتق در a را با $y'(a)$ نیز نشان می‌دهند.

نکته: شکل ۵ـ۳ نشان می‌دهد که ممکن است مشتق در برخی از نقاط یک منحنی وجود نداشته باشد، این مطلب از عدم وجود خط مماس در این نقاط نتیجه می‌شود.

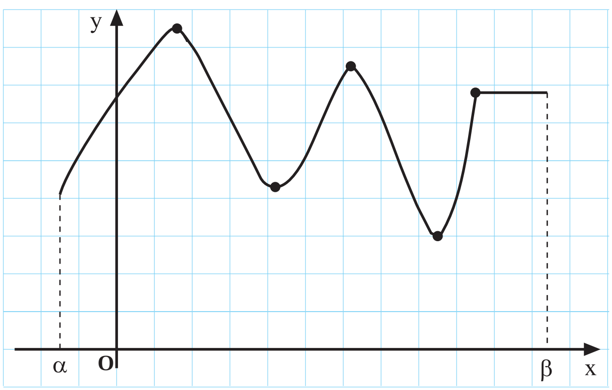
با استفاده از مفهوم مشتق می‌توان نتیجه گرفت که برای شکل ۵ـ۳ مشتق در نقاط C، D و E وجود ندارد. چرا؟



شکل ۵ـ۳

به نظر شما، در رابطه با رسم نمودار یک تابع، مشتق چه نقشی می‌تواند داشته باشد؟

به کمک ویژگی‌های مشتق یک تابع می‌توان نمودار آن تابع را با دقت بیشتری رسم کرد. به عبارت دیگر، می‌توان دقیقاً مشخص کرد که نمودار در چه ناحیه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است و تحدّب (کوژی) و تقعّر (کاوی) آن به چه سمتی است و در چه نقاطی ماکسیمم یا مینیمم می‌شود (شکل ۶ـ۳).



شکل ۶ـ۳

۱ــ۱ــ۳ــ محاسبه‌ی مشتق به کمک تعریف: برای محاسبه‌ی مشتق یک تابع می‌توان از تعریف مشتق به صورت‌های مختلف استفاده کرد. در زیر به سه صورت این کار انجام شده است.

$$(۱)\quad f'(a)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

در فرمول (۱) اگر قرار دهیم $\Delta x=h$ ، به دست می‌آوریم :

$$(۲)\quad f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

اگر قراردهیم $\Delta x=x-a$ در این صورت، $\Delta x\to ۰$ معادل $x\to a$ است و $a+\Delta x=x$. بنابراین، (۱) به صورت زیر درمی‌آید :

$$(۳)\quad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

برای محاسبه‌ی مشتق، با استفاده از تعریف، از یکی از فرمول‌های بالا استفاده کنید، این فرمول‌ها روش‌های تعیین مشتق تابع f را در a نشان می‌دهند.

مثال‌های نمونه

(کاربرد فرمول (۱))

$$y=f(x)=x^{۲}+۱\ ,\ a=۱$$

$$f(a)=f(۱)=۲\ ,\ f(۱+\Delta x)=(۱+\Delta x)^{۲}+۱$$

$$=۲+۲\Delta x+(\Delta x)^{۲}$$

$$f(۱+\Delta x)-f(۱)=۲\Delta x+(\Delta x)^{۲}$$

$$f'(۱)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۱+\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}(۲+\Delta x)=۲$$

(کاربرد فرمول (۲))

$$f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\left[(۱+h)^{۲}+۱\right]-۲}{h}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۲+۲h+h^{۲}-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲+h)=۲$$

(کاربرد فرمول (۳))

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^{۲}+۱)-۲}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(x+۱)=۲$$

تعریف: اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد گوییم f در a مشتق دارد. اگر برای هر x از دامنه‌ی f، $f'(x)$ وجود داشته باشد گوییم f در دامنه‌اش **مشتق‌پذیر** است.

