بخش دوم

فصل پنجم

چند تابع ویژه

هدف کلی

معرفی توابع ثابت، همانی، مثلثاتی و برخی از ویژگی‌های آن‌ها

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ نمودار تابع ثابت را رسم کند ؛

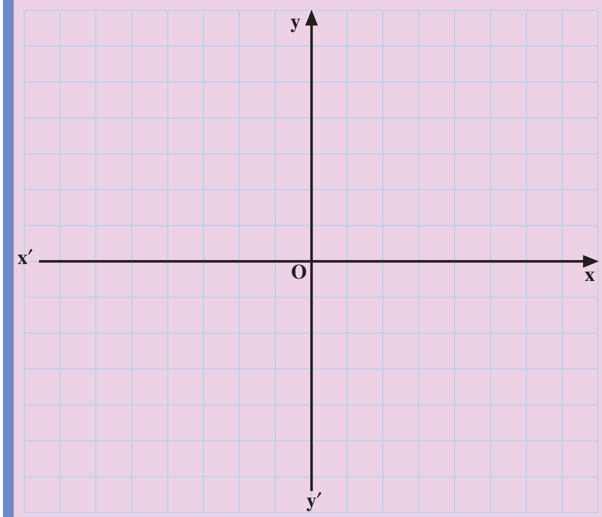
۲ــ تابع همانی را رسم کند ؛

۳ــ دامنه‌ی توابع مثلثاتی را تعیین کند ؛

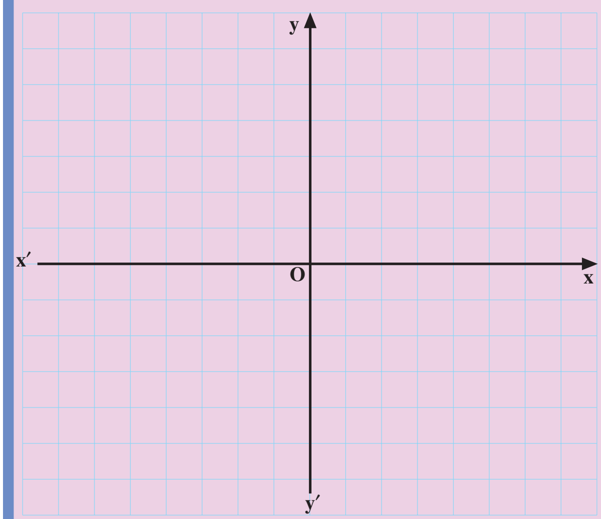
۴ــ تابع‌های مساوی را تعیین کند.

پیش آزمون (۵)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۵)



شکل ۸۷ــ۲



شکل ۸۸ــ۲

۱ــ نمودار تابع $y = ۵$ را رسم کنید (شکل ۸۷ــ۲).

۲ــ تابع $I = \{(-۱,-۱),(۰,۰),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\}$ مفروض است.

ــ نقاط I را روی شکل ۸۸ــ۲ مشخص و به هم وصل کنید.

ــ نتیجه‌ای را که به‌دست می‌آورید به‌طور مختصر بنویسید.

۵ــ۲ــ چند تابع ویژه

دراین قسمت به بررسی چند تابع ویژه مانند تابع ثابت، تابع همانی و توابع مثلثاتی می‌پردازیم.

۱ــ۵ــ۲ــ تابع ثابت

فعالیت ۱۰ــ۲

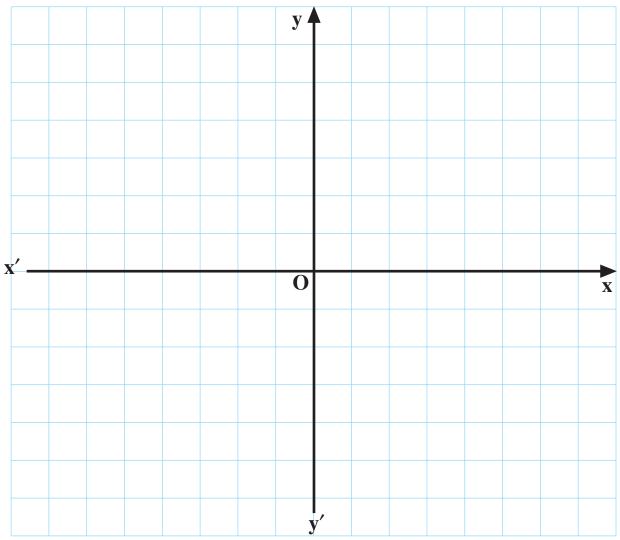
هرگاه $f(x) = -۷$ باشد :

