

بخش دوم

فصل سوم

تابع

هدف کلی

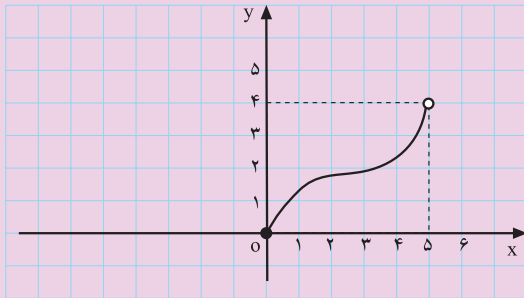
مفهوم تابع و ویژگی‌های مربوط به آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

- ۱- تابع را تعریف کند ؛
- ۲- تابع با ضابطه را تعریف کند ؛
- ۳- تابع را به صورت جدول نمایش دهد ؛
- ۴- تابع را با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهد و دامنه و برد آن را مشخص کند ؛
- ۵- تابع را از روی نمودار تشخیص دهد و دامنه و برد آن را مشخص کند.

پیش‌آزمون (۳)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۳)



نمودار ۲-۶۲

$$f(-2) = ?$$

۱- از رابطه‌های زیر کدام تابع است؟ چرا؟

الف) $3x + 5y^2 = 7$

ب) $|x| + |y| = 9$

۲- اگر $f(x) = -2x^2 + 3$ و $D_f = \{0, -1, 2, 3, 5\}$

باشد، تابع f را به صورت جدول و زوج مرتب بنویسید.

۳- تابع f به صورت زیر مفروض است. نمایش نموداری

آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & 1 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x < 5 \\ 2/5 & 5 \leq x < 9 \end{cases}$$

۴- دامنه و برد تابع f از نمودار ۲-۶۲ را بیابید.

$$D_f = \dots\dots\dots$$

$$R_f = \dots\dots\dots$$

۵- هرگاه $f(x) = ax^2 + 3x + 7$ و $f(2) = 11$ باشد

$f(-2)$ را بیابید.

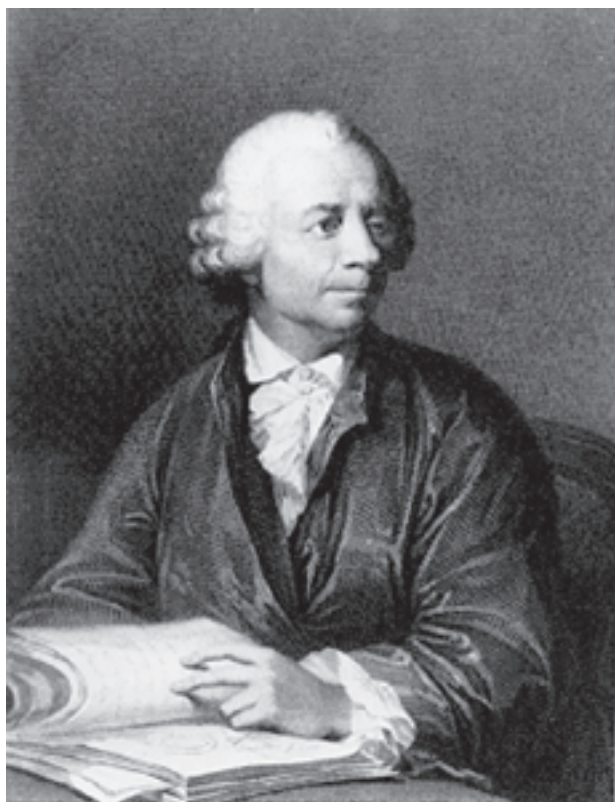
۲-۳- تابع

مقدمه: بیش‌تر مطالب علمی از آغاز پیدایش تاکنون دچار تغییر و تکامل بوده است، مفهوم تابع نیز از این امر مستثنی نبوده است.



شکل ۲-۶۳- لایب نیتز

کلمه‌ی تابع را در ریاضیات اولین بار لایب نیتز، در سال ۱۶۹۴ مطرح و سپس لئونارد اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) آن را به‌طور دقیق تعریف کرد. اما مفهوم کلی تابع که در آن مجموعه‌های دلخواهی به‌عنوان دامنه و برد در نظر گرفته می‌شود از طرف ریچارد ددکیند (۱۸۳۱-۱۹۱۶) بیان شد. به هر حال، یکی از مفاهیم اساسی ریاضی که در سایر علوم نیز نقش چشم‌گیری ایفا می‌کند تابع است. در این بخش ضمن معرفی چند تابع، مشخص نمودن تابع‌ها با ضابطه، جدول، نمودار و زوج مرتب را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۲-۶۴- اویلر

۱-۲-۳- تابع با ضابطه (فرمول): مقادیر یک متغیر غالباً به مقادیر متغیر دیگری بستگی دارد، مثلاً:
- مساحت دایره (S) به شعاع (r) آن بستگی دارد.

$$S(r) = \pi r^2$$

- حجم (V) مکعب با ابعاد (x) آن متناظر است.

