بخش دوم

فصل دوم

پیوستگی

هدف کلی

شناسایی توابع پیوسته و حل مسائل آن

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ تابع پیوسته را تعریف کند.

۲ــ با استفاده از قضیه‌های پیوستگی، حد تابع را در نقطه‌های موردنظر حساب کند.

۳ــ نقطه‌های ناپیوستگی تابع‌ها را تعیین کند.

۴ــ مسائل پیوستگی را به‌طور نسبی حل کند.

پیش آزمون (۲)

۱ــ واژه‌هایی که زیر آن‌ها خط کشیده شده است به چه معنی هستند؟

الف) راه‌آهن ایران از آذربایجان غربی به راه‌آهن اروپا پیوسته است.

ب) گرمای آب رادیاتور ماشین به‌طور ناپیوسته خنک می‌شود.

پ) کامپیوتر مسائل گسسته را مورد بررسی قرار می‌دهد.

ت) یک منحنی بدون بریدگی یا گسستگی، پیوسته است.

ث) واژه‌های وصل، فصل، متصل و منفصل به چه معنا هستند؟

۲ــ ویژگی عمده‌ی یک تابع چیست؟

۳ــ تابع f به صورت زیرتعریف می‌شود :

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

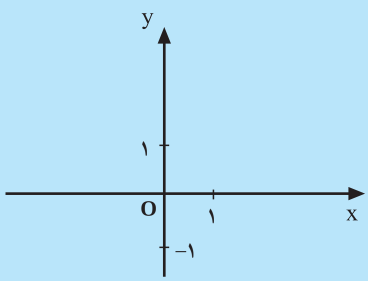
الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) نمودار این تابع در چه نقطه‌ای گسستگی دارد؟

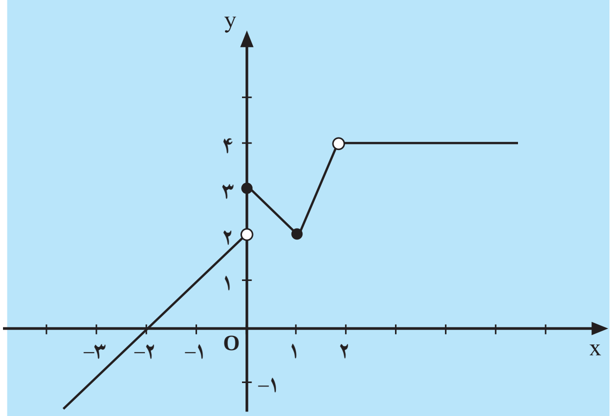
پ) نمودار این تابع از چند قسمت تشکیل شده است؟

۴ــ نمودار تابع f با ضابطه‌ی
$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x<۰ \\ ۳-x & ۰\le x<۱ \\ ۲x & ۱\le x<۲ \\ ۴ & x>۲ \end{cases}$$
، (شکل ۴۴ــ۲)، در چه نقاطی بریدگی دارد؟

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۴۳ــ۲



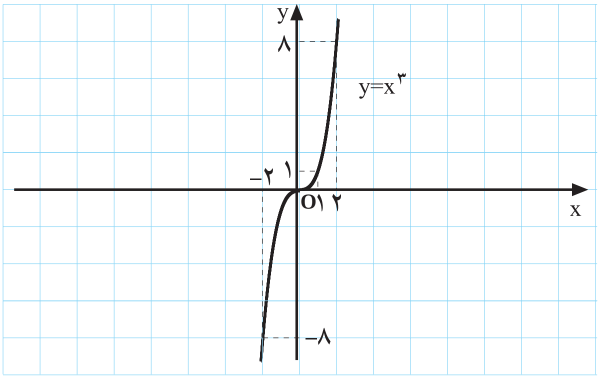
شکل ۴۴ــ۲

۲ــ۲ــ پیوستگی

پیوستگی تابع رابطه‌ی بسیار نزدیکی با مفهوم حد تابع دارد.