الف) جدول ۱۹ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۱۹ــ۲

x	−۸	−۳	۰	۳	۴
f(x)	−۷	□	□	−۷	□

ب) تابع f را در دستگاه محورهای مختصات شکل ۸۹ــ۲ رسم کنید.



شکل ۸۹ــ۲

ج) دامنه و برد تابع را به‌دست آورید.

د) آیا می‌توان گفت f یک تابع ثابت است؟

مثال: نمودار تابع مقابل را رسم کنید.

$f(x) = ۴$

حل: به ازای هر x داریم :

$f(x) = ۴$

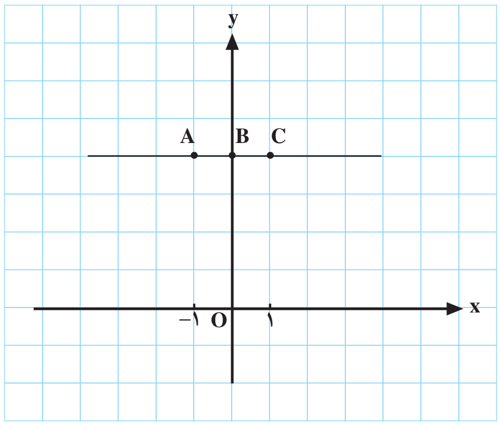
جدول ۲۰ــ۲ را تکمیل می‌کنیم.

با توجه به جدول تکمیل شده به ازای هر مقدار از x فقط یک مقدار برای y به‌دست می‌آید.

جدول ۲۰ــ۲

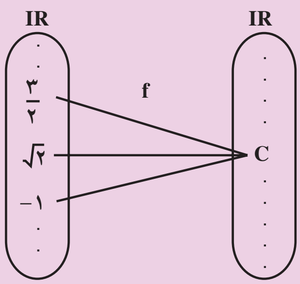
x	−۱	۰	۱
y	۴	۴	۴
	A(−۱,۴)	B(۰,۴)	C(۱,۴)

ــ در نمودار ۹۰ــ۲ خط $y = ۴$ موازی محور xها را مشاهده می‌کنید.



نمودار ۹۰ــ۲

تعریف تابع ثابت: تابعی که در هر نقطه از دامنه‌اش مساوی مقدار ثابت c باشد تابع ثابت نام دارد.



نمودار ۹۱ــ۲

ــ شکل ریاضی آن مطابق رابطه‌ی روبه‌رو است.

$f : D_f \to \{c\} \qquad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = c$

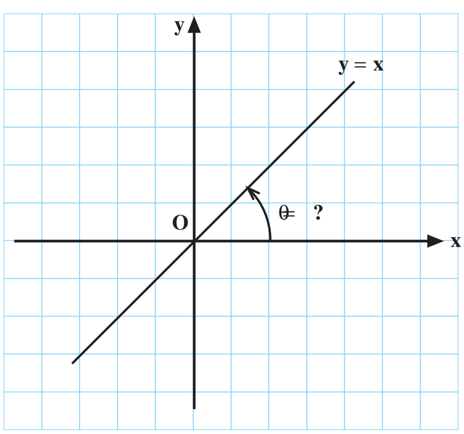
نکته : در تابع حقیقی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هرگاه $c \in \mathbb{R}$ و $f(x) = c$ آن‌گاه دامنه‌ی آن برابر مجموعه اعداد حقیقی و برد آن برابر $\{c\}$ است و خط $y = c$ موازی محورxهاست. به بیان دیگر : $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \{c\}$

۲ــ۵ــ۲ــ تابع همانی

فعالیت ۱۱ــ۲

با توجه به تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x$ و نمودار ۹۲ــ۲ (نیمساز ربع اول و سوم) جاهای خالی را تکمیل کنید.