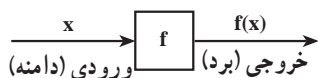
$$V(x) = x^3$$

- افزایش طول (L) فنر با وزنه‌ای (w) که به آن آویزان

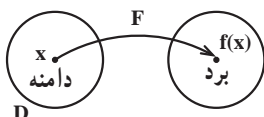
$$L = L_0 + KW$$

می شود متناظر است.

(L_0 طول اولیه فنر و K ضریب افزایش طول فنر)

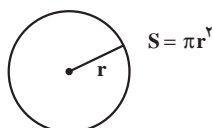


شکل ۲-۶۵- نمودار عمل یک تابع f



شکل ۲-۶۶

$$y = f(x)$$



شکل ۲-۶۷

$$f: D \rightarrow R$$

– میزان هزینه‌ی خانوار به درآمد خانوار بستگی دارد. با توجه به مثال‌های بالا می‌بینیم که تابع به هر عضو از مجموعه اول، عضوی از مجموعه‌ی دوم را نسبت می‌دهد. بنابراین، تابع (f) ماشینی است که به هر ورودی مجاز، یک خروجی نسبت دهد (شکل ۲-۶۵).

ورودی‌ها دامنه‌ی تابع (D_f) را تشکیل می‌دهند و خروجی‌ها برد آن را (R_f).

تعریف: تابع f از مجموعه‌ی D به مجموعه‌ی R قاعده‌ای است که به هر عنصر از x از مجموعه‌ی D به نام دامنه، عنصر منحصر به فرد $f(x)$ از مجموعه‌ی R به نام برد را نظیر می‌کند. مقدار متناظر x را با $f(x)$ نشان می‌دهند و این وابستگی به صورت مقابل نوشته می‌شود (بخوانید: y مساوی f یکس).

نکته: در مسائل مختلف ممکن است بر حسب نیاز متغیر x یا تابع y با نمادهای دیگری بیان شود.

مثال: شعاع دایره (r) متغیر و مساحت دایره (S) تابع است (شکل ۲-۶۷) و همواره داریم:

قرارداد: وقتی f یک تابع با دامنه‌ی D و برد R باشد،

می‌نویسیم:

همچنین هرگاه، x عضو دلخواهی از دامنه باشد (ورودی) و $f(x)$ (خروجی) مقدار تابع، به ازای x داریم:

$x \xrightarrow{f} f(x)$ یا $y = f(x)$

$f: D \rightarrow R$ یا $f: D \rightarrow R$
 $y = f(x)$ $x \rightarrow f(x)$

به طور کلی می‌توان نوشت:



شکل ۲-۶۸

مثال: تابعی بنویسید که مساحت هر مربع را به طول ضلع آن وابسته کند.

$$S = x^2$$

حل: مساحت مربع با طول ضلع x برابر است با:

$$S: (\circ, +\infty) \xrightarrow{x \rightarrow x^2} \mathbb{R}^+$$

– طول ضلع x می‌تواند هر عدد حقیقی مثبت را اختیار کند.

پس :

$$S: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

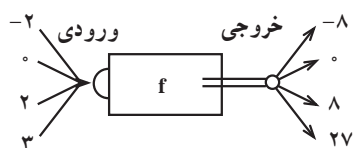
$$S(x) = x^2$$

$$-2 \xrightarrow{f} (-2)^3 = -8$$

$$0 \rightarrow 0$$

$$2 \rightarrow 8$$

$$3 \rightarrow 27$$



شکل ۲-۶۹

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3$$

$$R_f = \{-8, 0, 8, 27\} \text{ (برد)}$$

مثال: اگر $D = \{-2, 0, 2, 3\}$ باشد، ماشین f را چنان

طراحی کنید که عضو دامنه (D) را به مکعب تبدیل کند، سپس ضابطه‌ی f و عضوهای برد آن را بنویسید.

حل: تابع f هر عضو (x) را به مکعبش (x^3) تبدیل

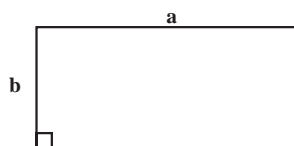
می‌کند، یعنی :

– در شکل ۲-۶۹ طراحی ماشین f را مشاهده می‌کنید.

با توجه به اعداد ورودی و خروجی خواهیم داشت :

با توجه به خروجی، برد آن برابر است با :

تذکر: اگر طول مستطیلی برابر a و عرض آن برابر b باشد :



شکل ۲-۷۰

$$S = a \times b$$

$$P = 2(a + b)$$

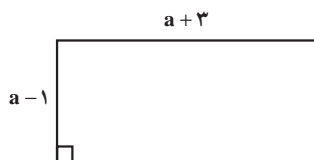
– مساحت (S) مستطیل برابر است با :

– محیط (P) مستطیل برابر است با :

مثال : هرگاه ابعاد مستطیلی برابر $a-1$ و $a+3$ باشد،

محیط و مساحت آن را به صورت ضابطه بنویسید، سپس محیط و مساحت مستطیل را به ازای $a=4$ متر حساب کنید (شکل

۲-۷۱).