ابتدا پیوستگی تابع را در یک نقطه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}$ و نمودار آن را در شکل ۴۵ــ۲ درنظر می‌گیریم. این تابع برای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است، یعنی $D_f=\mathbb{R}$. بنابراین، برای هر $a\in\mathbb{R}$ نقطه‌ی $A(a,f(a))$ روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد. ضمناً همان‌طور که ملاحظه می‌شود این نمودار در هیچ نقطه‌ای بریدگی ندارد. به عبارت دیگر، منحنی $y=f(x)$ **یک‌تکه (یا پیوسته)** است. لذا، تابع $y=x^{۳}$ را **پیوسته** نامیم.



شکل ۴۵ــ۲

به‌طور کلی، اگر نمودار یک تابع در هیچ نقطه‌ای از دامنه‌ی تعریفش **بریدگی نداشته باشد پیوسته است.**

اکنون مقدار تابع f و حد آن را در یک نقطه، مثلاً، $x=۱$ ، به‌دست می‌آوریم:

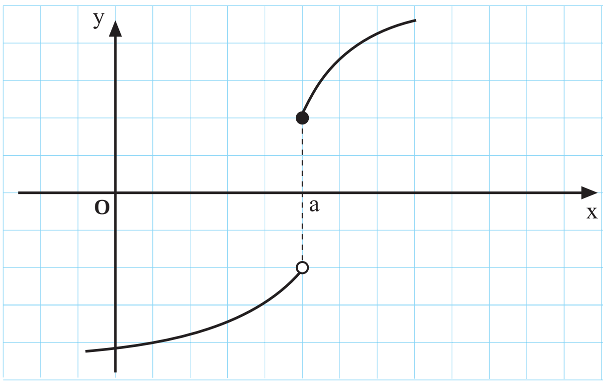
$$f(۱)=۱^{۳}=۱,\quad \lim_{x\to ۱}f(x)=\lim_{x\to ۱}(x^{۳})=۱^{۳}=۱$$

به‌طوری که دیده می‌شود در این مثال $\lim_{x\to ۱}f(x)=f(۱)=۱$.

این ویژگی در هر نقطه‌ی دیگر نیز برقرار است. به‌طور مثال:

$$\lim_{x\to ۲}f(x)=f(۲)=۲^{۳}=۸$$

$$\lim_{x\to -۱}f(x)=f(-۱)=(-۱)^{۳}=-۱$$



نمودار یک تابع ناپیوسته

شکل ۴۶ــ۲

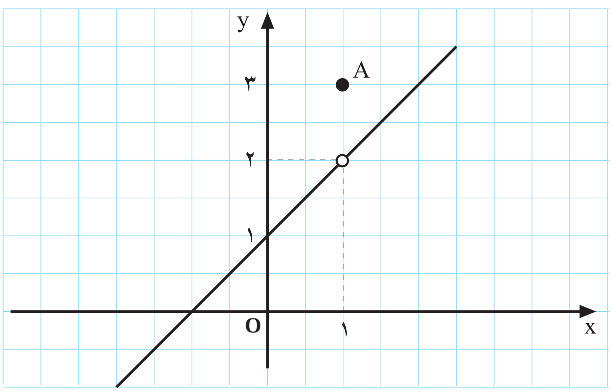
مثال ۲: تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱}\ , & x\neq ۱\\ ۳\ , & x=۱\end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم. دامنه‌ی این تابع $D_f=\mathbb{R}$ و با توجه به اتحاد مزدوج، برای هر $x\neq ۱$ ، یا $(x-۱)\neq ۰$ داریم:

$$f(x)=\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=x+۱$$

یعنی، $f(x)=\begin{cases}x+۱\ , & x\neq ۱\\ ۳\ , & x=۱\end{cases}$. نمودار این تابع را در شکل ۴۷ــ۲ ملاحظه می‌کنید. دیده می‌شود که این نمودار در $x=۱$ دارای **گسستگی (ناپیوستگی)** است. ضمناً، با توجه به ضابطه‌ی



شکل ۴۷ــ۲

تابع داریم :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

امّا، مقدار حد با مقدار $f(1)$ برابر نیست و همین باعث گسستگی در نمودار تابع شده است. اگر $f(1)$ را به‌جای ۳ عدد ۲ تعریف کنیم تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته خواهد شد.