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ f'(x)&=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ f'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\end{aligned}}$$

۲ــ۱ــ۳ــ برخی فرمول‌های مشتق: هدف اصلی این فصل استفاده از مشتق برای حل مسائل مربوط به مشتق است (به برخی از این مسائل در ابتدای فصل اشاره شد). لذا، اثبات فرمول‌های مشتق موردنظر نیست. معهذا، برای آن که تعریف مشتق به کار گرفته شود و فرمول آن، برای مواقع لازم، مورد استفاده قرار گیرد، مشتق چند تابع ساده، به کمک تعریف، در مقابل به دست آمده است.

الف) $f(x)=c$ مقدار ثابت

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{c-c}{h}=۰$$

مشتق تابع ثابت در هر نقطه صفر است.

ب) $f(x)=Ax+B$

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{[A(x+h)+B]-(Ax+B)}{h}=A$$

اگر $y=Ax+B$ آنگاه $y'=A$.

کار در کلاس ۱ــ۳

مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

۱) $f(x)=x^{۲}$

۲) $f(x)=x^{۳}$.

با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌توان برای هر عدد طبیعی n نوشت :

$$\boxed{\text{اگر } f(x)=x^{n} \quad \text{آنگاه } f'(x)=nx^{n-۱}}$$

۳ــ۱ــ۳ــ تعبیر هندسی مشتق: همان‌طور که قبلاً گفته شد، در صورتی که $f'(a)$ وجود داشته باشد ضریب زاویه‌ی خط مماس در نقطه‌ی $A\Big|^{a}_{f(a)}$ برابر $f'(a)$ است.

بنابراین، مماس برنمودار $y=\alpha x+\beta$ در هر نقطه از این خط همین خط است! چرا؟ (شکل ۷ــ۳).

زیرا، $y'=\alpha$ و معادله‌ی خطی که از $A\Big|^{a}_{y(a)}$ با ضریب زاویه‌ی α می‌گذرد عبارت است از :

$$y-(\alpha a+\beta)=\alpha(x-a)$$

که پس از ساده‌کردن به معادله‌ی زیر می‌رسیم :

$$y=\alpha x+\beta$$

با توجه به مطلب بالا، در نمودارشکل ۸ــ۳ مماس بر نمودار در کدام نقاط **وجود ندارد**؟ چرا؟

نقاطی را که در آن‌ها مماس برنمودار وجود ندارد مشخص کنید.

دربازه‌ی $[-۲,۲]$ نمودار تابعی را رسم کنید که در هفت نقطه مشتق نداشته باشد.

تابع $y=|x|$ در چه نقطه‌ای مشتق ندارد؟ (شکل ۹ــ۳).

قضیه: اگر تابع f در نقطه‌ی $x=a$ مشتق داشته باشد در این نقطه پیوسته است.

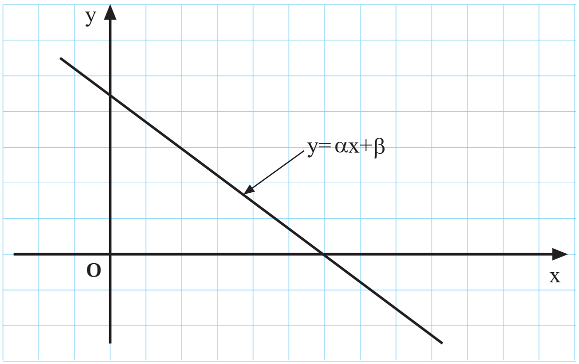
آیا این قضیه نیازی به اثبات دارد؟ توضیح دهید.

مثال‌های نمونه

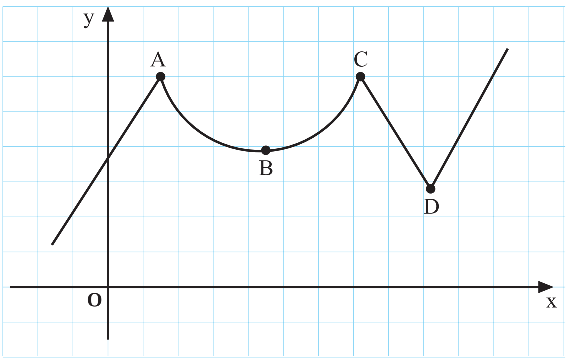
$y=x^{۳} \Rightarrow y'=۳x^{۲}$

$y=x^{۷} \Rightarrow y'=۷x^{۶}$

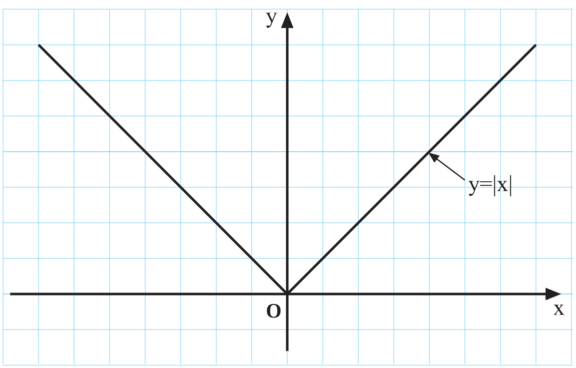
$y=x^{۱۰۰} \Rightarrow y'=۱۰۰x^{۹۹}$



شکل ۷ــ۳



شکل ۸ــ۳



شکل ۹ــ۳

مطالعه‌ی آزاد

بازی با مشتق

منحنی کُخ: در شکل ۱۰ــ۳ پاره خطی به طــول ۶سانتی‌متر رسم شده است. این پاره‌خط به سه قسمت متساوی تقسیم شده و $\frac{۱}{۳}$ وسط آن برداشته شده و به جای آن دو پاره‌خط هم اندازه با آن، مطابق شکل ۱۱ــ۳ قرار داده شده است. این کار با چهار پاره‌خط شکل ۱۱ــ۳ تکرار شده است (شکل ۱۲ــ۳).

محیط شکل ۱۱ــ۳ چند سانتی‌متر است؟

شکل ۱۱ــ۳ در چند نقطه‌ی داخلی مشتق ندارد؟

شکل ۱۲ــ۳ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟

محیط شکل ۱۲ ــ۳ چند سانتی‌متر است؟

شکل ۱۲ــ۳ در چند نقطه‌ی داخلی مشتق ندارد؟

روی شکل ۱۲ــ۳ عملی را که روی شکل‌های ۱۰ــ۳ و ۱۱ــ۳ انجام شده، انجام دهید.

شکل حاصل از چند پاره‌خط تشکیل می‌شود؟ محیط آن چند سانتی‌متر است؟

شکلی که به دست آورده‌اید در چند نقطه‌ی داخلی مشتق ندارد؟

اگر این عمل را مرتباً روی شکل‌های به‌دست آمده انجام دهید، **در نهایت به منحنی کخ** می‌رسید که نوعی **فِرَکتال** است.

هر جزء این منحنی مشابه کل آن است!

آیا منحنی کخ پیوسته است؟

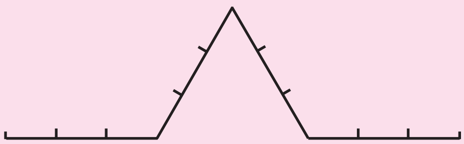
آیا منحنی کخ در نقطه‌ای دارای مشتق است؟

آیا منحنی کخ در سطحی محدود قرار دارد؟

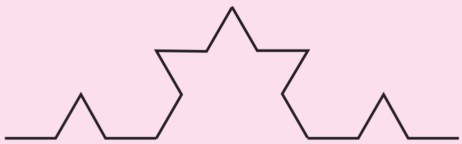
آیا محیط منحنی کخ متناهی است؟

اگر کارهای بالا را روی مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ سانتی‌متر انجام دهید در مرحله‌ی سوم به شکل ۱۳ــ۳ می‌رسید. این شکل در حد، **برفدانه‌ی کخ** نامیده می‌شود.[۱۰]

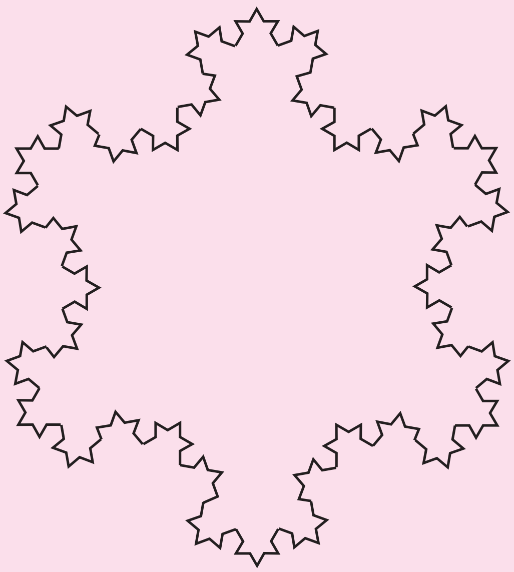
شکل ۱۰ــ۳



شکل ۱۱ــ۳



شکل ۱۲ــ۳



شکل ۱۳ــ۳

۴ـ۱ـ۳ـ قضیه‌های مشتق

مثال‌های نمونه

۴ـ۱ـ۳ـ قضیه‌های مشتق: اثبات قضیه‌های زیر به کمک تعریف مشتق ساده است ولی هدف، استفاده از این قضیه‌ها در حل مسائل است.

در مقابل، با استفاده از قضیه‌های زیر، مثال‌های نمونه‌ای حل شده است.

قضیه‌ی ۱ (مشتق حاصل‌جمع دو تابع): اگر $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند آنگاه :

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

این قضیه برای تعداد با پایان تابع مشتق‌پذیر نیز برقرار است.

$$y = x^{۲}+x^{۳} \Rightarrow y' = ۲x+۳x^{۲}$$

$$y = x^{۳}-x^{۲}+x+۴ \Rightarrow y' = ۳x^{۲}-۲x+۱$$

قضیه‌ی ۲ (مشتق حاصل‌ضرب دو تابع): اگر $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند آنگاه :

$$(f(x)\times g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

نتیجه: اگر k عددی ثابت باشد آنگاه :

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

$$y = (x^{۲}+۱)(x^{۳}-x+۴)$$

$$y' = ۲x(x^{۳}-x+۴)+(x^{۲}+۱)(۳x^{۲}-۱)$$

$$y = ۸x^{۲} \Rightarrow y' = ۸\times ۲x = ۱۶x$$

قضیه ۳ (مشتق تقسیم دو تابع): اگر $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند و $g(x)\neq ۰$ آنگاه :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^{۲}}$$

$$y = \frac{۲x-۵}{x+۱}$$

$$y' = \frac{۲(x+۱)-۱(۲x-۵)}{(x+۱)^{۲}} = \frac{۷}{(x+۱)^{۲}}$$

قضیه‌ی ۴ (مشتق تابع‌های مثلثاتی):

الف) اگر $y=\cos x$ آنگاه $y'=-\sin x$

ب) اگر $y=\sin x$ آنگاه $y'=\cos x$

پ) اگر $y=\tan x$ آنگاه $y'=۱+\tan^{۲} x$

ت) اگر $y=\cot x$ آنگاه $y'=-(۱+\cot^{۲} x)$

$$y=\sin x+\cos x, y'=\cos x-\sin x$$

$$y=۲\cos x-۳\sin x,\quad y'=-۲\sin x-۳\cos x$$

$$y=x^{۲}\sin x,\quad y'=۲x\sin x+x^{۲}\cos x$$

$$y=\tan x+x\cos x-\cot x,$$

$$y'=۱+\tan^{۲} x+\cos x-x\sin x+۱+\cot^{۲} x$$

قضیه‌ی ۵: فرض کنید u تابعی از x و f تابعی از u باشد و $u'(x)$ و $f'(u)$ وجود داشته باشند. اگر $y=f(u)$ آنگاه :

$$y' = u'(x)f'(u).$$

۱) $y=f(u)=u^{۳}\ ,\quad u=(x^{۲}+x-۱)$

$$y'(x)=u'(x)\times f'(u)=(۲x+۱)\times ۳u^{۲}$$

$$=(۲x+۱)\times ۳\times (x^{۲}+x-۱)^{۲}.$$

نتیجه‌ی ۱: اگر $y=u^n$ آنگاه $y'=nu'u^{n-۱}$.

نتیجه‌ی ۲: اگر $y=\sqrt{u}$ آنگاه $y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$.

نتیجه‌ی ۳: اگر $y=\sqrt[m]{u^n}$ آنگاه $y=u^{\frac{n}{m}}$ و

$$y'=\frac{n}{m}u'u^{\frac{n}{m}-۱}$$

$$=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}.$$

کار در کلاس ۲ــ۳

با استفاده از فرمول‌های مشتق که در صفحه‌ی بعد ملاحظه می‌کنید، مشتق تابع‌های زیر را، در سمت چپ، بنویسید.

الف) $y=۳x^۲-\sqrt{۲}x+\frac{۲}{۷}$

ب) $y=(۳x-۱)(x+۲)$

پ) $y=x\sqrt{x}$

ت) $y=\cos x+x\sin x$

ث) $y=\sqrt[۵]{(۲x-۱)^۲}$

ج) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$

چ) $y=\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)$

ح) $y=\sin(۲x+۱)-\cos ۳x$

خ) $y=\frac{x+\cos x}{۲+\sin x}$

د) $y=\cot ۳x$

۲) $y=\sin^۷ x$

$y'=۷\cos x\sin^۶ x$

۳) $y=\sqrt{x}=x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲}x^{\frac{۱}{۲}-۱}$

$$=\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

۴) $y=\sqrt{۲x^۲+x-۲}$

$$y'=\frac{۴x+۱}{۲\sqrt{۲x^۲+x-۲}}$$

۵) $y=\sqrt{۲+\sin x}$

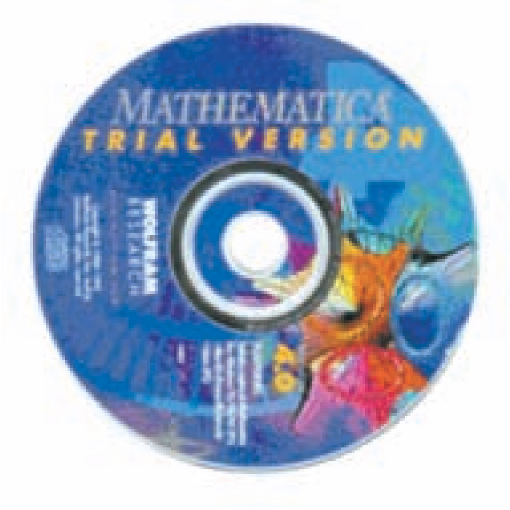
$$y'=\frac{\cos x}{۲\sqrt{۲+\sin x}}$$

۶) $y=\sqrt[۵]{x^۳+۷x-۲}$

$$y'=\frac{۳x^۲+۷}{۵\sqrt[۵]{(x^۳+۷x-۲)^۴}}$$

۷) $y=\sqrt[۳]{(۲x+۱)^۲}\Rightarrow y'=\frac{۲}{۳}\times۲\times(۲x+۱)^{\frac{۲}{۳}-۱}.$

$$=\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{۲x+۱}}$$



۵ــ۱ــ۳ــ جدول فرمول‌های مشتق: در زیر، جدول مربوط به فرمول‌های مشتقِ تابع‌هایی که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند، آمده است. انتظار می‌رود با حل تمرین‌های متعدد این فرمول‌ها را به خاطر بسپارید. معهذا، چون هدف اصلی کاربرد این فرمول‌ها در حل مسائل است، به دبیران محترم توصیه می‌شود که در آزمون‌های مربوط به این فصل جدول را ،با مقیاس بزرگتری،در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند.