شکل ۲-۷۱

حل: با توجه به فرمول محیط مستطیل داریم:

$$P(a) = 2(a - 1 + a + 3)$$

$$\Rightarrow P(a) = 2(2a + 2) = 2(2)(a + 1)$$

– ضابطه‌ی محیط برحسب a :

$$\Rightarrow P(a) = 4(a + 1)$$

$$P(4) = 4(4 + 1) = 20 \text{ متر}$$

– به ازای متر $a = 4$ داریم:

$$S(a) = (a - 1)(a + 3)$$

– با توجه به فرمول مساحت (S) داریم:

$$\Rightarrow S(a) = a^2 + 3a - a - 3$$

– حاصل ضرب دو عامل:

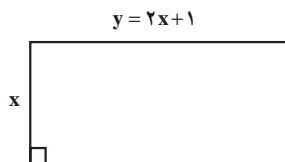
$$\Rightarrow S(a) = a^2 + 2a - 3$$

– ضابطه‌ی مساحت برحسب a :

$$S(4) = 4^2 + 2(4) - 3 = 16 + 8 - 3$$

– به ازای متر $a = 4$ داریم:

$$\Rightarrow S(4) = 21 \text{ متر مربع}$$



شکل ۲-۷۲

فعالیت ۲-۵

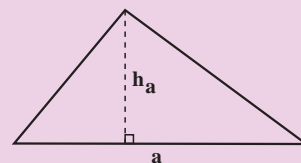
با توجه به شکل ۲-۷۲ اگر مساحت را با $S(x)$ و محیط را با $P(x)$ نشان دهیم محیط و مساحت را به صورت ضابطه بنویسید.

الف) $P(x) =$

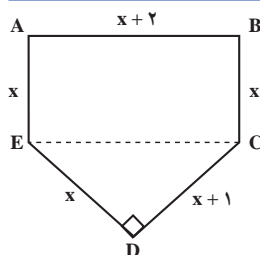
ب) $S(x) =$

نکته: مساحت مثلث با ارتفاع h و قاعده‌ی a برابر است با حاصل ضرب نصف ارتفاع در قاعده‌ی آن، یعنی:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$



شکل ۲-۷۳



شکل ۲-۷۴

مثال:

الف) با توجه به شکل ۲-۷۴ ضابطه‌ای برای $p(x)$ و $S(x)$

بنویسید.

ب) به ازای $x = 3$ مقادیر $P(3)$ و $S(3)$ را محاسبه کنید.

$$P(x) = x + x + 2 + x + x + 1 + x$$

حل الف: محیط برابر است با مجموع اضلاع:

$$\Rightarrow P(x) = 5x + 3$$

ضابطه ی محیط بر حسب متغیر x :

$$S(x) = x(x+2) + \frac{1}{2}(x)(x+1)$$

مساحت مستطیل ABCE + مساحت مثلث قائم الزاویه ی CDE = مساحت کل

$$\Rightarrow S(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

– پس از عملیات ضرب داریم:

$$\Rightarrow S(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$$

– با ساده کردن عبارت ضابطه ی مساحت بر حسب متغیر x

را به دست می آوریم.

$$P(3) = (5 \times 3) + 3 = 18$$

حل ب: به ازای $x = 3$ محیط برابر است با:

$$S(3) = \frac{3}{2}(3)^2 + \frac{5}{2}(3) = \frac{27}{2} + \frac{15}{2}$$

– به ازای $x = 3$ مساحت برابر است با:

$$\Rightarrow S(3) = \frac{27+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

مثال: نرخ کرایه ی اتومبیلی برای هر کیلومتر طی مسافت

۲۵۰ تومان به اضافه ی ورودی ثابت ۵۰۰۰ تومان است. بنابراین کرایه ی اتومبیل تابعی از مسافت (x) طی شده بر حسب کیلومتر می باشد. ضابطه ی تابع را بنویسید. سپس کرایه اتومبیل را به ازای طی مسافت ۶۰ کیلومتر حساب کنید.

حل: $f(x)$ ضابطه ی تابع

مسافت طی شده \times قیمت + ورودی ثابت = $f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = 5000 + 250x$$

– به ازای $x = 60$ داریم:

$$f(60) = 5000 + 250 \times 60 = 5000 + 15000$$

$$\Rightarrow f(60) = 20000 \text{ تومان}$$

مثال: ارتفاع استوانه ای ۳۰ سانتی متر است و می دانیم

که حجم یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعده R از رابطه ی $V = \pi R^2 h$ حساب می شود. اگر $10 \leq R \leq 20$ سانتی متر تغییر کند حجم استوانه بین چه مقادیری تغییر می کند؟

حل: $V(R) = \pi R^2 h$ ، $h = 3^\circ \text{cm}$

$$\left. \begin{aligned} V(1^\circ) &= \pi(1^\circ)^2(3^\circ) = 3^\circ \pi \\ V(2^\circ) &= \pi(2^\circ)^2(3^\circ) = 12^\circ \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

سانتی متر مکعب $3^\circ \pi \leq V \leq 12^\circ \pi$

تمرین

طول مستطیلی برابر $2x+1$ و عرض آن برابر $x+5$ است. محیط و مساحت آن را بر حسب x بنویسید.

$P(x) = \dots\dots\dots$

$S(x) = \dots\dots\dots$

فعالیت ۶-۲

اگر $x^2 + y^2 = 1^\circ$ باشد :

الف) به ازای $x=1$ مقادیر y را بیابید.

ب) با توجه به مقادیر y ، آیا رابطه $x^2 + y^2 = 1^\circ$ ضابطه

یک تابع است؟

مثال: آیا رابطه $|y| = 5x + 2$ یک تابع را مشخص

می کند؟

☐ خیر ☐ بله

الف) به ازای $x=1$ مقادیر y را بیابید.

$$x=1 \Rightarrow |y| = 5 \times 1 + 2 = 7 \Rightarrow y = \pm 7$$

ب) آیا ضابطه $|y| = 5x + 2$ ، ضابطه y یک تابع است؟

حل: ب) خیر، زیرا طبق قسمت الف) به ازای $x=1$ دو

مقدار برای y داریم.

تمرین

کدام یک از ضابطه های زیر، مربوط به یک تابع است؟

۱) $x^2 + 2y^3 = 54$

۲) $3x^2 - 5y = 8$

سؤال: چه موقع یک معادله با دو متغیر ضابطه y یک تابع

را مشخص می‌کند؟

جواب: برای این که یک رابطه‌ی بین x و y ضابطه‌ی یک تابع را مشخص کند باید برای هر داده x (ورودی) فقط یک مقدار برای y به دست آید.

مثال ۱: تعیین کنید معادله‌ی مقابل برحسب x ضابطه‌ی یک تابع است.

$$y^2 = x + 1$$

حل: به ازای $x = 0$ مقدار y را حساب می‌کنیم:

$$y^2 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

– بنابراین تابع نیست زیرا به ازای $x = 0$ دو مقدار برای y به دست آوردیم.

مثال ۲: تعیین کنید معادله‌ی مقابل برحسب x ضابطه‌ی یک تابع است.

$$-3x + 5y = 2$$

حل: y را برحسب x مرتب می‌کنیم، یعنی:

$$5y = 2 + 3x$$

– چون به ازای هر x دقیقاً یک y به دست می‌آید معادله ضابطه‌ی تابع است.

$$\Rightarrow y = \frac{2 + 3x}{5}$$

مثال ۳: آیا معادله‌ی مقابل برحسب x ضابطه‌ی تابع است؟

چرا؟

$$|y| + x^2 = 20$$

حل: به ازای $x = 2$ داریم:

$$|y| + 2^2 = 20 \Rightarrow |y| = 20 - 4 \Rightarrow |y| = 16$$

– بنابراین ضابطه‌ی تابع نیست، زیرا به ازای $x = 2$ دو مقدار برای y داریم:

$$\Rightarrow y = \pm 16$$

۲-۳-۲- تابع با جدول

مثال ۱: نمره‌ی ۵ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس در

امتحان ریاضی طبق جدول ۲-۴ داده شده است.

به ازای هر شماره‌ی دانش‌آموزی یک نمره از آن درس داریم

جدول ۲-۴

شماره‌ی دانش‌آموز	۱	۲	۳	۴	۵
نمره‌ی دانش‌آموز	۱۸/۵	۱۵	۱۷	۱۲/۵	۱۹

مثال ۲: در جدول ۲-۵، x تعداد کارگرهای یک شرکت و $f(x)$ هزینه‌ی این شرکت است:

جدول ۲-۵

x	۰	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰

$$f(2) = 20$$

الف) هزینه‌ی شرکت به ازای ۲ کارگر را محاسبه کنید.

ب) $f(0)$ را بیابید ($f(0)$ هزینه‌ی شرکت بدون استخدام کردن کارگر است)

$$f(0) = 10 \quad \text{مقدار ثابت هزینه}$$

ج) آیا می‌توانید ضابطه‌ای برای هزینه‌ی این شرکت بنویسید؟

$$f(0) = 10$$

$$f(1) = 15 = 10 + 5 = 10 + 5 \times 1$$

حل: هزینه به ازای یک نفر

$$f(2) = 20 = 10 + 10 = 10 + 5 \times 2$$

– هزینه به ازای دو نفر

$$f(3) = 25 = 10 + 15 = 10 + 5 \times 3$$

– هزینه به ازای ۳ نفر

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(n) = 10 + 5n \end{array}$$

– هزینه به ازای n نفر

در نتیجه ضابطه‌ی هزینه‌ی شرکت به ازای x کارگر برابر

است با:

$$f(x) = 10 + 5x$$

فعالیت ۲-۷

با توجه به جدول ۲-۶ هرگاه x مسافت طی شده‌ی یک

تاکسی تلفنی و $L(x)$ هزینه‌ی آن باشد:

الف) احمد برای رفتن مسافت ۳ کیلومتری چه هزینه‌ای را

می‌پردازد؟

ب) مقدار ثابت هزینه‌ی تاکسی تلفنی چقدر است؟

ج) میزان هزینه‌ی احمد به ازای ۷ کیلومتر چقدر است؟

جدول ۲-۶

x	۰	۱	۲	۳
$L(x)$	۷	۱۱	۱۵	۱۹

$$L(3) =$$

$$L(0) =$$

$$L(7) =$$

د) به ازای چه مسافتی احمد بایستی ۴۷ تومان بپردازد؟

ه) هرگاه ضابطه‌ی مقابل مفروض باشد، مراحل آن را

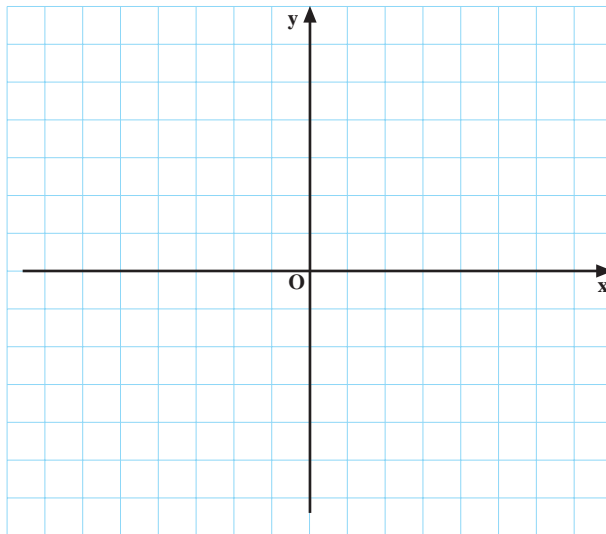
بنویسید.

$$L(x) = 47$$

$$L(x) = 7 + 4x$$

جدول ۲-۷

x	۰	۳	۵
y			



نمودار ۲-۷۵

☐ بلی ☐ خیر

جدول ۲-۸

x	۱	۲	۳	۴	۵
f(x)	۱۸/۵	۱۵	۱۷	۱۲/۵	۱۹

$$f = \{(1, 18/5), (2, 15), (3, 17), (4, 12/5), (5, 19)\}$$

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$R_f = \{18/5, 15, 17, 12/5, 19\}$$

۳-۲-۳- تابع با زوج مرتب

فعالیت ۲-۸

معادله‌ی $y = x - 3$ مفروض است.

الف) وقتی x از مجموعه‌ی $A = \{0, 3, 5\}$ باشد، جدول

۲-۷ را کامل کنید و سپس نمودار $y = x - 3$ را رسم کنید.

ب) آیا می‌توان معادله‌ی $y = x - 3$ را به صورت

$$f = \{(x, x - 3) | x \in \mathbb{R}\}$$

ج) تابع f را به ازای $x \in A$ به صورت زوج‌های مرتب

بنویسید.

مثال ۱: نمره‌ی ۵ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس با جدول

۲-۸ مشخص شده است.

الف) تابع f را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) دامنه‌ی تابع f را بنویسید.

ج) برد تابع f را بنویسید.

نتیجه: مجموعه‌ی مختص‌های اول یک تابع را دامنه و مجموعه‌ی مختص‌های دوم آن را برد می‌نامیم.

مثال ۲: دامنه و ضابطه‌ی تابع f مفروض است:

$$f(x) = 4x - 3, \quad D_f = \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0, 1, 3\right\}$$

الف) f را با جدول ۲-۹ مشخص کنید.

جدول ۲-۹

x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	3
$f(x)$	-11	-5	-3	1	9

ب) R_f را به دست آورید.

$$R_f = \{-11, -5, -3, 1, 9\}$$

تعریف: مجموعه‌ی زوج‌های مرتب را تابع گوئیم هرگاه مؤلفه‌های اول (مختص اول) برابر نداشته باشد، اگر دو زوج مرتب، مؤلفه‌های اول برابر داشته باشند، مؤلفه‌های دوم (مختص دوم) نیز برابر باشند.

مثال ۳: از رابطه‌های t, s, f, g, h و k کدام یک تابع اند؟

$$t = \{(-1, 3)\}$$

حل: t تابع است زیرا مؤلفه‌ی اول برابر ندارد.

$$S = \{(0, 1), (-1, 1), (3, 1), (-7, 1)\}$$

s تابع است زیرا مؤلفه‌ی اول تکراری ندارد.

$$f = \{(3, 2), (4, 5), (8, 5)\}$$

f تابع است زیرا مختص اول برابر ندارد.

$$g = \{(-3, 5), (1, 5), (3, 5)\}$$

g تابع است زیرا مختص اول برابر ندارد.

$$h = \{(2, 3), (-5, 4), (3, 10), (-5, 9)\}$$

h تابع نیست زیرا مختص اول برابر دارد.

$$k = \{(5, 7), (5, 4), (5, 10), (5, 8)\}$$

k تابع نیست زیرا مختص اول برابر دارد.