با توجه به آنچه توضیح داده شد تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱: تابع f را در نقطه‌ی $x=a$ **پیوسته** گوییم، هرگاه :

۱) تابع f در $x=a$ تعریف شده باشد ؛

۲) وقتی $x\to a$ تابع f حد داشته باشد ؛

۳) حد تابع f وقتی $x\to a$ با مقدار تابع در a برابر باشد.

یعنی،

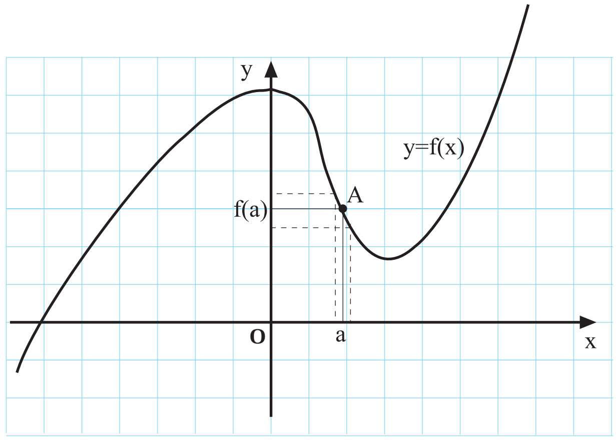
$$(*) \qquad \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

نکته‌ی ۱: رابطه‌ی (*) سه شرط (۱)، (۲) و (۳) را داراست. چرا؟

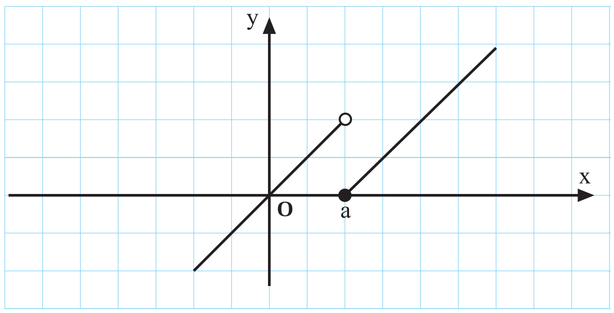
تعریف ۲: اگر f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد گوییم f پیوسته است. اگر $D_f=[a,b]$ برای پیوستگی f در a کافی است داشته باشیم $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (**پیوستگی از راست** در a) و برای پیوستگی در b کافی است داشته باشیم $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ (**پیوستگی از چپ** در b) (شکل ۴۹ــ۲).

نکته‌ی ۲: اگر تابع f پیوسته باشد و $a\in D_f$ ، اولاً f در a حد دارد، ثانیاً این حد مساوی $f(a)$ است. پس، برای به‌دست آوردن حد f، وقتی $x\to a$ ، کافی است در ضابطه‌ی تابع f به‌جای متغیر مقدار a را قرار دهید.

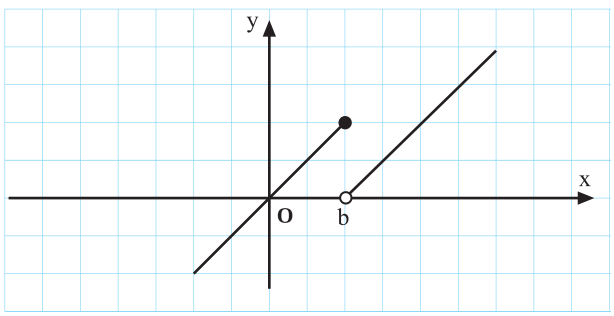
۱ــ۲ــ۲ــ قضیه‌های پیوستگی: همان‌طور که تاکنون متوجه شده‌اید تعیین حد تابع به‌وسیله‌ی جدول یا رسم نمودار دارای مشکلاتی است. امّا برای تابع‌هایی که پیوسته هستند مقدار حد، وقتی x به نقطه‌ای از دامنه‌ی تعریف میل می‌کند، به‌سادگی به‌دست می‌آید. لذا، شناختن تابع‌های پیوسته در این مورد کمک شایانی می‌کند.