تابع	مشتق تابع	مثال
$y=c$	$y'=0$	$y=4 \Rightarrow y'=0,\ \ y=3\sqrt{2} \Rightarrow y'=0$
$y=ax+b$	$y'=a$	$y=-6x+7 \Rightarrow y'=-6,\ \ y=\frac{1}{2}x \Rightarrow y'=\frac{1}{2}$
$y=x^n, n\in R$	$y'=nx^{n-1}$	$y=x^3 \Rightarrow y'=3x^2,\ \ y=x^7 \Rightarrow y'=7x^6$
$y=kf(x)$ و k ثابت	$y'=kf'(x)$	$y=6x^2 \Rightarrow y'=6\times 2x=12x$
$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$	$y=x^3+2x^2 \Rightarrow y'=3x^2+4x$
$y=u.v$	$y'=u'v+uv'$	$y=(x^2+1)(2x^3-x^2+1)$ $y'=2x(2x^3-x^2+1)+(x^2+1)(6x^2-2x)$
$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$y=\frac{2x-5}{x^2+1} \Rightarrow y'=\frac{2(x^2+1)-2x(2x-5)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+10x+2}{(x^2+1)^2}$
$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{5x} \Rightarrow y'=\frac{5}{2\sqrt{5x}}$
$y=u^n$	$y'=nu'u^{n-1}$	$y=(3x^2-5)^3 \Rightarrow y'=3(6x)(3x^2-5)^2=18x(3x^2-5)^2$
$y=\sqrt[m]{u^n}$	$y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$	$y=\sqrt[6]{(x^2+x+1)^5} \Rightarrow y'=\frac{5(2x+1)}{6\sqrt[6]{x^2+x+1}}$
$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$	$y=\sin 3x \Rightarrow y'=3\cos 3x$
$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$	$y=\cos\frac{1}{2}x \Rightarrow y'=-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x$
$y=\tan u$	$y'=u'(1+\tan^2 u)$	$y=\tan\frac{1}{x} \Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}(1+\tan^2\frac{1}{x})$
$y=\cot u$	$y'=-u'(1+\cot^2 u)$	$y=\cot(1-2x) \Rightarrow y'=2(1+\cot^2(1-2x))$

تمرین ۱ــ۳

۱) مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از جدول مشتق بنویسید.

الف) $y = ۵x^{۳} - ۳x^{۲} + ۱$

ب) $y = x(۳x^{۴} + x)$

پ) $y = ۳\sin x \cos x$

ت) $y = \sqrt{۳x - ۱}$

ث) $y = \sqrt[۵]{(x^{۲} + x)^{۳}}$

ج) $y = \dfrac{۲\cos x}{\sin x + ۲}$

چ) $y = \tan ۳x + \sin \sqrt{x}$

ح) $y = (x^{۳} - ۲x + ۱)^{۷}$.

۲) اگر $f(x) = \dfrac{x - ۱}{x + ۱}$، مقدار $f'(۰)$ را به‌دست آورید.

۳) اگر $u = x^{۲} - ۱$ و $y = ۵u^{۳}$، حاصل y'_x را بنویسید.

۴) اگـــر $y = ۲u^{۲} + ۵u - ۱$ و $u = \sqrt{x^{۲} + ۴}$، y'_x را به‌دست آورید.

۵) مشتق تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف) $y = ۳x + ۵$

ب) $y = \dfrac{x^{۳}}{۳} - \dfrac{x^{۲}}{۲} - x + \sqrt{۲}$

پ) $y = ۴(x^{۳} + ۲x - ۱)$

ت) $y = \dfrac{۷x^{۲} + ۶x - ۴}{۹}$

ث) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{۲\cos x + ۳}$

ج) $y = \sin^{۳} x + \cos^{۳} x$

چ) $y = \tan^{۵} \dfrac{x}{۲}$

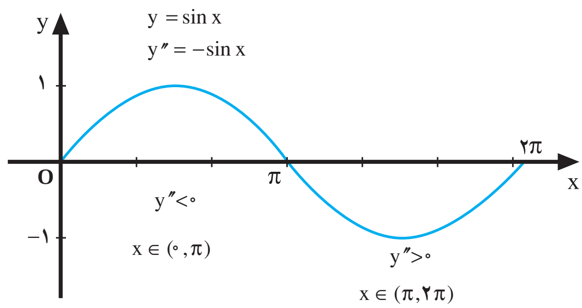
ح) $y = \sqrt{\dfrac{۱}{x}}$

خ) $y = \sqrt[۳]{۱ + \cos^{۴} x}$.