مثال ۴: مقدار m را در رابطه‌ی مقابل چنان بیابید که f

یک تابع شود.

$$f = \{(3, 3m - 5), (3, 7)\}$$

حل: چون f یک تابع است و نیز مختص اول برابر دارد،

پس مختص دوم آن‌ها نیز برابر است، یعنی :

$$3m - 5 = 7 \Rightarrow 3m = 5 + 7 = 12$$

$$\Rightarrow m = \frac{12}{3} \Rightarrow \boxed{m=4}$$

$$f(2) = 5 \quad f(3) = 4 \quad f(5) = -2$$

مثال ۵: هرگاه مقادیر مقابل داده شده باشد،

$$f = \{(2, 5), (3, 4), (5, -2)\} \quad \text{حل:}$$

$$D_f = \{2, 3, 5\}, \quad R_f = \{5, 4, -2\}$$

الف) تابع f را به صورت زوج مرتب بنویسید.
ب) دامنه و برد f را بیابید.

مثال ۶: تابع f در مقابل مفروض است.

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f = \{(x, 2x + 1) | x \in D, 2x + 1 \in \mathbb{R}\} \quad \text{حل:}$$

این تابع را به صورت زوج مرتب بنویسید.

مثال ۷: تابع X و دامنه‌ی آن در مقابل داده شده است

$$X(t) = \frac{1}{2}gt^2 + 100, \quad D_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$(g \approx 10 \text{ m/s}^2)$$

جدول ۱۰-۲

t	۰	۱	۲	۳	۴
X(t)	۱۰۰	۱۰۵	۱۲۰	۱۴۵	۱۸۰

حل:

$$X = \{(0, 100), (1, 105), (2, 120), (3, 145), (4, 180)\}$$

– $X(t)$ را به صورت جدول مرتب کنید.

– $X(t)$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

$$R_X = \{100, 105, 120, 145, 180\}$$

– برد تابع X را به دست آورید.

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X(t_2) - X(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{145 - 120}{3 - 2} = \frac{25}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta X}{\Delta t} = 25$$

– $\frac{\Delta X}{\Delta t}$ را به ازای $t_1 = 2$ و $t_2 = 3$ محاسبه کنید.

مثال ۸: با توجه به مقادیر روبه‌رو کارهای زیر را انجام

$$f(3) = 5, \quad f(4) = -6, \quad f(5) = 9, \quad f(-4) = 9$$

دهید.

حل:

$$f = \{(3, +5), (4, -6), (5, 9), (-4, 9)\}$$

$$D_f = \{3, 4, 5, -4\}$$

$$R_f = \{+5, -6, 9\}$$

الف) تابع f را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) دامنه را به دست آورید.

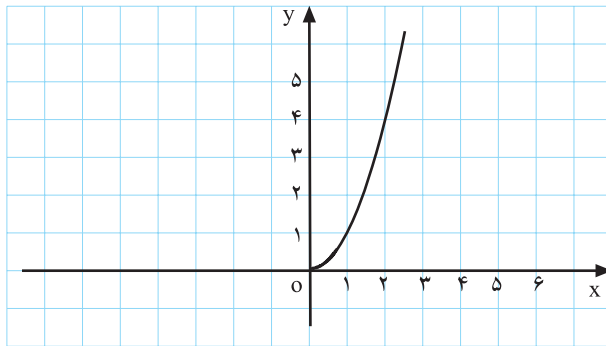
ج) برد f را به دست آورید.

۴-۳-۲- نمایش نموداری تابع: تابع‌ها را می‌توان

به صورت نمودار نیز نمایش داد.

مثلاً نمودار ۲-۷۶ نمودار یک تابع است. زیرا برای هر

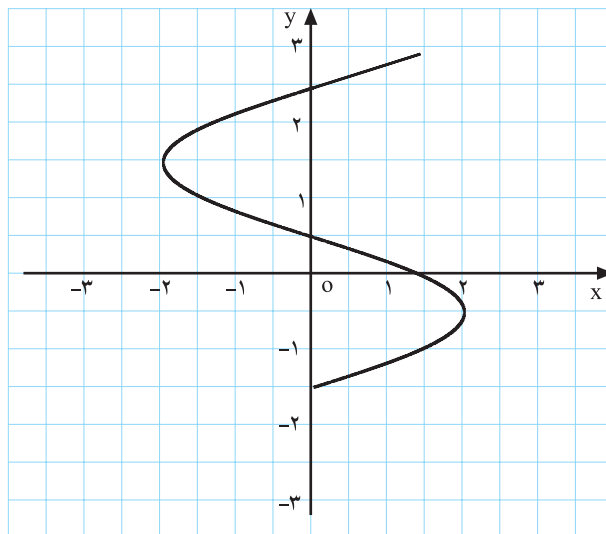
x فقط یک y وجود دارد.



نمودار ۲-۷۶

نمودار ۲-۷۷ نمودار تابع نیست چون به ازای $x = \frac{1}{2}$

بیش از یک مقدار برای y وجود دارد.



نمودار ۲-۷۷

تعریف: یک نمودار، نمودار یک تابع را مشخص می‌کند هرگاه هر خطی به موازات محور y ها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تمرین

از نمودارهای ۲۷۸-۲ کدام یک نمودار یک تابع را مشخص

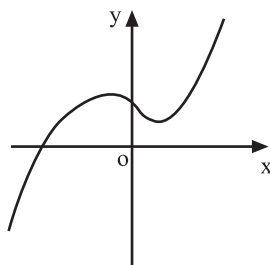
می‌کند؟

☐ (الف)

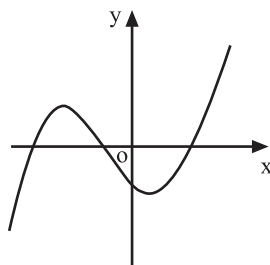
☐ (ب)

☐ (ج)

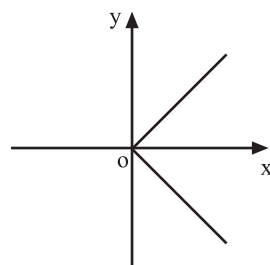
☐ (د)



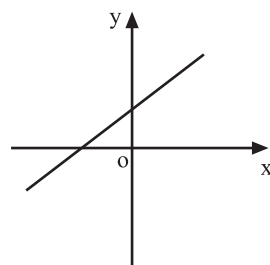
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

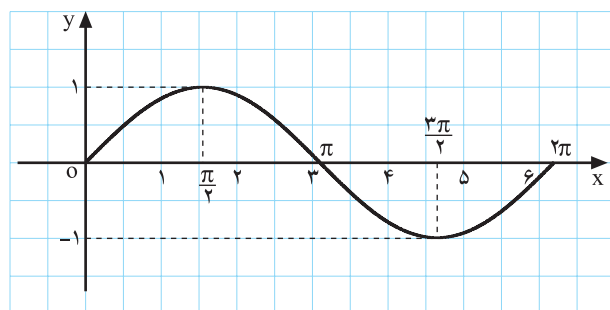
نمودارهای ۲۷۸-۲

مثال ۱: با توجه به نمودار ۲۷۹-۲ الف به سؤال‌های زیر

پاسخ دهید.

(الف) دامنه‌ی نمودار را بیابید.

(ب) برد نمودار را به دست آورید.



نمودار ۲۷۹-۲ الف

حل:

(الف) برای تعیین دامنه از روی نمودار مقادیر x ها را

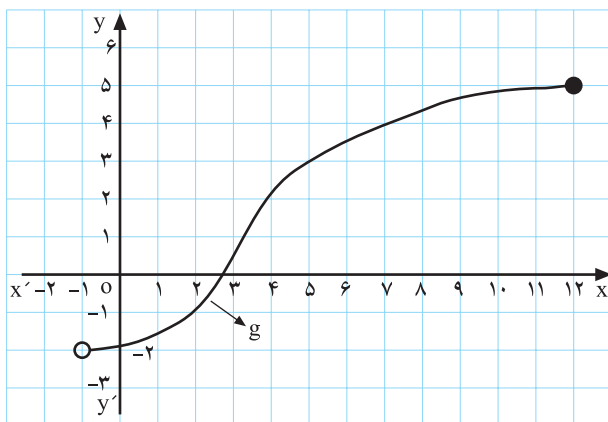
به صورت بازه می‌نویسیم، بنابراین :

$$D_f = [0, 2\pi]$$

(ب) برای تعیین برد از روی نمودار مقادیر y ها را به صورت

بازه بیان می‌کنیم :

$$R_f = [-1, 1]$$



نمودار ۲-۷۹ ب

$$D_g = (-1, 12]$$

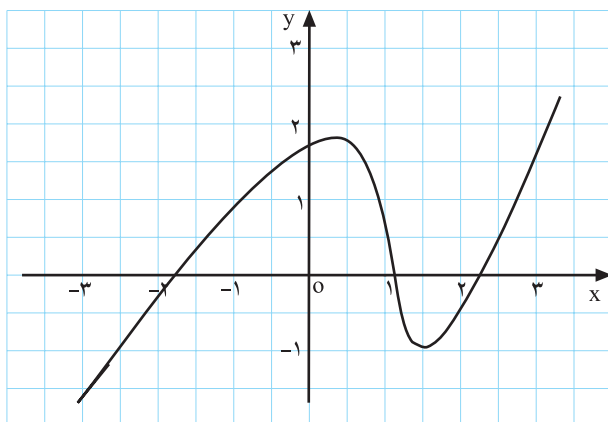
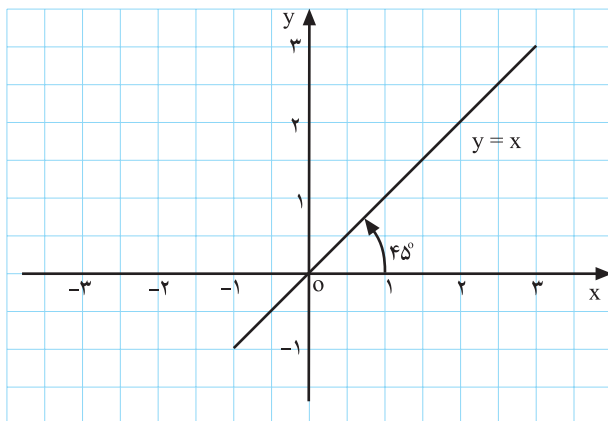
$$R_g = (-2, 5]$$

$$y = -3x + 4$$

جدول ۲-۱۱

شماره‌ی دانش‌آموز	۱	۲	۳	۴	۵
قد دانش‌آموز	۱۶۲cm	۱۵۷cm	۱۷۰cm	۱۶۲cm	۱۷۲cm

$$f = \{(x, y) | y = x, x, y \in \mathbb{R}\}$$



مثال ۲: با توجه به نمودار ۲-۷۹ ب به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) دامنه‌ی نمودار را بیابید.

ب) برد نمودار را به دست آورید.

نتیجه: با توجه به فعالیت‌ها و مثال‌های حل شده، تابع‌ها

را به چهار صورت می‌توان نمایش داد.

۱- با ضابطه؛ مانند:

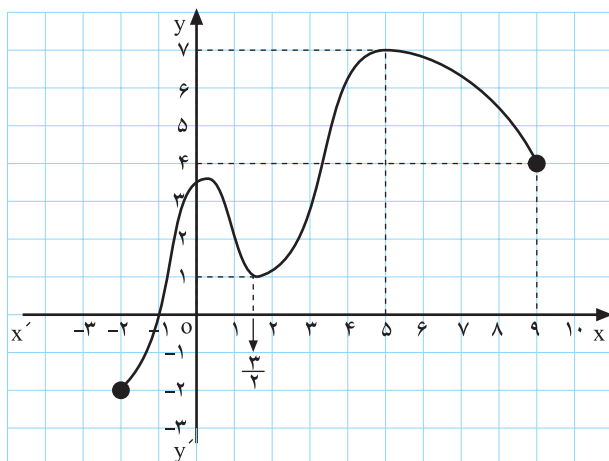
۲- با جدول؛ مانند جدول ۲-۱۱

۳- با زوج مرتب؛ مانند:

۴- با نمودار؛ مانند شکل‌های ۲-۸۰ و ۲-۸۱

شکل ۲-۸۰

شکل ۲-۸۱



شکل ۸۲-۲

مثال ۳: تابع f با نمودار ۸۲-۲ مشخص شده است. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

$$D_f = [-2 \text{ و } 9] \text{ و } R_f = [-2 \text{ و } 7]$$

الف) D_f و R_f را به دست آورید :

ب) با استفاده از نمودار ۸۲-۲، $f(\frac{3}{4})$ و $f(-1)$ را بیابید.

$$f(\frac{3}{4}) = 1, f(-1) = 0$$

$$f(x) = 7 \rightarrow x = 5$$

ج) اگر $f(x) = 7$ مقدار x چیست؟

$$f(-2) = -2$$

د) کم‌ترین مقدار تابع در بازه‌ی $[-2, 7]$ چه مقدار است؟

$$f(5) = 7$$

ه) بیش‌ترین مقدار تابع در بازه‌ی $[-2, 7]$ چه مقدار است؟

مثال ۴: $f(x)$ و $f(-3)$ در مقابل مفروض‌اند. مقدار b را

به دست آورید.

$$f(x) = 4x^2 + 3b - 7 \text{ و } f(-3) = 9$$

حل: در $f(x)$ به جای x مقدار -3 را قرار می‌دهیم و

آن را برابر با ۹ قرار می‌دهیم.

$$f(-3) = 9 \rightarrow 4(-3)^2 + 3b - 7 = 9$$

$$\Rightarrow 36 + 3b - 7 = 9$$

$$\Rightarrow 3b + 29 = 9 \Rightarrow 3b = 9 - 29 = -20$$

$$\Rightarrow b = \frac{-20}{3}$$

– با حل معادله مقدار b را به دست می‌آوریم.

آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۳)

$$V_{(x)} =$$

$$V_{(4)} =$$

$$x^2 + 2y^3 = 54$$

$$y = 2\sqrt{3} \cos x + 1$$

$$D_f = \{0, -1, 1, 2\} \text{ و } f(x) = -2x^2 + 1$$

تمرین

۱- ابعاد مکعب مستطیلی برابر x ، $x-2$ و $x+2$ است به طوری که $x > 2$ ؛

الف) ضابطه‌ی حجم مکعب را بنویسید.

ب) به ازای $x = 4$ حجم مکعب را محاسبه کنید.

راهنمایی: حجم مکعب مستطیل برابر است با حاصل ضرب ابعاد آن.

۲- آیا ضابطه‌ی مقابل مربوط به تابع است؟ چرا؟

۳- تابع مقابل مفروض است.

اگر $A \left| \frac{\pi}{6} \right|_{2b+1}$ یک نقطه از تابع باشد مقدار b را محاسبه کنید.

۴- تابع f و دامنه‌ی آن (D_f) مفروض است.

الف) تابع f را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) جدول تابع را رسم کنید.