شکل ۴۸ــ۲



(الف)



(ب)

شکل ۴۹ــ۲

در زیر چند قضیه در مورد تابع‌های پیوسته بیان می‌کنیم. اثبات این قضیه‌ها با توجه به تعریف یک تابع پیوسته آسان است ولی هدف ما استفاده و به‌کار بردن این قضیه‌ها می‌باشد.

قضیّه‌ی ۱: فرض کنید $a_۰$ ، $a_۱$ ،...، a_n عددهای حقیقی باشند. تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۰ \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

که یک **تابع چندجمله‌ای** نامیده می‌شود، بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

قضیّه‌ی ۲: تابع‌های $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

قضیّه‌ی ۳: اگر تابع‌های f و g در $x = a$ پیوسته باشند تابع‌های $f + g$ و $f - g$ نیز در $x = a$ پیوسته‌اند.

نکته: قضیه‌ی ۳ برای هر تعداد با پایان (متناهی) تابع پیوسته برقرار است.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۱)

۱) اگر c یک عدد ثابت باشد تابع ثابت $f(x) = c$ پیوسته است. درنتیجه، مثلاً می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \to ۱} ۲ = ۲, \quad \lim_{x \to -۱} \sqrt{۳} = \sqrt{۳}, \quad \lim_{x \to a} c = c.$$

۲) تابع $f(x) = ۲x + ۱$ پیوسته است، لذا در هر نقطه حد دارد. مثلاً،

$$\lim_{x \to -۱} (۲x + ۱) = ۲(-۱) + ۱ = -۱,$$

$$\lim_{x \to \sqrt{۳}} (۲x + ۱) = ۲\sqrt{۳} + ۱.$$

۳) اگر n عددی طبیعی باشد و $f(x) = x^n$ این تابع پیوسته است. لذا، مثلاً، داریم:

$$\lim_{x \to -۲} x^۳ = (-۲)^۳ = -۸, \quad \lim_{x \to -۱} x^۵ = (-۱)^۵ = -۱.$$

۴) رابطه‌های زیر نیز از پیوستگی تابع‌های چندجمله‌ای نتیجه می‌شوند.

$$\lim_{x \to ۳} (۲x^۳ - x^۲ + ۷x - ۵) = ۲(۳)^۳ - (۳)^۲ + ۷(۳) - ۵$$

$$= ۵۴ - ۹ + ۲۱ - ۵ = ۶۱$$

$$\lim_{x \to \sqrt{۲}} (۲x^۴ - x^۲ + ۵) = ۲(\sqrt{۲})^۴ - (\sqrt{۲})^۲ + ۵$$

$$= ۸ - ۲ + ۵ = ۱۱.$$

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌های ۲ و ۳)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \sin x = \sin \frac{\pi}{۲} = ۱$$

$$\lim_{x \to ۰} \cos x = \cos ۰ = ۱$$

با توجه به پیوستگی حاصل‌جمع دو تابع پیوسته می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \to \pi} (\cos x + \sin x) = \cos \pi + \sin \pi = -۱ + ۰ = -۱$$

$$\lim_{x \to \pi} (\cos x + x) = \cos \pi + (\pi) = -۱ + \pi$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} (\cos^۲ x - ۲\sin x) = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ - ۲\sin(\frac{\pi}{۴})$$

$$= \frac{۱}{۲} - ۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲} - \sqrt{۲}$$

قضیّه‌ی ۴: اگر تابع‌های f و g در $x=a$ پیوسته باشند تابع $(fg)(x)=f(x).g(x)$ در $x=a$ پیوسته است.