الف) تابع f را تابع .... می‌نامیم.



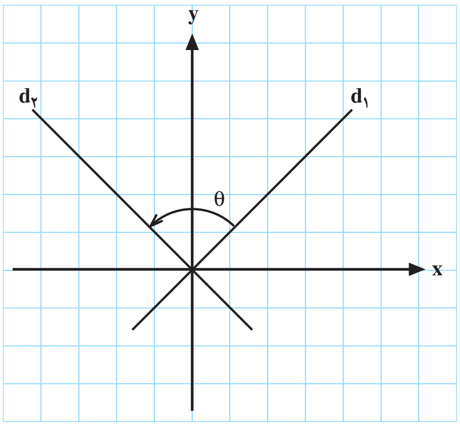
شکل ۹۲ــ۲

ب) شیب تابع همواره برابر یک است. به بیان دیگر

$\tan\theta = \square$ و $\theta = \square$ است.

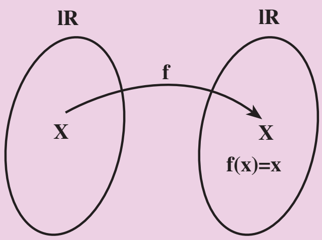
فعالیت ۱۲ــ۲

با توجه به شکل ۹۳ــ۲ هرگاه d_1 نیمساز ربع اول و سوم و d_2 نیمساز ربع دوم و چهارم باشد آن‌گاه زاویه‌ی θ برابر .... است؟ چرا؟



شکل ۹۳ــ۲

نتیجه: هر تابع که هر عضو دامنه را به خودش متناظر کند یک تابع همانی است. ضابطه‌ی تابع، را با نماد $f(x) = x$ نمایش می‌دهیم (شکل ۹۴ــ۲).



شکل ۹۴ــ۲

نکته: دامنه و برد تابع همانی با هم برابر است و نمودار تابع همانی نیمساز ربع اول و سوم است.

مثال: مجموعه‌ی B، در مقابل، مفروض است.

$$B = \{۷, -۲, ۵\}$$

تابع همانی از مجموعه‌ی B را بنویسید.

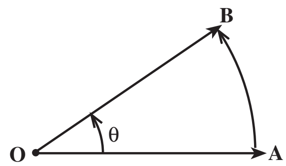
حل: فرض می‌کنیم I تابع همانی از B باشد، بنابراین خواهیم داشت :

$$I = \{(x, y) | x, y \in B, x = y\} = \{(۷,۷), (-۲,-۲), (۵,۵)\}$$

۳ــ۵ــ۲ــ مثلثات

زاویه: نیم خط $\overrightarrow{OA}$ شکل (۹۵ــ۲ــ الف) را حول نقطه‌ی O خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا در وضعیت $\overrightarrow{OB}$ قرار گیرد تا شکل ۹۵ــ۲ــ ب حاصل شود. زاویه‌ی حاصل (θ یا $\angle AOB$) با سه نوع واحد، یعنی درجه، گراد و رادیان قابل اندازه‌گیری است.

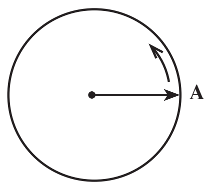
شکل ۹۵ــ۲ــ الف



شکل ۹۵ــ۲ــ ب

۱ــ درجه (D): هرگاه نیم خط $\overrightarrow{OA}$ یک دوران کامل نماید یک دایره تشکیل می‌شود. اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل به $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره را یک درجه می‌نامند (شکل ۹۶ــ۲). اجزای درجه، دقیقه و ثانیه است و یک دقیقه برابر ۶۰ ثانیه است.

مثال ۱: نمایش مثلثاتی یک زاویه به اندازه‌ی سه درجه و چهار دقیقه و پنج ثانیه به شکل مقابل است.



$۳^\circ \quad ۴' \quad ۵''$

درجه دقیقه ثانیه

شکل ۹۶ــ۲

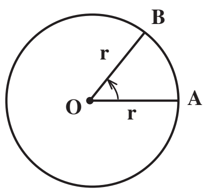
۲. گراد (G): اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل به $\frac{۱}{۴۰۰}$ محیط دایره را یک گراد می‌نامند. اجزای گراد عبارت است از :

دسی‌گراد ($\frac{۱}{۱۰}$ گراد)، سانتی‌گراد ($\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد)، میلی‌گراد ($\frac{۱}{۱۰۰۰}$ گراد).

مثال: ۵/۴۳۲

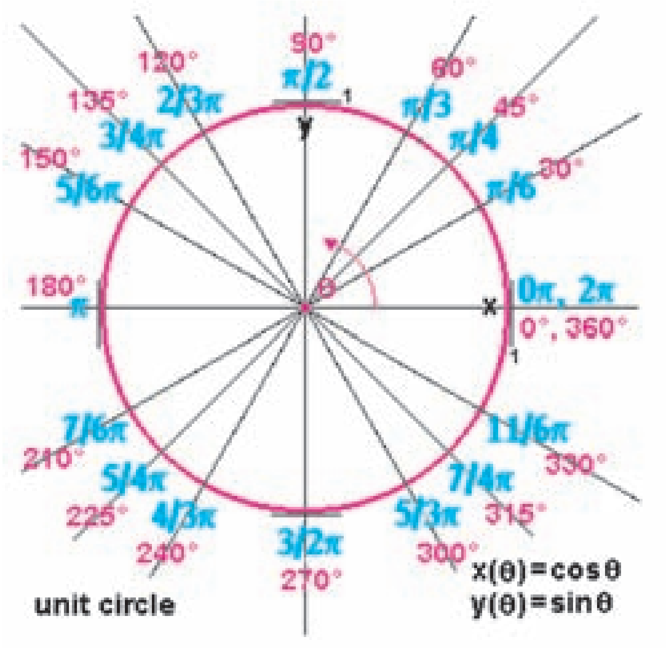
پنج گراد و چهار دسی گراد و سه سانتی‌گراد و دو میلی‌گراد.

۳. رادیان (R): اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل به کمانی از دایره که طول آن برابر با شعاع دایره باشد یک رادیان نامیده می‌شود (شکل ۹۷ــ۲).



شکل ۹۷ــ۲

با توجه به این که محیط دایره $۲\pi r$ می‌باشد، ۳۶۰° ۲π رادیان است.



شکل ۹۸ـ۲

رابطه‌ی بین درجه، گراد و رادیان: با توجه به تعاریف زاویه، گراد و رادیان می‌توانیم رابطه‌ی مقابل را بنویسیم.

$$\frac{D}{۳۶۰} = \frac{G}{۴۰۰} = \frac{R}{۲\pi}$$

ـ هرگاه آن‌را بر عدد ۲ ساده کنیم داریم :

$$\boxed{\frac{D}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi}}$$

مثال ۲: ۴۵ درجه چند رادیان است؟

حل: رابطه‌ی رادیان و درجه را می‌نویسیم.

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \;,\; D = ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{۴۵}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow ۴R = \pi \Rightarrow$$

ـ ۴۵° برحسب رادیان برابر است با :

$$R = \frac{\pi}{۴}$$

نکته: π رادیان، ۱۸۰ درجه و ۲۰۰ گراد می‌باشد.

مثال ۳: $\frac{\pi}{۵}$ رادیان چند درجه و چند گراد است.