۶ــ۱ــ۳ــ مشتق دوم یک تابع: همان‌طورکه مشتق یک تابع تعریف شد، می‌توان مشتقِ مشتق یک تابع را نیز تعریف کرد و آن را، در صورت وجود، حساب کرد. مشتق تابع f را با f' و مشتق تابع f' را با f'' نمایش می‌دهیم. در مثال‌های روبه‌رو، مشتق دوم (f'') برای چند تابع حساب شده است.

مشتق دوم یک تابع در رسم دقیق نمودار تابع‌ها کاربرد دارد .در زیر مثالی می‌آوریم، این مطلب در ۱ــ۳ــ۳ بیشتر بررسی می‌شود.

مثال: در زیر نمودار تابع $y = \sin x$ رسم شده است.



ملاحظه می‌شود که دربازه‌ی$(۰,\pi)$ گودی(تقعر) نمودار به طرف پایین است و$y''<۰$ و در$(\pi,۲\pi)$ گودی نمودار به‌طرف بالا است و$y''>۰$.

تمرین ۲ــ۳

مشتق دوم هریک از تابع‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $y = ۲x^۲ + ۷x - ۵$

ب) $y = -\frac{۱}{۴}x^۲ + ۶x - ۴$

پ) $y = x^۳ + ۲x^۲ - ۵x + ۲$

ت) $y = (x-۲)^۳$

ث) $y = \sin ۲x$

ج) $y = \cos x + \sin x$

ح) $y = \frac{x-۱}{x+۲}$.

مثال‌ها:

الف) $f(x) = ۴x^۳ - x^۲ + ۲ \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = ۱۲x^۲ - ۲x \\ f''(x) = ۲۴x - ۲ \end{cases}$

ب) $f(x) = \sin x \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \cos x \\ f''(x) = -\sin x \end{cases}$

پ) $f(x) = \frac{۱}{x} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -\frac{۱}{x^۲} \\ f''(x) = \frac{۲}{x^۳} \end{cases}$

ت) $f(x) = \cos x \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -\sin x \\ f''(x) = -\cos x \end{cases}$

ث) $f(x) = \tan x \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = ۱ + \tan^۲ x \\ f''(x) = ۲\tan x(۱ + \tan^۲ x) \end{cases}$

ج) $f(x) = \frac{۲}{x-۱} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{-۲}{(x-۱)^۲} \\ f''(x) = \frac{۴}{(x-۱)^۳} \end{cases}$

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ تابع $f(x)=x^{2}-1$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده است. مشتق این تابع را در $x=1$ حساب کنید.

۲ــ مشتق تابع $y=2x+3$ را در $x=1$، به کمک تعریف مشتق، حساب کنید.

۳ــ تابع $y=|x+2|$ در چه نقطه‌ای از نمودارش دارای خط مماس نیست؟

۴ــ فرض کنید $f(x)=|x|$ حساب کنید:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}.$$

از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ــ مشتق تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف) $y=\cos x-\sin x$

ب) $y=x\sqrt[3]{x}$

پ) $y=\sqrt{\dfrac{1}{2+\cos x}}$

ت) $y=\sqrt[5]{(x^{2}+1)^{3}}$

ث) $y=\sin^{2}x+\cos^{2}x.$

۶ــ با توجه به ضابطه‌ی y مقدار y'' را حساب کنید.

الف) $y=\sqrt{x}$

ب) $y=\sin x$

پ) $y=\sqrt[3]{x^{2}}$

ت) $y=\cos x$

ث) $y=\tan x.$