نکته: قضیه‌ی ۴ برای تعدادی با پایان (متناهی) تابع پیوسته برقرار است.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۴)

۱) با استفاده از پیوستگی حاصل‌ضرب دو تابع پیوسته، می‌توان گفت که تابع‌های زیر پیوسته‌اند:

الف) $f(x)=x\sin x$ ب) $g(x)=x^2\cos x$

۲) با توجه به قضیه‌ها می‌توان نوشت:

الف) $\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-8x+1)\sin x=(0-0+1)\sin 0$

$=1\times 0=0$

ب) $\lim\limits_{x\to 3}\left[(2x+1)(x^2-4)(x+3)\right]$

$=(2\times 3+1)(3^2-4)(3+3)$

$=7\times 5\times 6=210$

پ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos x(1+\sin x)=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$

$=\frac{1}{2}\times(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)$

قضیّه‌ی ۵: اگر تابع‌های f و g در $x=a$ پیوسته باشند تابع با ضابطه‌ی $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ در $x=a$، به شرط آن‌که $g(a)\neq 0$، پیوسته است.

مثال ۱: تابع $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، وقتی $k\in Z$ و $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ پیوسته است.

مثال ۲: تابع $f(x)=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$، وقتی $k\in Z$ و $x\neq k\pi$، پیوسته است.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۵)

۱) تابع‌های زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند (زیرا، تابع‌هایی که در مخرج کسرها قرار دارند پیوسته و همواره غیرصفرند و تابع‌هایی که در صورت کسرها قرار دارند پیوسته‌اند):

الف) $f(x)=\frac{2x^2-1}{1+x^2}$

ب) $g(x)=\frac{x^2-8x-3}{2+\sin x}$

پ) $h(x)=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$

۲) با توجه به پیوستگی تابع‌های مثال بالا، می‌توان نوشت:

الف) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-1}{1+x^2}=\frac{2(-1)^2-1}{1+(-1)^2}=\frac{2-1}{1+1}=\frac{1}{2}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-8x-3}{2+\sin x}=\frac{0^2-8\times 0-3}{2+\sin 0}=\frac{-3}{2}=-1/5$

پ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}=\frac{\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{2}}{1+\cos^2\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{\pi}{2}\times 1}{1+0}=\frac{\pi}{2}$

قضیّه‌ی ۶: اگر تابع f در a و تابع g در f(a) پیوسته باشد تابع gof در a پیوسته است.

۲ـ۲ـ۲ـ مسائل پیوستگی: دراین‌جا مثال‌هایی از پیوستگی تابع‌ها، می‌آوریم. نحوه‌ی حل این مثال‌ها می‌تواند نمونه‌ای برای حل مسائل مشابه باشد.

مثال‌ها

۱) تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<2\\ x^2-5, & x\geq 2\end{cases}$$

آیا تابع f در $x=2$ پیوسته است؟

۲) تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}-2x+6\ , & x>2\\ |2x-2|\ , & x<2\end{cases}$ داده شده است. f(۲) را چنان تعریف کنید که تابع f در $x=2$ پیوسته باشد.

۳) تابع f با ضابطه‌ی زیرتعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases}2x-b, & x\leq 2\\ x^3-2, & x>2\end{cases}$$

عدد b را چنان تعیین کنید که تابع f در نقطه‌ی $x=2$ پیوسته باشد. جواب خود را امتحان کنید.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۶)

۱) با توجه به پیوستگی تابع‌های چندجمله‌ای و تابع‌های sinx و cosx، می‌توان گفت که تابع‌های زیر پیوسته‌اند :

الف) $\sin(x-\frac{\pi}{2})$ ب) $\cos x^2$ پ) $\cos(2x+\pi)$

۲) با توجه به پیوستگی تابع‌های بالا داریم :

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x-\frac{\pi}{2})=\sin(0-\frac{\pi}{2})=-1$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^2=\cos 0^2=\cos 0=1$

پ) $\lim\limits_{x\to \pi}\cos(2x+\pi)=\cos 3\pi=-1$

حل ۱: اولاً $f(2)=2^2-5=-1$ ، ثانیاً، با توجه به پیوسته بودن هر تابع چندجمله‌ای،

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(1-x)=1-2=-1$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2-5)=2^2-5=-1$$

بنابراین، $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-1$ و تابع f در $x=2$ پیوسته است.