راه حل: برای تبدیل به درجه به جای π رادیان، ۱۸۰ درجه را قرار می‌دهیم، پس :

$$\frac{\pi}{۵} \xrightarrow{\text{تبدیل به درجه}} \frac{۱۸۰^\circ}{۵} = ۳۶^\circ$$

ــ برای تبدیل به گراد به جای π رادیان، ۲۰۰ گراد را قرار می‌دهیم، پس :

$$\frac{\pi}{۵} \xrightarrow{\text{تبدیل به گراد}} \frac{۲۰۰}{۵} = ۴۰ \text{ گراد}$$

نکته : رادیان $\frac{\pi}{۱۸۰}$ = یک درجه و $\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}$ = یک رادیان. می‌باشد :

$$D = ۱^\circ \Rightarrow \frac{۱}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow ۱۸۰R = \pi \Rightarrow \quad R = \frac{\pi}{۱۸۰} \text{ رادیان}$$

$$R = ۱ \Rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{۱}{\pi} \Rightarrow D \times \pi = ۱۸۰ \Rightarrow D = \frac{۱۸۰^\circ}{\pi} \text{ درجه}$$

مثال ۴: ۳۰ درجه چند رادیان و $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان چند درجه است؟

حل: ۳۰ درجه برابر $\frac{\pi}{۶}$ رادیان است، زیرا :

$$۳۰^\circ = ۳۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۶} \text{ رادیان}$$

ــ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان برابر ۱۲۰ درجه است، زیرا :

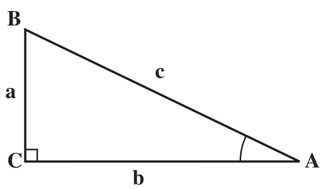
$$\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۱۲۰^\circ$$

ــ در روش دوم به جای π رادیان، ۱۸۰ درجه را قرار می‌دهیم پس $\frac{۲\pi}{۳}$ برابر با :

$$\text{یا} \quad \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲(۱۸۰)}{۳} = ۱۲۰^\circ$$

نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویه شکل ۹۹ـ۲ بنابر قرارداد داریم :



شکل ۹۹ـ۲

$$\text{سینوس زاویه‌ی } A = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } A}{\text{وتر}} \qquad \sin A = \frac{a}{c}$$

$$\text{کسینوس زاویه‌ی } A = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } A}{\text{وتر}} \qquad \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\text{تانژانت زاویه‌ی } A = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } A}{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } A} \qquad \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\text{کتانژانت زاویه‌ی } A = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } A}{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } A} \qquad \cot A = \frac{b}{a}$$

تمرین

۱. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC در شکل ۹۹ــ۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی B را به‌دست آورید.

$\sin B = \frac{\square}{\square}$, $\cos B = \frac{\square}{\square}$

$\tan B = \frac{\square}{\square}$, $\cot B = \frac{\square}{\square}$

۲. با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی، ABC در شکل ۹۹ــ۲ نسبت مثلثاتی برابر را به هم وصل کنید.

$a_۱)\ \sin A$	$b_۱)\ \sin B$
$a_۲)\ \cos A$	$b_۲)\ \cos B$
$a_۳)\ \tan A$	$b_۳)\ \tan B$
$a_۴)\ \cot A$	$b_۴)\ \cot B$

نتیجه: اگر دو زاویه متمم باشند $(\hat{A}+\hat{B}=۹۰^\circ)$ سینوس یکی برابر کسینوس دیگری و تانژانت یکی برابر با کتانژانت دیگری است (و برعکس)

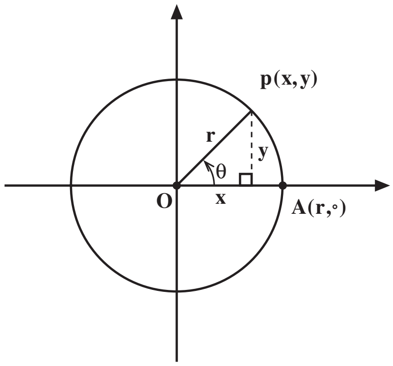
مثلاً :

$$۳۰^\circ + ۶۰^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin ۳۰ = \cos ۶۰^\circ \\ \cos ۳۰ = \sin ۶۰ \\ \tan ۳۰ = \cot ۶۰^\circ \\ \cot ۳۰ = \tan ۶۰ \end{cases}$$

$$۴۵^\circ + ۴۵^\circ = ۹۰ \Rightarrow \sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ \ , \ \tan ۴۵^\circ = \cot ۴۵^\circ$$

فعالیت ۱۳ــ۲

از نقطه‌ی A روی دایره‌ی شکل ۱۰۰ــ۲ در جهت مثبت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) شروع به حرکت می‌نماییم و به نقطه‌ای مانند $P(x,y)$ می‌رسیم. نسبت مثلثاتی $(A\hat{O}P)$ را بیابید.



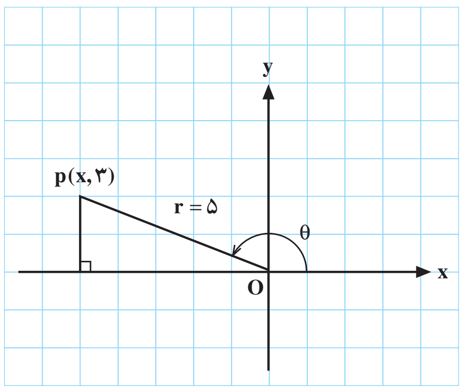
شکل ۱۰۰ــ۲

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

$$\sin\theta = \frac{\square}{r} \quad , \quad \cos\theta = \frac{\square}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\square}{\square} \quad , \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

مثال ۱: در شکل ۱۰۱ــ۲، $\sin\theta$، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ را بیابید.



شکل ۱۰۱ــ۲

حل:

ــ برای پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی ابتدا باید x_p را بیابیم.

ــ بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم :

$$r^۲ = x^۲ + y^۲ \Rightarrow ۵^۲ = x^۲ + ۳^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۶$$

ــ چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی دوم است، x_p منفی است.

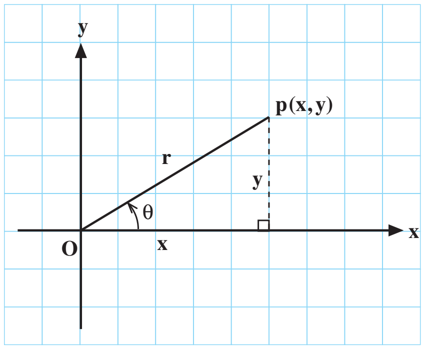
$$x = -۴$$

ــ بنابراین داریم :

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{۳}{۵} \; , \; \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-۴}{۵} \; , \; \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{۳}{-۴}$$

فعالیت ۱۴ــ۲

با توجه به تعاریف نسبت‌های مثلثاتی و شکل ۲ــ۱۰۲ جاهای خالی را پر کنید.



شکل ۲ــ۱۰۲

ــ بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

سینوس $\theta = \dfrac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی }\theta}{\text{وتر}}$

۱) $\sin\theta = \dfrac{\square}{r}$

کسینوس $\theta = \dfrac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی }\theta}{\text{وتر}}$

۲) $\cos\theta = \dfrac{\square}{r}$

تانژانت $\theta = \dfrac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی }\theta}{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی }\theta}$

۳) $\tan\theta = \dfrac{\square}{\square}$

کتانژانت $\theta = \dfrac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی }\theta}{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی }\theta}$

۴) $\cot\theta = \dfrac{\square}{\square}$

۵) $\sin^2\theta \quad \cos^2\theta = (\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = \dfrac{\square}{\square} = \bigcirc$

ــ با توجه به شماره‌های ۱ و ۲ و طرفین و وسطین و جایگزینی x و y داریم :

۶) $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

ــ با توجه به ۱ و ۲ و تعریف کتانژانت داریم :

۷) $\cot\theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\bigcirc}{\bigcirc}$

نکته: عبارات مقابل به ازای تمامی زوایای θ درست است بنابراین اتحاد مثلثاتی نامیده می‌شوند.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

تمرین ۱

آیا عبارت روبه‌رو یک اتحاد مثلثاتی است؟ چرا؟

$$\sin\theta + \cos\theta = 1$$

فعالیت ۱۵ــ۲

الف) با توجه به اتحادهای مثلثاتی جاهای خالی را پر کنید.

$$1)\ \sin^2\theta = 1 - \boxed{} \qquad 2)\ \cos^2\theta = 1 - \boxed{}$$

ب) با توجه به حاصل‌ضرب تانژانت در کتانژانت جای خالی را پر کنید.

$$3)\ \tan\theta \times \cot\theta = 1 \begin{cases} \nearrow \tan\theta = \dfrac{1}{\boxed{}} \\ \searrow \cot\theta = \dfrac{1}{\boxed{}} \end{cases}$$

ج) با فرض $\sin\theta \neq 0$ دو طرف تساوی را بر $\sin^2\theta$ تقسیم کنیم : جای خالی را پر کنید.

$$4)\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} \Rightarrow$$

$$1 + \boxed{} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

بنابراین :

ــ هرگاه با فرض $\cos\theta \neq 0$ دو طرف تساوی مقابل را بر $\cos^2\theta$ تقسیم کنیم، جای خالی را پر کنید.

$$5)\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow$$

$$1 + \boxed{} = \boxed{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

نتیجه: بنابر فعالیت (۱۵ـ۲ـ الف) داریم :

$$۱)\ \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta\ ,\ \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$$

بنابر فعالیت (۱۵ـ۲ـ ب) داریم :

$$۲)\ \tan\theta \times \cot\theta = 1 \ \text{یا}\ \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}\ \text{یا}\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

بنابر فعالیت (۱۵ـ۲ـ ج) داریم :

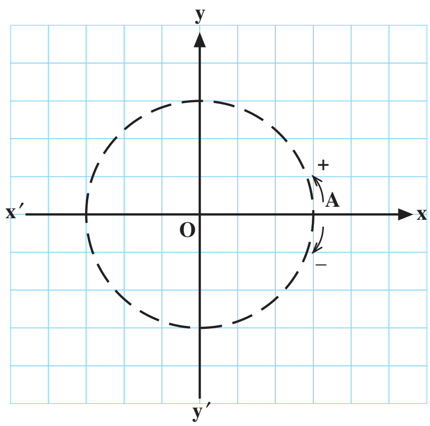
$$۳)\ 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\ \text{یا}\ \cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

بنابر فعالیت (۱۵ـ۲ـ د) داریم :

$$۴)\ 1+\cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}\ \text{یا}\ \sin^2\theta = \frac{1}{1+\cot^2\theta}$$

دایره‌ی مثلثاتی

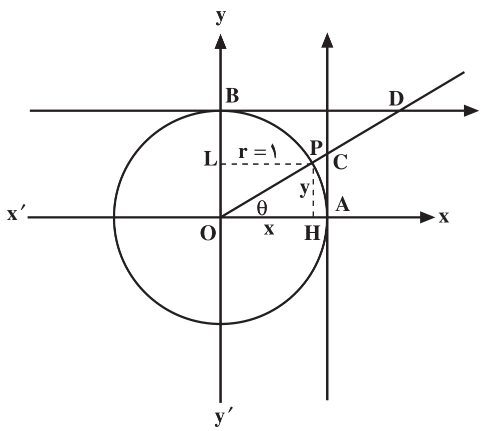
در دستگاه مختصات شکل ۱۰۳ـ۲ به کمک پرگار دایره‌ای به شعاع واحد (OA) رسم کنید. جهت دایره را خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر بگیرید. به این دایره، دایره‌ی مثلثاتی می‌گویند.



شکل ۱۰۳ـ۲

محورهای مثلثاتی

در شکل ۱۰۴ـ۲ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد و جهت مخالف عقربه‌های ساعت (دایره‌ی مثلثاتی) را مشاهده می‌کنید.



شکل ۱۰۴ـ۲