حل ۲: داریم : $\lim\limits_{x\to 2^+}-2x+6=2$ و $\lim\limits_{x\to 2^-}|2x-2|=2$.

بنابراین، کافی است تعریف کنیم :

$$f(2)=2.$$

حل ۳: صرف‌نظر از تعریف این تابع، چون هر تابع چندجمله‌ای پیوسته است، داریم :

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x-b)=2\times 2-b=4-b$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}x^3-2=2^3-2=6$$

بنابراین، باید داشته باشیم :

$$4-b=6\quad\Rightarrow\quad b=-2$$

واضح است که به‌ازای $b=-2$ داریم :

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=4-(-2)=6=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$$

یعنی تابع f در $x=2$ پیوسته است.

۴) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$$f(x)=\begin{cases}۳x+۲ & x<-۱\\ x^{۲}-c & x>-۱\end{cases}$$

هرگاه تابع f در $x=-۱$ پیوسته باشد $f(-۱)$ و c را بیابید.

۵) تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases}۲x-a & x<۲\\ ۵ & x=۲\\ x^{۲}+b & x>۲\end{cases}$$

عددهای a و b را چنان تعیین کنید که تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد.

حل ۴ : کافی است c را چنان تعیین کنیم که تابع f در ۱− حد داشته باشد و بعد $f(-۱)$ را مقدار این حد تعریف کنیم.

$$\lim_{x\to -۱^{-}} f(x)=۳(-۱)+۲=-۱$$

$$\lim_{x\to -۱^{+}} f(x)=(-۱)^{۲}-c=۱-c$$

بنابراین، باید داشته باشیم :

$$۱-c=-۱ \Rightarrow c=۲ \Rightarrow f(-۱)=-۱$$

حل ۵: اولاً، $\lim_{x\to ۲^{-}} f(x)=۲\times ۲-a=۴-a$. ثانیاً، $\lim_{x\to ۲^{+}} f(x)=۲^{۲}+b=۴+b$. بنابراین، باید داشته باشیم :

$$۴-a=۵ \Rightarrow a=-۱$$

$$۴+b=۵ \Rightarrow b=۱$$

پیوستگی تابع f را در $x=۲$ ، با توجه به مقدارهایی که برای a و b به‌دست آمد، امتحان کنید.

تمرین ۷ــ۲

۱ــ پیوستگی یا ناپیوستگی هریک از تابع‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده تعیین کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۳x-۱\ , & x\geq ۱\\ ۴-x^{۲}\ , & x<۱\end{cases}$ (در $x=۱$)

ب) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{۲}x\ , & x>۲\\ x^{۲}-۲x\ , & x\leq ۲\end{cases}$ (در $x=۲$)

پ) $f(x)=\begin{cases}x^{۲}\ , & x\leq ۰\\ -x^{۲}\ , & x>۰\end{cases}$ (در $x=۰$)

ت) $f(x)=\begin{cases}|x-۲|\ , & x\neq ۲\\ ۱\ , & x=۲\end{cases}$ (در $x=۲$)

ث) $f(x)=\begin{cases}x-۱\ , & x>-۱\\ -۲\ , & x=-۱\\ ۲x\ , & x<-۱\end{cases}$ (در $x=-۱$)

۲ــ اگر $f(x)=\begin{cases}x+۲\ , & x<۱\\ a-۲x\ , & x>۱\end{cases}$ ، مقدار a و $f(۱)$ چقدر باشد تا این تابع در $x=۱$ پیوسته باشد؟

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

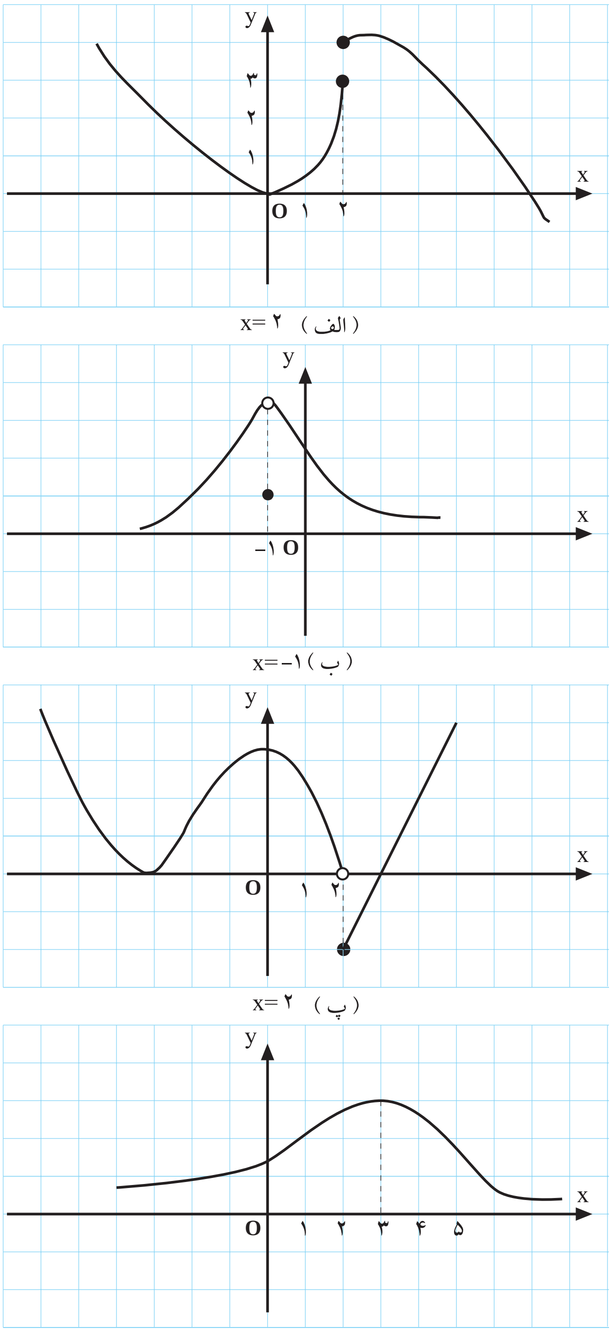
$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۲a\ , & x>-۲\\ ۴\ , & x=-۲\\ ۳x-۲b\ , & x<-۲\end{cases}$$

عددهای a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در $x=-2$ پیوسته باشد.

۴ـ آیا تابع f با ضابطه‌ی زیر در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2 & , \quad x>0 \\ -x^2+1 & , \quad x\leq 0 \end{cases}$$

۵ـ با توجه به نمودارهای تابع‌های شکل ۵۰ـ۲، پیوستگی راست، پیوستگی چپ، و درنتیجه، پیوستگی در نقطه‌های مشخص شده را تعیین کنید.



شکل ۵۰ـ۲

آزمون پایانی (۲)

۱ــ مجموعه‌ی نقطه‌هایی را که در آن‌ها تابع زیر پیوسته است، تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x-2}$ در چه نقطه‌هایی ناپیوسته است؟

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{|2-x|}{x-2}$ داده شده است. f(۲) را چنان تعریف کنید که در $x=2$ از چپ پیوسته باشد.

۴ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^3-5x+4}{x^2-3x+2}$ داده شده است، f(۱) را چنان تعریف کنید که تابع f در $x=1$ پیوسته باشد.

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی