

با ریاضیدانان نامی آشنا شوید

ابوالوفا محمد ابن محمد ابن یحیی ابن اسماعیل ابن عباس بوزجانی، یکی از مفاخر علمی ایران و از بزرگ‌ترین ریاضیدانان و منجمان دوره‌ی اسلامی است به گفته ابن ندیم در روز چهارشنبه، اول ماه رمضان سال ۳۲۸ هـ.ق در شهر بوزجان متولد شد. بوزگان، بوزگان یا پوچگان، شهر قدیمی در خراسان بود که ویرانه‌های آن در حدود هجده کیلومتری شرق شهر تربت جام به یادگار مانده است. ابوالوفا در حدود سال ۳۴۸ هـ.ق زادگاهش را به خاطر کسب علم و دانش و عرضه توانایی‌های علمی و فکری خود، ترک و به طرف بغداد حرکت کرد. او در بغداد با شرکت در محافل علمی توانایی خود را در محاسبات ریاضی به سرعت نشان داد. ره‌آورد این تلاش‌ها و سخت‌کوشی‌ها، انتخاب او برای دیوانی و ثبت و محاسبات مالی حکومت بود. ابوالوفا علاوه بر فعالیت‌های یاد شده، به پژوهش‌های نجومی و ستاره‌شناسی نیز مشغول بود. دانشمندان، هنرمندان و ریاضی‌دانان عصر خود به او لقب مهندس داده بودند. مهندس به معنای ماهرترین و مطلع‌ترین هندسه‌دان بود.

ابوالوفا در به‌دست آوردن و ترها مطالب بسیار سودمندی دارد. تألیف‌های فراوانی در زمینه‌های حساب هندسه، مثلثات و نجوم داشته است. نبوغ بوزجانی به عنوان یک مهندس این بوده است که مطالب مهم و پیچیده را به شکلی ساده و قابل فهم در اختیار دیگران قرار می‌داد.

ابوالوفا درباره حساب عملی، با عنوان «کتاب فی مایحتاج الیه الکتاب و العمال من علم الحساب» از شهرت گسترده‌ای برخوردار گردید. او همه‌ی اعداد و محاسبات را تنها با کلمات بیان کرده است. این کتاب که ترجمه فارسی نام عربی کتاب «آنچه از علم حساب که کاتبان و کاسبان را به کار آید» می‌باشد از جهت تاریخ حساب اهمیت فراوانی دارد و محاسبات مربوطه به چهار عمل اصلی اعداد و همچنین کسرها و محاسبه مساحت مثلث‌ها و مربع‌ها محاسبه مالیات را شامل می‌شود.

کتاب درسی عملی دیگر ابوالوفا «کتاب فی مایحتاج الیه الصانع من الاعمال الهندسه» است که شامل ترسیم‌های مسطح ساده و ترسیم چند وجهی‌های منتظم و نیمه منتظمی که در کره‌ای مفروض شده‌اند و مطالب سودمندی برای کار معماران و صنعتگران دیده می‌شود. همچنین درباره‌ی ترکیب و تجزیه‌ی مربع‌ها و کنار هم گذاشتن آن‌ها که ظاهراً از مسائلی بوده است که غالباً مسلمانان در کارهای معماری و خصوصاً در تزیین ساختمان‌ها به آن‌ها برمی‌خورده‌اند مطالبی آمده است.

کتاب نجومی بزرگ ابوالوفا، به نام «المجسطی» یا «کتاب الکامل»، دقیقاً از «مجسطی» بطلمیوس تبعیت می‌کند. کتاب درباره علم مثلثات است. دستورهای مهم مثلثات، چه در مثلثات مسطح و چه در مثلثات کروی ثابت شده و حل مسائل آن را به صورت ساده درآورد و قضیه مماس‌ها را در حل مثلث‌های قائم‌الزاویه کروی به کار برد. یکی از نخستین برهان‌های قضیه‌ی کلی جیب‌ها (سینوس‌ها)، که در حل مثلث‌های غیر قائم‌الزاویه به کار برده می‌شد، نیز از ابوالوفا سرچشمه گرفته است. در کارهای مهم بوزجانی در توسعه علم مثلثات، مخصوصاً بهبود جداول مثلثاتی و روش‌های حل مثلثات کروی، تردیدی نیست. در تدوین جدول‌های جدید سینوس، با استفاده از روش درونیایی خودش، سینوس ۳۰ دقیقه را با دقت بیشتری محاسبه کرد. به افتخار ابوالوفا، بر دهانه‌ی آتشفشانی در ماه نیز نام او را نهاده‌اند. بیرونی در چند قسمت از آثار خود، از بوزجانی نام برده و نوشته است که ابوالوفا در محاسبات نجومی خود، میزان انحراف محور زمین را محاسبه و آن را مساوی ۳۵ (دقیقه) و ۲۳ (درجه) دانسته و از محل رصدهای او در شهر بغداد و ناحیه باب‌التین نیز یاد کرده است. و نیز در جای دیگر نوشته است که بوزجانی به محاسبه‌ی ادوار (روزهای گذشته از مبدأ یک تاریخ خاص) بر اساس رصدهای بطلمیوس اقدام کرده است. نکته‌ی بسیار مهم و جالب در زمینه‌ی حساب کاربردی و آثار بوزجانی، رشد و تحول مفهوم عدد است. او با وارد کردن اعداد منفی به حساب، کار بزرگ و مهمی انجام داده است. این مهندس نابغه برای محاسبه ذهنی حاصل ضرب دو عدد دو رقمی که رقم‌های دهگان آن یکسان باشد، دستوری بیان کرده است.

بخش دوم

حد و پیوستگی

هدف کلی بخش

درک مفهوم حد و به کارگیری آن در تعیین پیوستگی تابع‌ها.

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل	زمان
اول	حد	۲۰ ساعت
دوم	پیوستگی	۸ ساعت
سوم	تعمیم حد	۸ ساعت

بخش دوم

فصل اول

حد

هدف کلی

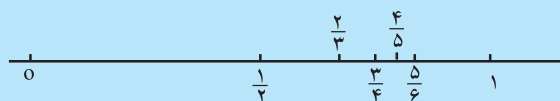
درک مفهوم میل کردن یک متغیر به یک عدد و میل کردن مقادیرهای یک تابع به یک عدد و تعمیم مفهوم حد

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

- ۱- میل کردن یک متغیر را از چپ و راست به یک عدد، به $+\infty$ یا به $-\infty$ تعریف کند.
- ۲- حد تابع را تعریف کند.
- ۳- حد چپ و حد راست یک تابع در یک نقطه را تعریف کند.
- ۴- حد چپ و حد راست تابع را از روی نمودار آن تعیین کند.
- ۵- حد چپ و حد راست تابع را از روی ضابطه‌ی آن تعیین کند.
- ۶- حد تابع‌های کسری که صورت و مخرج آن‌ها، وقتی $x \rightarrow a$ به صفر میل می‌کنند را به دست آورد.
- ۷- قضیه فشردگی را در تعیین حد بعضی از تابع‌ها به کار برد.

پیش‌آزمون (۱)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



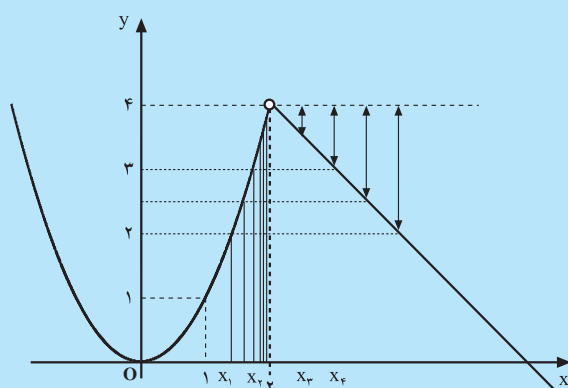
شکل ۲-۱



شکل ۲-۲

$$-s = -1 - 3 - 3^2 - \dots - 3^9 - 3^{10}$$

$$3s = 3 + 3^2 + \dots + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}$$



شکل ۲-۳

۱- عددهای $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ روی محور اعداد

مشخص شده‌اند (شکل ۲-۱).

(الف) این عددها مرتباً به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر

می‌شوند؟

(ب) این عددها از کدام سمت (راست، چپ یا هر دو) به

آن عدد نزدیک می‌شوند؟

۲- عددهای $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ را روی محور

مشخص کنید (شکل ۲-۲).

(الف) این عددها به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

(ب) این عددها از کدام سمت به آن عدد نزدیک می‌شوند؟

۳- می‌خواهیم $s = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^9 + 3^{10}$ را

حساب کنیم. در مقابل $-s$ و $3s$ در دو ردیف زیر هم نوشته شده‌اند.

(الف) عددهای هر ستون را با هم جمع کنید و زیر خط

بنویسید.

(ب) مقدار s را تعیین کنید.

۴- به روش سؤال ۳، مقدار

$$s = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$$

را به دست آورید.

۵- تابع f با ضابطه‌ی زیر در \mathbb{R} تعریف شده است :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 6 - x & x > 2 \end{cases}$$

این تابع در $x = 2$ تعریف نشده است (شکل ۲-۳).

اگر x_1, x_2, \dots, x_n به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر شوند،

عددهای $f(x_1), \dots, f(x_n)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

مقدمه

فرض کنید اتومبیلی در نقطه‌ی $A(0, 2)$ ایستاده است. چراغ راهنما سبز می‌شود و اتومبیل با سرعت روبه افزایش بر روی یک خط راست حرکت می‌کند. شکل ۲-۴ در صفحه‌ی بعد را ملاحظه کنید.

$$(1) \quad y = \frac{1}{4}t^2 + 2$$

رابطه‌ی (۱) محل اتومبیل را، نسبت به زمان، در هر لحظه مشخص می‌کند. طبق این رابطه در آغاز حرکت ($t = 0$) فاصله‌ی اتومبیل تا مبدأ مختصات ۲ متر است. یعنی، $y_A = 2m$ و $t_A = 0$. اتومبیل دو ثانیه پس از حرکت به نقطه‌ی B، به فاصله‌ی ۳ متر از مبدأ می‌رسد. $y_B = 3m$ و $t_B = 2s$. اتومبیل چهار ثانیه پس از حرکت به نقطه‌ی C، به فاصله‌ی ۶ متر از مبدأ می‌رسد. $y_C = 6m$ و $t_C = 4s$.

با استفاده از معادله‌ی (۱) جدول مکان - زمان ۲-۱ را خواهیم داشت.

نمودار y نسبت به تغییرات t نیز در صفحه مقابل رسم شده است.

جدول ۲-۱

نقطه	A	B	C	D	E
t	۰	۲	۴	۶	۸
y	۲	۳	۶	۱۱	۱۸

طبق تعریف، اگر بخواهیم سرعت متوسط اتومبیل را به دست آوریم، باید اندازه‌ی جابه‌جایی را به مدت حرکت تقسیم کنیم. یعنی،

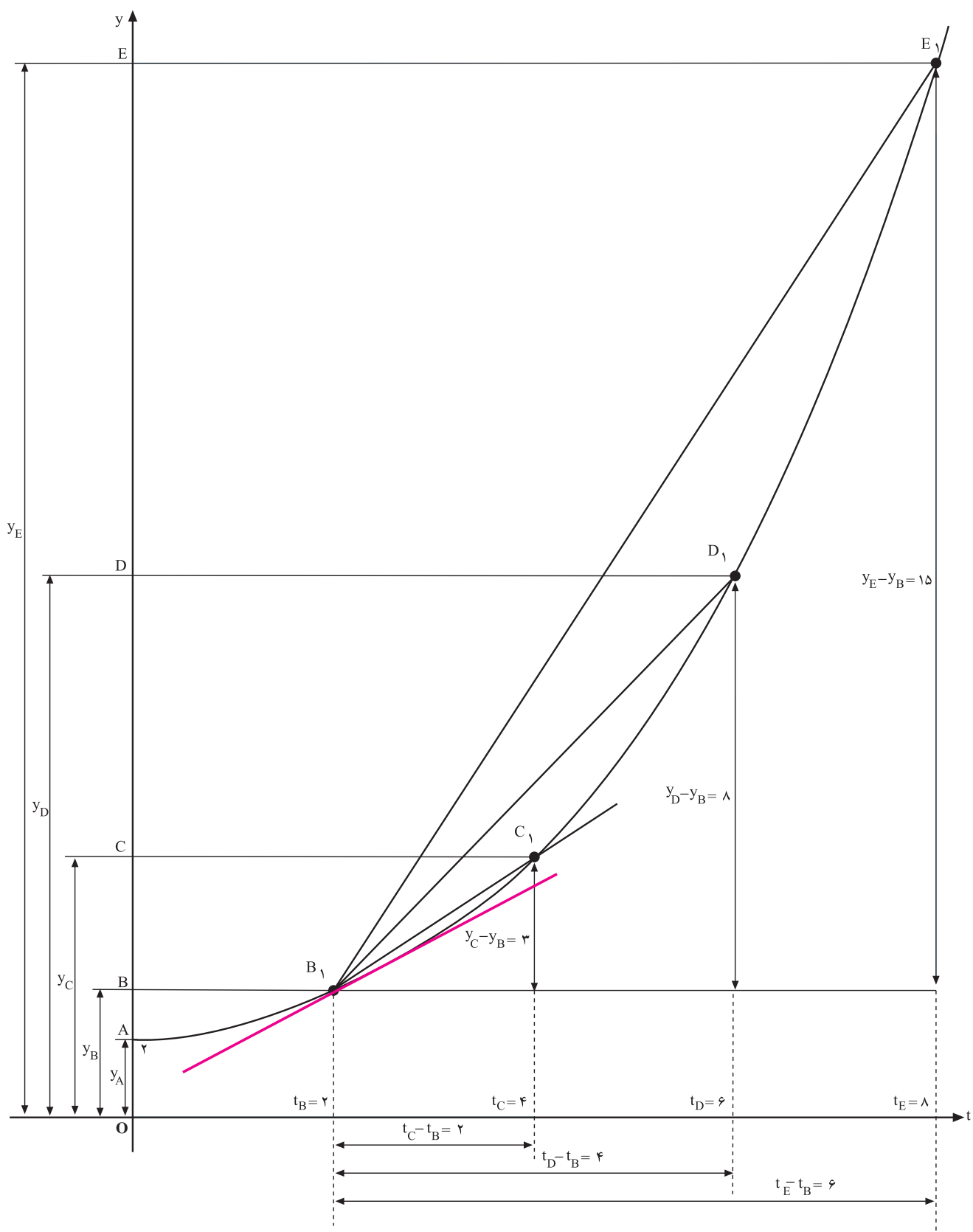
$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{اندازه‌ی جابه‌جایی}}{\text{مدت حرکت}}$$

$$\text{سرعت متوسط از B به E} = \frac{\text{اندازه‌ی جابه‌جایی از B تا E}}{\text{مدت حرکت از B به E}}$$

$$= \frac{y_E - y_B}{t_E - t_B} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$= \frac{18 - 3}{8 - 2} = \frac{15}{6} \frac{m}{s}$$

طبق این تعریف، سرعت متوسط اتومبیل در مدتی که از B به E رفته است، از رابطه‌ی روبه‌رو به دست می‌آید.



شکل ۲-۴

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = B_1 E_1 \text{ شیب خط } = \frac{18-3}{8-2} = \frac{15}{6}$$

می‌دانید که طبق تعریف، شیب خط $B_1 E_1$ نیز از تقسیم $\Delta y = y_E - y_B$ بر $\Delta t = t_E - t_B$ به دست می‌آید (طبق تعریف و شکل ۲-۴).

اگر مدت حرکت را کم کنیم یعنی زمان $\Delta t = t_E - t_B$ را کمتر کنیم مسافتی که اتومبیل طی می‌کند یعنی $\Delta y = y_E - y_B$ نیز کوتاه‌تر می‌شود.

لذا، اگر بخواهیم سرعت متوسط اتومبیل را در مدت کوتاه‌تر، یعنی در مدتی که اتومبیل از B به D رفته است، به دست آوریم، طبق تعریف و شکل ۲-۴، داریم:

$$\begin{aligned} \text{اندازه‌ی جابه‌جایی از B تا D} &= \text{سرعت متوسط از B به D} \\ &= \frac{y_D - y_B}{t_D - t_B} = \frac{11-3}{6-2} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 D_1 \text{ شیب خط} &= \frac{y_D - y_B}{t_D - t_B} \\ &= \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{11-3}{6-2} = 2 \end{aligned}$$

ضمناً، شیب خط $B_1 D_1$ چنین حساب می‌شود:

اگر مدت حرکت را باز هم کم‌تر کنیم، یعنی اگر $\Delta t = t_D - t_B$ را باز هم کوچک کنیم، مسافتی که اتومبیل طی می‌کند، یعنی $\Delta y = y_D - y_B$ نیز باز هم کوتاه‌تر می‌شود. حال اگر بخواهیم سرعت متوسط اتومبیل را در مدتی که از B به C رفته است حساب کنیم باید بنویسیم:

$$\begin{aligned} \text{سرعت متوسط اتومبیل از B به C} &= \frac{y_C - y_B}{t_C - t_B} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= B_1 C_1 \text{ شیب خط} = \frac{6-3}{4-2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$



شکل ۲-۵

وقتی شما در اتومبیل در حال حرکت نشست‌اید و می‌خواهید سرعت اتومبیل را بدانید، به کیلومترشمار نگاه می‌کنید. مدتی طول می‌کشد تا چشم شما کیلومترشمار را ببیند و حاصل دیدن به مغز شما منتقل شود. این مدت، مدت بسیار کوتاهی است، ولی اتومبیل در این مدت بسیار کوتاه به اندازه‌ی بسیار کم جابه‌جا شده است، حاصل تقسیم این جابه‌جایی کوتاه به آن مدت کوتاه، سرعت لحظه‌ای اتومبیل است که شما روی صفحه‌ی کیلومترشمار مشاهده می‌کنید. این سرعت می‌تواند سرعت موتورسیکلت، سرعت اتومبیل، سرعت هواپیما یا سرعت فضاپیما باشد که عدد بسیار بزرگی است.



تاکنون، به موضوع مورد بحث کاملاً به عنوان یک پدیده‌ی موجود در زندگی نگاه کردیم. حالا به این مطلب از دید ریاضی می‌نگریم.

به نموداری که با استفاده از جدول ۲-۱ رسم شده است نگاه کنید. شیب خط B_1E_1 از تقسیم Δy بر Δt مربوط به دست می‌آید. اگر Δt را کوچک‌تر کنیم خط بعدی، یعنی خط B_1D_1 را می‌توانیم رسم کنیم. اگر Δt را باز هم کوچک و کوچک‌تر کنیم در حد خط قاطع به خط مماس بر منحنی در نقطه B_1 تبدیل می‌شود.

با توجه به آنچه گفته شد، شیب خط مماس بر منحنی در B_1 با سرعت لحظه‌ای در B_1 برابر است. لذا، گفته می‌شود: سرعت لحظه‌ای، حد سرعت متوسط است وقتی Δt به صفر میل می‌کند.

در نمودار رسم شده ما می‌خواستیم شیب خط مماس را در نقطه‌ی B_1 تعیین کنیم، لذا، خط‌های قاطع را از نقطه‌ی B_1 رسم کردیم و بر نقطه‌ی B_1 تأکید نمودیم. اگر می‌خواستیم شیب خط مماس در نقطه‌ی C_1 را به دست آوریم، خط‌های قاطع را از نقطه‌ی C_1 رسم می‌کردیم و سرعت (لحظه‌ای) در نقطه‌ی C_1 را به دست می‌آوردیم.

شکل ۲-۶

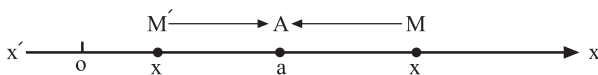
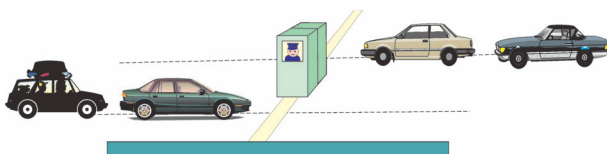
۲-۱-۲ حد

حد یکی از مفهوم‌های اساسی و مهم ریاضیات است. مفهوم‌هایی چون پیوستگی، مشتق و ... در رابطه‌ی نزدیک با مفهوم حد هستند.

در این فصل، سعی می‌کنیم با بیان مثال‌هایی، تا حدودی مفهوم ریاضی حد را روشن کنیم.

۲-۱-۱-۱ میل کردن یک متغیر به یک عدد ثابت:

فرض کنید دو متحرک M و M' روی محور اعداد به سمت نقطه‌ی معین A از یک شهر در حرکت هستند. فاصله‌ی بین این متحرک‌ها و نقطه‌ی A مرتباً کم و کم‌تر می‌شود؛ به عبارت دیگر، x متحرک M (یا متحرک M') مرتباً به عدد a نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود (شکل ۲-۷).



شکل ۲-۷

جدول ۲-۲

	$x \rightarrow 3^-$	$x \rightarrow 3^+$
x	... 0 1/5 2 2/5 2/9 2/99 ... 3 ... 3/001 3/01 3/1 3/5 4 ...	



شکل ۲-۸

جدول ۲-۳

x	... 1 10 1000 10000 10^8 10^10 10^100 ...
---	---

$x \rightarrow +\infty$

جدول ۲-۴

x	... -10^100 -10^10 -10^8 -10^4 -1000 -10 -1 ...
---	---

$x \rightarrow -\infty$

جدول ۲-۵

x	... 0 0/5 0/8 0/9 0/99 0/999 ... 1 ... 1/001 1/01 1/1 1/5 2 ...
---	---

$x \rightarrow$

جدول ۲-۶

x	... 1 1/2 1/5 1/8 1/9 1/99 1/999 ... 2
---	--

$x \rightarrow$

جدول ۲-۷

x	-1 ... -0/999 -0/99 -0/9 -0/7 -0/5 0 ...
---	--

$x \rightarrow$

تعریف ۱: متغیر x به عدد ثابت a میل می‌کند، و می‌نویسیم

$x \rightarrow a$ ، در صورتی که فاصله‌ی بین متحرک M و نقطه‌ی A مرتباً کم و کم‌تر شود. جدول ۲-۲ میل کردن متغیر x را به عدد ۳ نشان می‌دهد.

اگر مجدداً به محور بالا توجه کنید ملاحظه می‌کنید که متحرک M' از چپ و متحرک M از راست به A نزدیک می‌شوند.

تعریف ۲: اگر x با مقادیر بزرگ‌تر از a به a میل کند (یعنی، همیشه $x - a > 0$) گوییم x از راست به a میل می‌کند و می‌نویسیم $x \rightarrow a^+$.

تعریف ۳: اگر x با مقادیر کوچک‌تر از a به a میل کند (یعنی، همیشه $x - a < 0$) گوییم x از چپ به a میل می‌کند و می‌نویسیم $x \rightarrow a^-$.

اینک فرض کنید که دو متحرک M و M' از نقطه‌ی A دور می‌شوند.

تعریف ۴: متغیر x به $+\infty$ میل می‌کند در صورتی که بتوان فاصله‌ی متحرک M را تا نقطه‌ی A از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر کرد، و می‌نویسیم $x \rightarrow +\infty$.

تعریف ۵: متغیر x به $-\infty$ میل می‌کند در صورتی که بتوان x را از هر عدد منفی دلخواه انتخاب شده کوچک‌تر کرد. نکته: به سادگی می‌توان ملاحظه کرد که وقتی $x \rightarrow -\infty$ آنگاه $(-x) \rightarrow +\infty$.

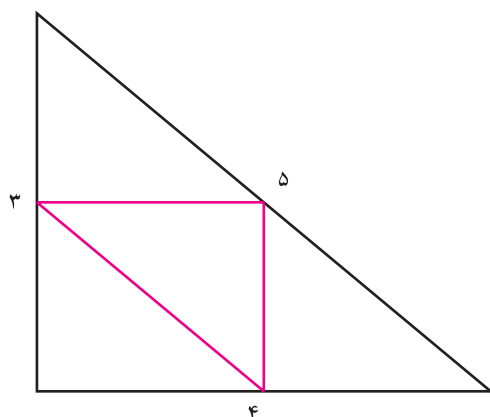
جدول‌های ۲-۳ و ۲-۴ میل کردن متغیر x را به $+\infty$ یا $-\infty$ نشان می‌دهند.

کار در کلاس ۲-۱

با توجه به جدول‌های ۲-۵ تا ۲-۷ بنویسید که x به چه عددی میل می‌کند.

قبل از پرداختن به حد تابع‌ها، با چند فعالیت مفهوم حد را روشن می‌کنیم.

فعالیت ۲-۱



شکل ۲-۹

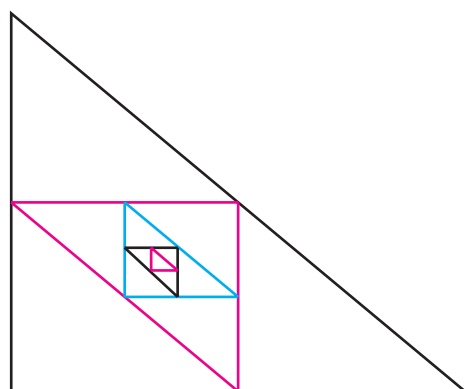
در شکل ۲-۹ یک مثلث قائم‌الزاویه را، با اضلاع ۳، ۴ و ۵ واحد ملاحظه می‌کنید. اندازه‌ی وتر این مثلث را x_0 می‌نامیم. بنابراین، $x_0 = 5$.

(۱) اندازه‌ی محیط این مثلث را P_0 می‌نامیم. واضح است

$$P_0 = 3 + 4 + 5 = 12 \quad \text{که:}$$

(۲) مطابق شکل، وسط اضلاع به هم وصل شده‌اند تا مثلث

قرمز رنگ ایجاد شود. اندازه‌ی وتر مثلث جدید را x_1 می‌نامیم. اندازه‌ی x_1 چقدر است؟



شکل ۲-۱۰

(۳) اندازه‌ی محیط مثلث جدید را P_1 می‌نامیم. اندازه‌ی

$$P_1 = ? \quad \text{چقدر است؟}$$

اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را

ادامه دهیم به شکل ۲-۱۰ می‌رسیم.

(۴) اندازه‌ی وترها و محیط مثلث‌های بعدی را بنویسید.

$$x_2 = \dots \quad x_3 = \dots \quad x_4 = \dots$$

$$P_2 = \dots \quad P_3 = \dots \quad P_4 = \dots$$

(۵) اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را

باز هم ادامه دهیم، اندازه‌ی وتر مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

(۶) اندازه‌ی محیط مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

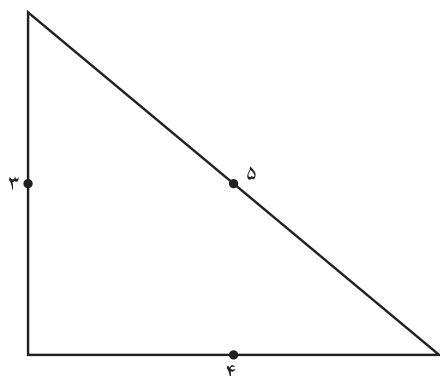
کار در کلاس ۲-۲

در شکل ۲-۱۱ یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۳، ۴ و ۵

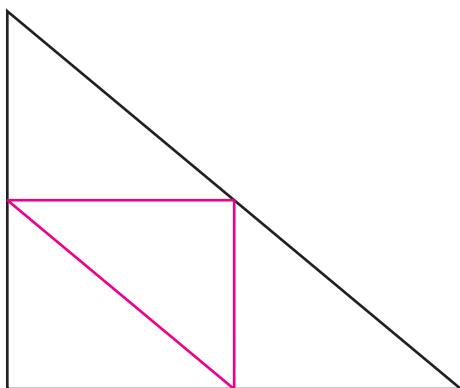
واحد ملاحظه می‌کنید. اندازه‌ی وتر این مثلث $x_0 = 5$ و مساحت

آن برابر است با

$$S_0 = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$



شکل ۲-۱۱



شکل ۲-۱۲

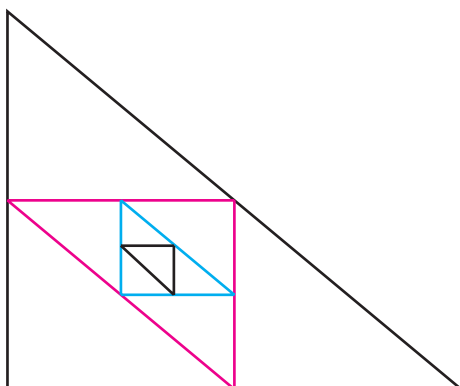
(۱) وسط ضلع‌های مثلث را به هم وصل کرده‌ایم (شکل ۲-۱۲).

(۲) اندازه‌ی وتر مثلث جدید را x_1 بنامید. اندازه‌ی x_1 چقدر است؟
 $x_1 = ?$

(۳) مثلث اولیه به چند مثلث کوچک تقسیم شده است؟ ... مثلث.

(۴) آیا مساحت این مثلث‌ها برابرند؟ چرا؟

(۵) اندازه‌ی مساحت مثلث کوچک وسط را S_1 بنامید.
 $S_1 = ?$



شکل ۲-۱۳

(۶) همانند فعالیت ۲-۱، عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهید (۳ بار دیگر) (شکل ۲-۱۳).

(۷) اندازه‌ی وتر و مساحت مثلث‌های جدید را بنویسید.

$$x_2 = \dots \quad x_3 = \dots$$

$$S_2 = \dots \quad S_3 = \dots$$

$$x_4 = \dots$$

$$S_4 = \dots$$

(۸) اندازه‌ی وتر مثلث‌ها به چه عددی میل می‌کنند؟

(۹) اندازه‌ی مساحت مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

(۱۰) آیا درست است که بنویسیم:

$$S_n \rightarrow \circ$$

$$x_n \rightarrow \circ$$

مثال: اگر $0 < r < 1$ ثابت کنید

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r}.$$

حل: سعی می‌کنیم به‌طور شهودی این تساوی را اثبات

کنیم:

مربع ABCD به ضلع واحد را در نظر بگیرید. مثلث‌های

ADE و ABS متشابه‌اند. چرا؟ (شکل ۱۴-۲)

نسبت تشابه آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{AD}{DE} = \frac{BS}{AB} \Rightarrow \frac{1}{1-r} = \frac{BS}{1}$$

بنابراین، $BS = \frac{1}{1-r}$ و $CS = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$.

پاره‌خط CF را مساوی r انتخاب می‌کنیم

از F پاره‌خط FF' را به موازات FS = CS - r = $\frac{r^2}{1-r}$ بکشیم.

در مثلث SCE، بنابر قضیه‌ی تالس، داریم:

$$\frac{FF'}{CE} = \frac{FS}{CS}$$

در نتیجه،

$$\frac{FF'}{r} = \frac{\frac{r^2}{1-r}}{\frac{r}{1-r}} \Rightarrow FF' = r^2$$

به همین ترتیب، اگر $FG = r^2$ انتخاب شود، خواهیم

داشت: $GG' = r^3$ و ...

بنابراین، $BS = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$ (*)

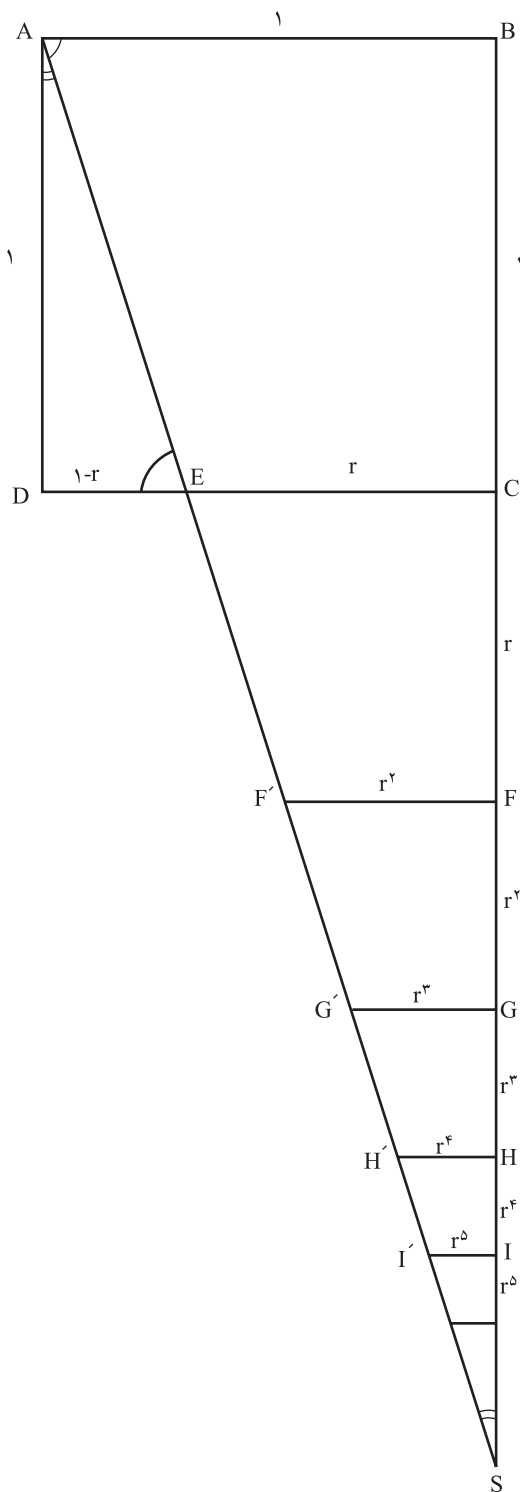
یعنی، اگر $0 < r < 1$ آن‌گاه $1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r}$

بدیهی است که در این حالت، $r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ، یعنی وقتی

توان r به $+\infty$ میل می‌کند r^n به صفر میل می‌کند.

از رابطه‌ی (*) نتیجه‌های زیر به‌دست می‌آید که آن‌ها را

در فعالیت بعدی مورد استفاده قرار خواهیم داد.



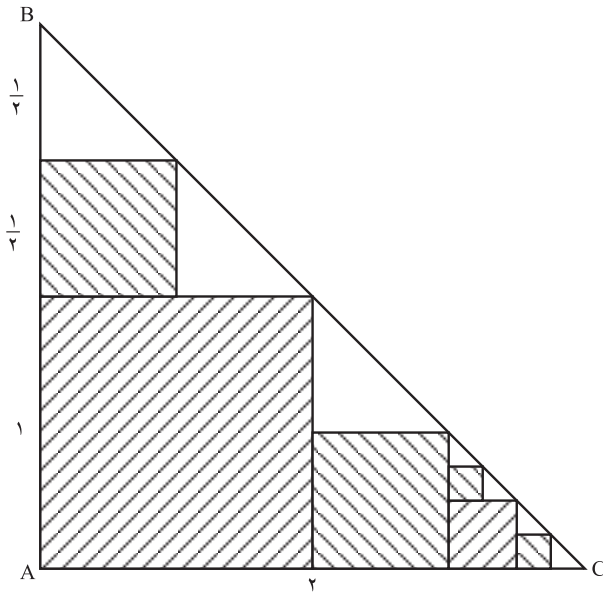
شکل ۱۴-۲

نتیجه‌ی ۱: اگر $r = \frac{1}{2}$ آن گاه

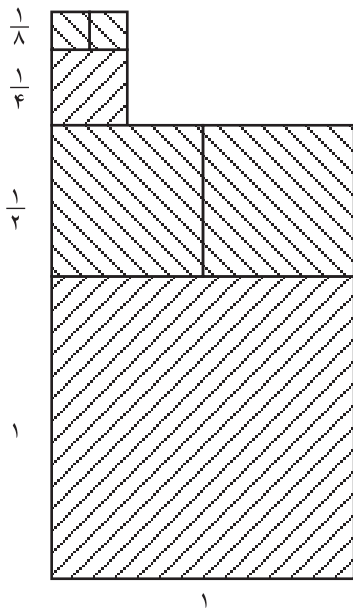
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

نتیجه‌ی ۲: اگر $r = \frac{1}{3}$ آن گاه

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$



شکل ۲-۱۵



شکل ۲-۱۶

فعالیت ۲-۲

مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ABC، به طول ساق واحد، رسم شده است. از وسط هر ساق عمودی خارج شده تا یک مربع و دو مثلث ایجاد شود.

مجدداً از وسط هر ساق مثلث‌های جدید، عمودی خارج شده تا مربع و مثلث‌های جدید ایجاد شود (شکل ۲-۱۵).

۱) شما نیز دو بار دیگر، مشابه آنچه روی یکی از مثلث‌های کوچک صورت گرفته، این کار را انجام دهید.

می‌خواهیم مجموع مساحت‌های تمام مربع‌های سایه زده شده را حساب کنیم.

برای این منظور کارهای زیر را انجام دهید.

الف) شکل ۲-۱۶ را کامل کنید. (در این شکل مربع‌های سایه زده شده به طرز مفیدی روی هم قرار گرفته‌اند.)

ب) به کمک شکل، و نتیجه‌ی ۱ مثال فوق، سعی کنید عددی که طول مستطیل حاصل به آن نزدیک می‌شود را به دست آورید.

پ) مساحت شکل حاصل به چه عددی نزدیک می‌شود؟
۲) مجموع مساحت‌های مربع‌های سایه زده شده چه ارتباطی با مساحت مثلث ABC دارد؟

۳) فقط با توجه به شکل ۲-۱۵ مساحت کل قسمت‌های سایه زده شده را حساب کنید. راهنمایی: نشان دهید که مساحت کل موردنظر برابر است با ۲.

۴) مساحت کل قسمت‌های سایه زده نشده به چه عددی نزدیک می‌شود؟

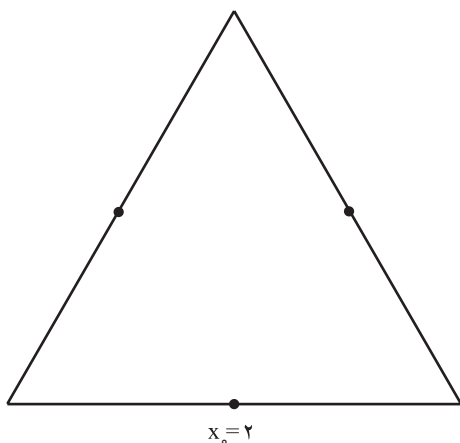
تمرین ۱-۲

در شکل ۱۷-۲، مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع $x_0 = 2$ رسم شده است. مساحت این مثلث $S_0 = \sqrt{3}$ است. چرا؟

(۱) وسط ضلع‌های مثلث را به هم وصل کنید.

(۲) اندازه‌ی ضلع مثلث جدید را x_1 بنامید.

$$x_1 = \dots$$



شکل ۱۷-۲

(۳) مثلث به چند مثلث کوچک تقسیم شده است؟ ...

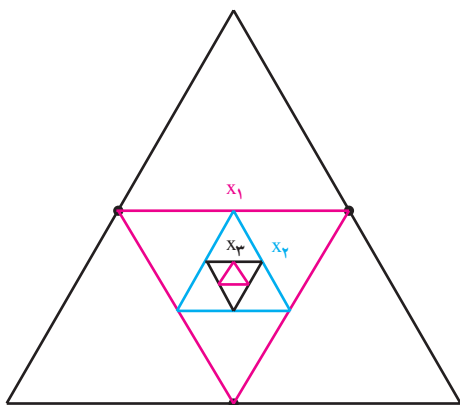
مثلث.

(۴) آیا مساحت این مثلث‌ها برابرند؟ چرا؟

(۵) مساحت مثلث وسط را S_1 بنامید.

این عمل را مطابق شکل ۱۸-۲ ادامه داده‌ایم.

(۶) اندازه‌ی ضلع‌ها و مساحت مثلث‌های جدید را بنویسید.



شکل ۱۸-۲

$$x_2 = \dots \quad x_3 = \dots \quad x_4 = \frac{1}{8}$$

$$S_2 = \dots \quad S_3 = \dots \quad S_4 = \frac{\sqrt{3}}{256}$$

(۷) اندازه‌ی ضلع‌های مثلث‌ها به چه عددی میل می‌کند؟

(۸) اندازه‌ی مساحت مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

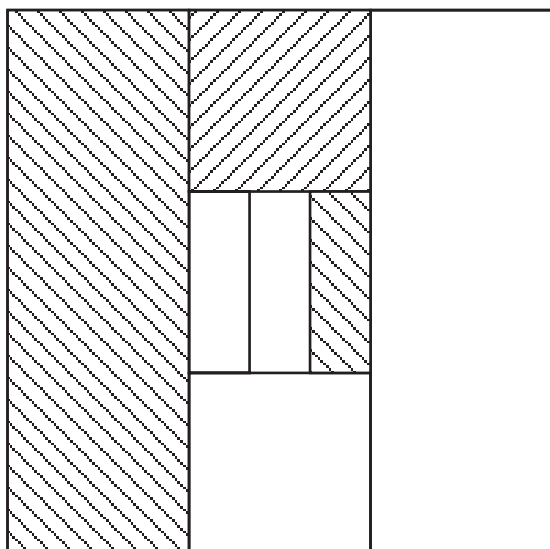
آیا درست است که بنویسیم؟

$$S_n \rightarrow 0$$

$$x_n \rightarrow 0$$

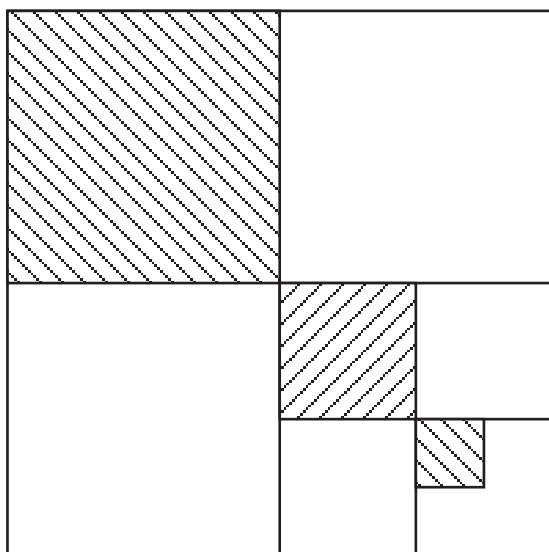
بازی با حد

(۱) در شکل ۲-۱۹ مربعی به ضلع واحد رسم شده است. با توجه به نحوه‌ی سایه زدن قسمت‌هایی از شکل، دوبار دیگر، مستطیل مجاور آخرین مستطیل سایه زده شده را به سه قسمت متساوی تقسیم کنید و یک قسمت را سایه بزنید (این که کدام قسمت را سایه بزنید مهم است!) فرض کنید عمل سایه زدن قسمت‌ها مرتباً ادامه پیدا کند. مساحت تمام قسمت‌های سایه زده شده را حساب کنید.



شکل ۲-۱۹

(۲) در شکل ۲-۲۰ نیز مربعی به ضلع واحد رسم شده است. مطابق شکل، دوبار دیگر مربع مقابل آخرین مربع سایه زده شده را به چهار مربع کوچک‌تر تقسیم و یک قسمت را سایه بزنید. مساحت تمام قسمت‌های سایه زده شده را حساب کنید.



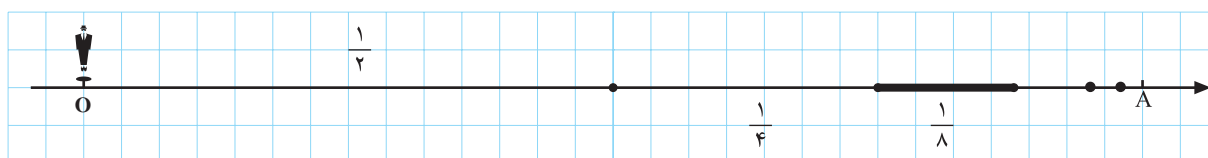
شکل ۲-۲۰

فعالیت ۲-۳

یک مثال تاریخی از حد

مسئله‌ی زنون: متحرکی از نقطه‌ی O ، روی یک خط مستقیم، شروع به حرکت می‌کند و قصد دارد به نقطه‌ی A ، به فاصله‌ی واحد از O ، برسد. این متحرک هربار مسیری به طول نصف فاصله‌اش تا نقطه‌ی A را طی می‌کند و بعد کمی استراحت می‌نماید! (شکل ۲-۲۱)

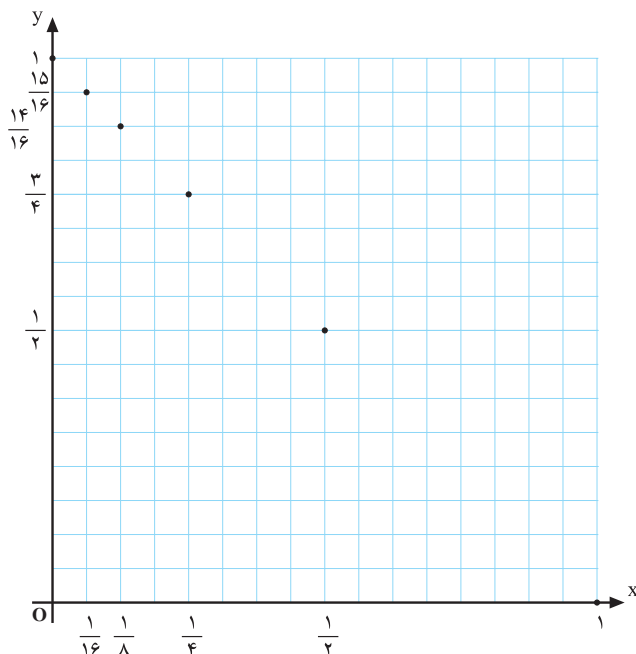
(۱) مسافتی را که این متحرک هربار طی می‌کند، x فرض کنید و سه مقدار دیگر x را، با توجه به شکل ۲-۲۱ بنویسید.



شکل ۲-۲۱

جدول ۸-۲

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$...
f(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{16}$

شکل ۲۲-۲ نمودار $y = f(x)$

(۲) آیا این متحرک به نقطه‌ی A می‌رسد؟ چرا؟

(۳) فرض کنید $f(x)$ فاصله‌ی این متحرک تا نقطه‌ی O

باشد. جدول ۸-۲ را کامل کنید.

(۴) با توجه به جدول ۸-۲، وقتی x به صفر نزدیک

می‌شود، مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شود؟

(۵) در این مثال، آیا x مساوی صفر می‌شود؟

(۶) آیا هیچ یک از مقدارهای $f(x)$ مساوی یک هست؟

در این مثال، $f(x)$ هرگز مساوی یک نمی‌شود ولی هرچه

بخواهیم به یک نزدیک می‌شود، البته به شرطی که x را به اندازه‌ی

کافی به صفر نزدیک کنیم. ریاضی‌دان‌ها، این مطلب را با نماد

ریاضی زیر نمایش می‌دهند.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

(بخوانید: حد $f(x)$ وقتی x به صفر میل می‌کند مساوی

یک است)

۲-۱-۲- حد تابع: در مطالعه‌ی تابع‌ها، مثلاً با ضابطه‌ی

$y = f(x)$ ، در بسیاری از موارد، لازم است بدانیم وقتی x به

عدد معینی، مثلاً a میل می‌کند، $f(x)$ چگونه تغییر می‌کند، و آیا

مقدارهای $f(x)$ به عدد مشخصی میل می‌کند یا نه؟ در این بخش

به این موضوع می‌پردازیم.

فعالیت ۲-۴

تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر داده شده است.

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

نمودار این تابع نیز در شکل ۲۳-۲ رسم شده است.

lim سه حرف اول واژه‌ی limit به معنی حد است.

جدول ۹-۲

x	...	۱	۱/۵	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹	...	۲	...	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳	...
$f(x)=3x-1$...	۲				۴/۹۷	...	?	...	۵/۰۳			۸	...

(۱) مقدارهای $f(x)$ را برای x هایی که در جدول مقابل داده شده اند محاسبه و جدول ۹-۲ را کامل کنید.

(۲) در این جدول x به چه عددی میل می کند؟
(۳) وقتی x به عدد ۲ میل کند، مقدار $f(x)$ ها، به چه عددی نزدیک می شوند؟

- (۲)
(۳) پاسخ:
(۴)

حد $f(x)$ وقتی x به عدد ۲ میل می کند
مساوی ۵ است

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 \text{ و می نویسیم:}$$

(۴) وقتی x نقطه های روی نمودار به عدد ۲ نزدیک می شوند، $f(x)$ یا y این نقطه ها به چه عددی نزدیک می شوند؟ همان طور که می بینید $f(x)$ ها به عدد ۵ نزدیک می شوند. در این حالت می گوئیم:
(۵) آیا با تغییر مقدار $f(2)$ ، مقدار حد $f(x)$ ، وقتی $x \rightarrow 2$ ، تغییر پیدا می کند؟

فعالیت ۵-۲

تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه ی

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2 \\ 5 - x, & x > 2 \end{cases}$$

تعریف شده و نمودار آن نیز در شکل ۲۴-۲ رسم شده است.

(۱) با توجه به ضابطه ی f جدول ۱۰-۲ را کامل کنید.

جدول ۱۰-۲

x	...	۱	۱/۵	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹	...	۲	...	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳	...
$f(x)$												

(۲) با میل کردن x به عدد ۲، مقدارهای $f(x)$ چگونه تغییر می کنند؟ آیا به عدد مشخصی میل می کنند؟
(۳) آیا رابطه ی روبه رو درست است؟ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ (*)
(۴) به کمک نمودار تابع، حد تابع f را وقتی $x \rightarrow 2$ بررسی کنید.

(۵) آیا نمودار هم درستی رابطه (*) را نشان می دهد؟

- (۲)
(۳) پاسخ:
(۴)
(۵)

کار در کلاس ۲-۳

تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+6, & x < -1 \\ 3-x, & x > -1 \end{cases}$$

۱) نمودار $y = f(x)$ را در شکل (۲-۲۵) رسم کنید.

۲) حد $f(x)$ را وقتی $x \rightarrow -1$ به دست آورید.

۳) با تشکیل جدول تغییرات x ، جدول ۲-۱۱، برای مقدارهایی که به عدد -1 میل می‌کنند، حد تابع را، وقتی $x \rightarrow -1$ به دست آورید.

۴) آیا نمودار و جدول هر دو، نشان می‌دهند که :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4$$

۲-۱-۳- تعریف حد تابع: تابع f را که در همسایگی

I از عدد a (یعنی در یک بازه‌ی باز I شامل عدد a) تعریف شده است (مگر احتمالاً در a) در نظر می‌گیریم. گوئیم حد تابع f ، وقتی متغیر x به عدد a میل می‌کند، برابر عدد L است در صورتی که بتوانیم $f(x)$ را هر چه بخواهیم به L نزدیک کنیم، به شرط آن که x را به قدر کافی به عدد a نزدیک کرده باشیم. این مطلب با نماد ریاضی زیر نمایش داده می‌شود :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

مثلاً، با توجه به آنچه تاکنون بررسی کرده‌ایم :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x-1) = 5$$

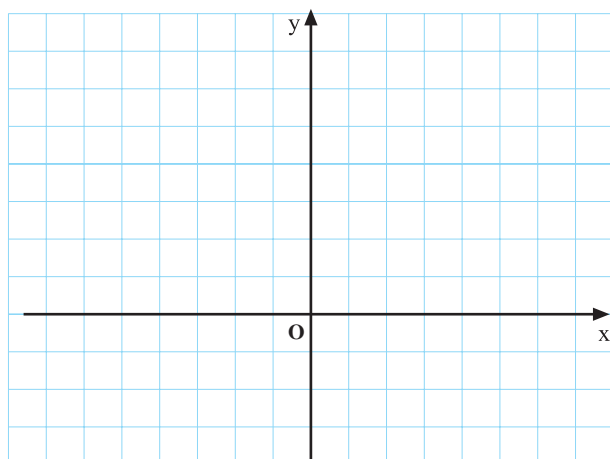
ضمناً، از آنچه تاکنون بررسی کرده‌ایم به نکته‌های زیر پی

می‌بریم.

نکته‌ی ۱: وجود حد تابع f ، وقتی $x \rightarrow a$ ، به معین بودن یا نبودن تابع در نقطه‌ی $x = a$ بستگی ندارد. لذا، حالت‌های زیر قابل تشخیص است :

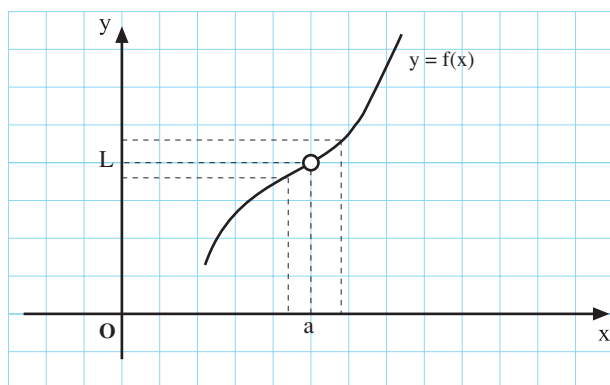
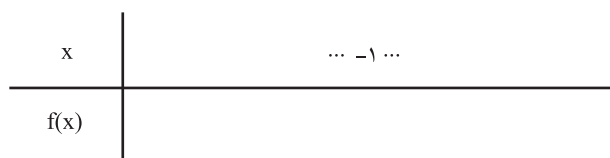
الف) تابع f ، وقتی $x \rightarrow a$ ، حد دارد ولی f در a تعریف نشده است (شکل ۲-۲۶).

ب) تابع f ، وقتی $x \rightarrow a$ ، حد دارد و f در a تعریف شده است (شکل‌های ۲-۲۷ و ۲-۲۸-الف).

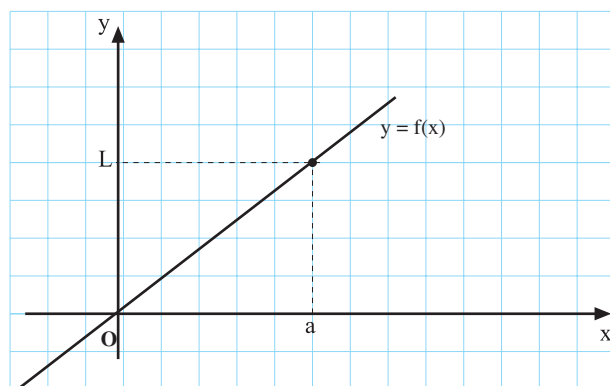


شکل ۲-۲۵

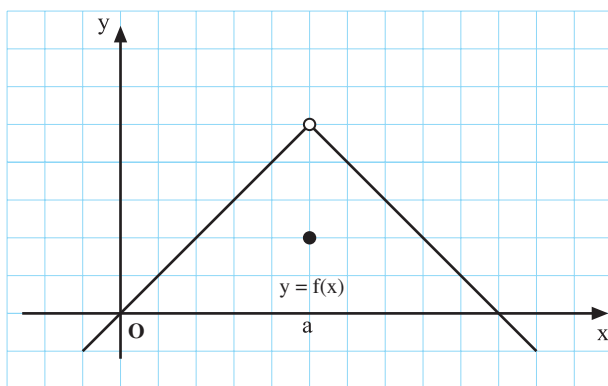
جدول ۲-۱۱



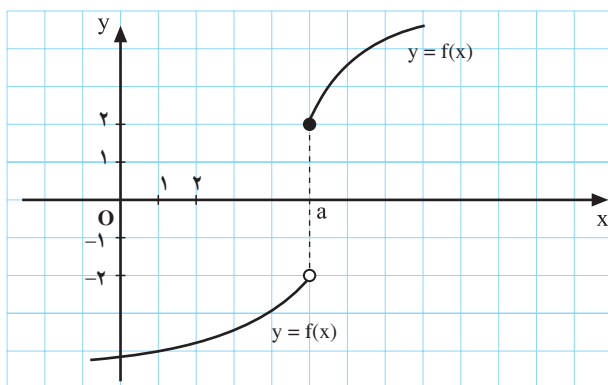
شکل ۲-۲۶



شکل ۲-۲۷



(الف)



(ب)

شکل ۲-۲۸

پ) تابع f ، وقتی $x \rightarrow a$ ، حد ندارد. (شکل ۲-۲۸-ب).
نکته‌ی ۲: اگر تابع f ، وقتی $x \rightarrow a$ دارای حد L باشد
آنگاه حد $f(x) - L$ ، وقتی $x \rightarrow a$ ، مساوی صفر است و بالعکس.

نکته‌ی ۳: اگر تابع f ، وقتی $x \rightarrow a$ ، دارای حد L باشد
حد f وقتی $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز وجود دارد و مساوی L است.

تمرین ۲-۲

۱- با توجه به شکل ۲-۲۸-ب به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a^+$ چیست؟

ب) حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a^-$ چیست؟

پ) آیا $f(x)$ ، وقتی $x \rightarrow a$ ، حد دارد؟

۲- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = 3x^2 - 1$ تعریف شده است. در مورد حد این تابع، وقتی $x \rightarrow 1$ ، تحقیق کنید (جدول ۲-۱۲).

جدول ۲-۱۲

x	
$f(x)$	

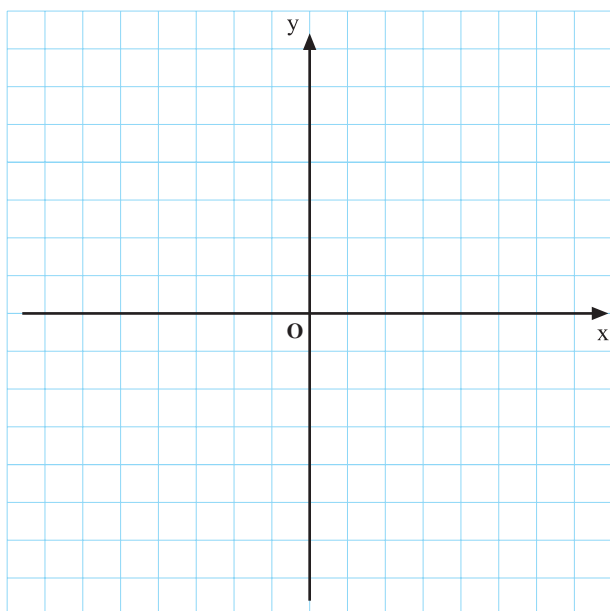
جدول ۲-۱۳

x	
$g(x)$	

۳- تابع $g: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است:

$$g(x) = x^3 + 1, \quad x \neq -1$$

در رفتار این تابع (یعنی حد داشتن یا نداشتن) وقتی $x \rightarrow -1$ تحقیق کنید (جدول ۲-۱۳).



شکل ۲-۲۹

۴- تابع $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -2 \\ 2-x, & x > -2 \end{cases}$$

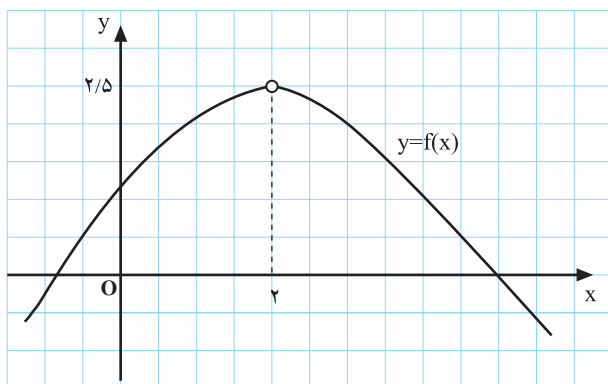
الف) مقدار $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$ را حساب کنید.

ب) آیا مقداری که به دست آورده اید با $h(-2)$ برابر است؟

پ) نمودار تابع h را در دستگاه مختصات روبه رو رسم

کنید.

ث) نتایج بالا با شکل هم خوانی دارند؟

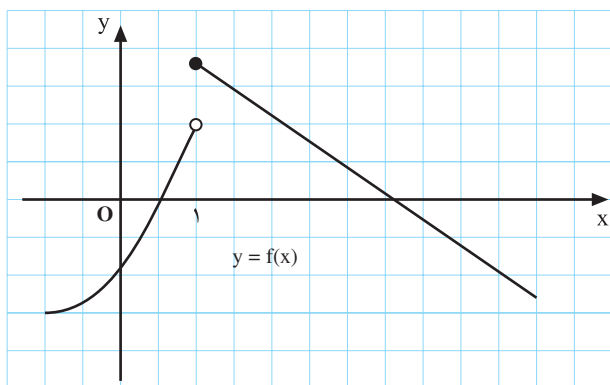


شکل ۲-۳۰

۵- با توجه به نمودار شکل ۲-۳۰ مقدار

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

را تعیین کنید.

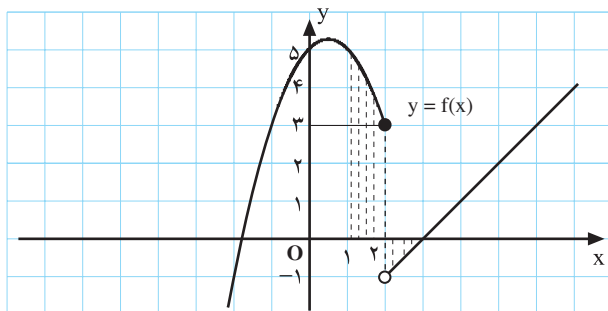


شکل ۲-۳۱

۶- با توجه به نمودار شکل ۲-۳۱ آیا

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

وجود دارد؟



شکل ۲-۳۲

۴-۱-۲- حد چپ و حد راست یک تابع: معمولاً

برای تعیین حد بعضی از تابع‌ها، مانند $\frac{|x|}{x}$ در $x = 0$ ، باید حد چپ و حد راست آن‌ها را مورد بررسی قرار داد.

تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} 5 + x - x^2, & x \leq 2 \\ x - 3, & x > 2 \end{cases}$$

نمودار $y = f(x)$ نیز در شکل ۲-۳۲ رسم شده است.

جدول ۲-۱۴ مقدارهای $f(x)$ را وقتی $x \rightarrow 2^-$ نشان

می‌دهد.

x	...	۱	۱/۵	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	...	۲
$f(x) = 5 + x - x^2$...	۵	۴/۲۵	۳/۵۶	۳/۰۹	۳/۰۲۹۹	...	?

با توجه به جدول ۲-۱۴، و y نقطه‌ها نتیجه می‌گیریم:

حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ برابر با ۳ است.

این مطلب را با نماد ریاضی زیر نشان می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$$

جدول ۲-۱۵ نیز مقدارهای $f(x)$ را، وقتی $x \rightarrow 2^+$ ،

نشان می‌دهد.

جدول ۲-۱۵

x	۲	...	۲/۰۱	۲/۱	۲/۳	۲/۵	۳	...
$f(x) = x - 3$	-۰/۹۹	-۰/۹	-۰/۷	-۰/۵	۰	...

با توجه به جدول ۲-۱۵، و y نقطه‌های روی نمودار،

نتیجه می‌گیریم:

حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 2^+$ برابر با -۱ است.

این مطلب را با نماد ریاضی زیر نشان می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$$

با توجه به این که حد چپ و حد راست تابع f وقتی

$x \rightarrow 2$ برابر نیستند نتیجه می‌گیریم که تابع f ، وقتی $x \rightarrow 2$ ،

حد ندارد.

فعالیت ۲-۶

تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده و قسمتی از نمودار آن نیز رسم شده است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

(۱) با توجه به نمودار این تابع (شکل ۲-۳۳)، حدس می‌زنید وقتی $x \rightarrow 0^-$ مقدارهای تابع به چه عددی میل می‌کنند؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = ?$$

(۲) با توجه به تعریف تابع قدرمطلق، وقتی $x > 0$ مقدار

$f(x)$ چیست؟

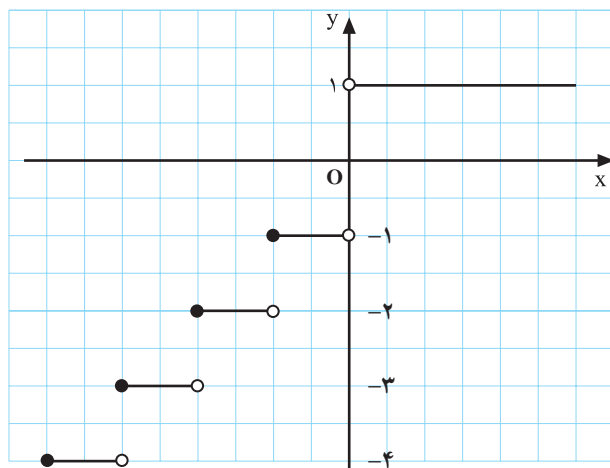
(۳) حد $f(x)$ ، وقتی $x \rightarrow 0^+$ چیست؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$$

(۴) با توجه به مرحله‌های ۱ و ۳، وقتی $x \rightarrow 0$ ، آیا

مقدارهای $f(x)$ به یک عدد مشخص میل می‌کنند؟

(۵) آیا این تابع، وقتی $x \rightarrow 0$ ، حد دارد؟ چرا؟



شکل ۲-۳۳

اگر حد چپ و حد راست یک تابع در یک نقطه متفاوت باشند آن تابع در آن نقطه حد ندارد.

(۶) با توجه به نمودار این تابع می‌توانید بگویید این تابع در

چه نقاطی حد ندارد؟

تمرین ۲-۳

۱- تابع f به صورت زیر تعریف شده است :

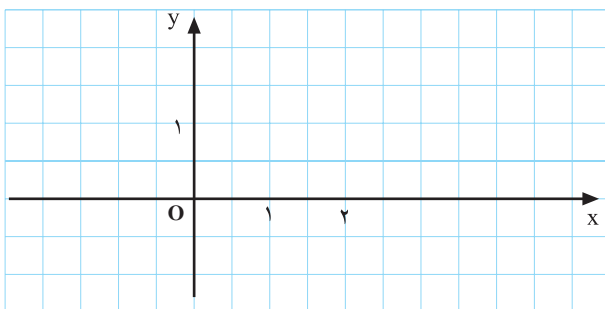
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

الف) نمودار $y = f(x)$ را در بازه‌ی $[0, 2]$ رسم کنید

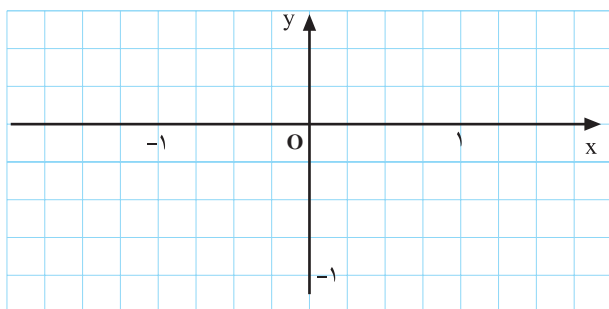
(شکل ۲-۳۴).

ب) مطلوب است محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

پ) آیا تابع f ، وقتی $x \rightarrow 1$ ، حد دارد؟



شکل ۲-۳۴

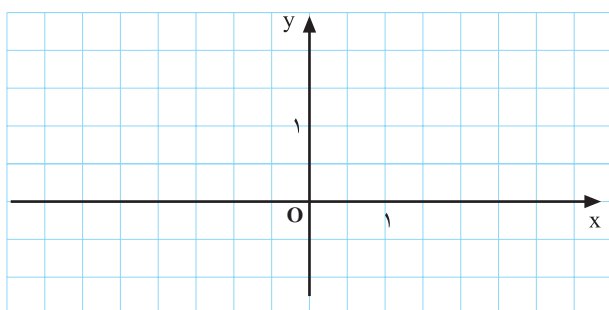


شکل ۲-۳۵

۲- تابع f به صورت زیر تعریف شده است. در رفتار این تابع وقتی $x \rightarrow 0$ تحقیق کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \frac{x}{|x|}, & x < 0 \end{cases}$$

(راهنمایی: نمودار تابع را در $\{0\} - (1, -1)$ رسم کنید (شکل ۲-۳۵)).



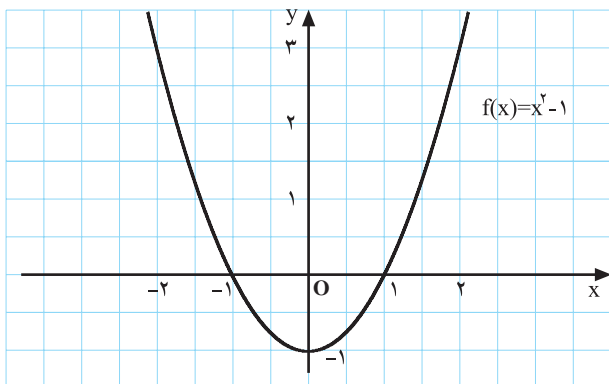
شکل ۲-۳۶

۳- فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ x - a, & x < 0 \end{cases}$$

مقدار a را طوری تعیین کنید که $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود داشته باشد. سپس مقدار این حد را بنویسید و نمودار تابع را رسم کنید (شکل ۲-۳۶).

فعالیت ۲-۷



شکل ۲-۳۷

تابع $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$ را در نظر بگیرید.

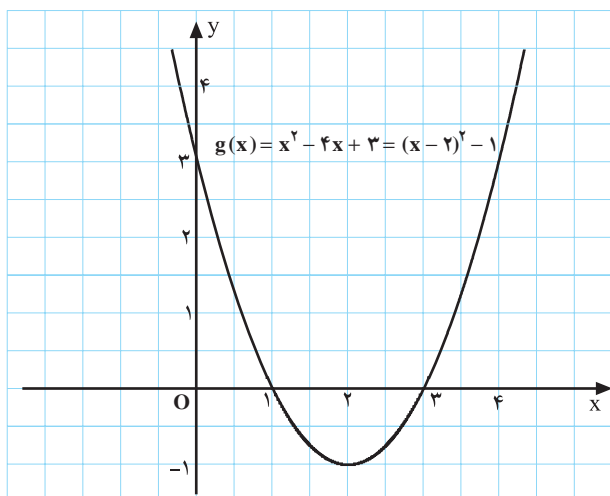
(۱) حد تابع $f(x) = x^2 - 1$ را، وقتی $x \rightarrow 1$ ، تعیین کنید (شکل ۲-۳۷).

(۲) حد تابع $g(x) = x^2 - 4x + 3$ را، وقتی $x \rightarrow 1$ ، به دست آورید (شکل ۲-۳۸).

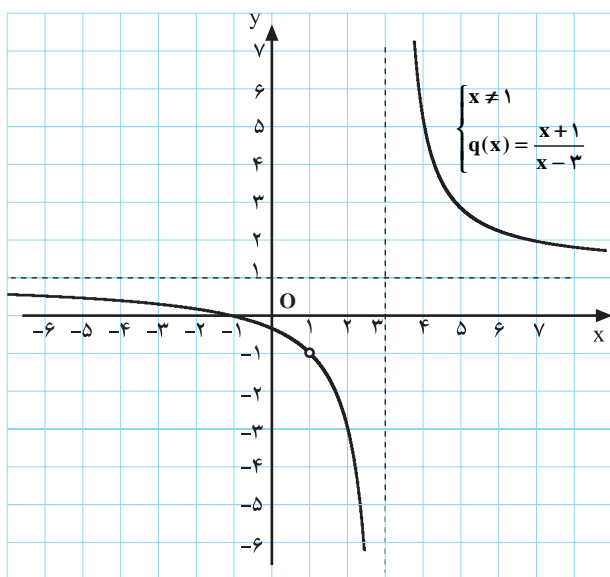
(۳) حد تابع $q(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$ را، وقتی $x \rightarrow 1$ ، به

چه صورتی درمی آید؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} = \dots$$



شکل ۳۸-۲



شکل ۳۹-۲

(۴) آیا می‌توان این حد را با استفاده از مطالبی که تاکنون گفته شده است حساب کرد؟

(۵) صورت و مخرج تابع کسری $\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$ ، یعنی

$f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = x^2 - 4x + 3$ را به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه کنید.

$$x^2 - 1 = (x-1)(\quad)$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(\quad)$$

(۶) با توجه به این که وقتی $x \rightarrow 1$ همواره $x \neq 1$ ، یعنی $x-1 \neq 0$ ، تابع $q(x)$ را ساده کنید.

$$q(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(\quad)}{(x-1)(\quad)} \\ = \text{-----}$$

(۷) آیا $q(x) = \frac{x+1}{x-3}$ ؟

(۸) حد تابع $q(x) = \frac{x+1}{x-3}$ را، وقتی $x \rightarrow 1$ ، حساب کنید (شکل ۳۹-۲).

(۹) آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow 1} q(x) = -1$ درست است؟

به‌طور کلی اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آنگاه حد

$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، وقتی $x \rightarrow a$ ، به صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید و

نمی‌توان مقدار آن را به کمک مطالبی که تاکنون گفته شده است محاسبه کرد. برای محاسبه‌ی مقدار این حد، با توجه به نوع تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ باید روش مناسبی اختیار کرد. مطالب ذیل، وقتی که $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ای باشند، مفید است.

۵-۱-۲- بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $x-a$: اگر

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ و به ازای $x = a$ داشته باشیم

$f(a) = 0$ آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است. از این ویژگی

می‌توان برای تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها استفاده کرد.

فعالیت ۸-۲

$$\begin{array}{r} x-2 \\ 2x^2-5x+2 \end{array}$$

چندجمله‌ای $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ را در نظر می‌گیریم.

(۱) مقدار $f(2)$ را حساب کنید.

(۲) آیا $f(x)$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

(۳) خارج قسمت تقسیم $f(x)$ بر $(x-2)$ را به دست آورید.

(۴) به کمک تقسیم بالا، چندجمله‌ای $f(x)$ را به

حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید.

$$2x^2 - 5x + 2 = (x-2) (\quad)$$

تمرین ۴-۲

(۱) تقسیم‌های روبه‌رو را انجام دهید.

$$\text{الف) } \begin{array}{r} x+2 \\ -2x^3+5x^2+8x-20 \end{array}$$

$$\text{ب) } \begin{array}{r} x-1 \\ 3x^4+2x^2-5 \end{array}$$

$$\text{پ) } \begin{array}{r} x+\frac{1}{2} \\ 3x^2+5x+\frac{7}{4} \end{array}$$

(۲) مقدار a را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای

$$p(x) = ax^3 + (a+1)x^2 - 18x$$

بر $(x-3)$ بخش‌پذیر باشد.

روش هورنر

برای به دست آوردن خارج قسمت و باقی مانده‌ی تقسیم یک

چندجمله‌ای بر $(x-a)$ روشی ساده وجود دارد که به روش

هورنر مشهور است. با ذکر دو مثال این روش را توضیح

می‌دهیم:

مثال ۱: برای انجام تقسیم

$$2x^3 - 3x^2 + 5x + 10 \div (x+1)$$

به صورت زیر عمل می‌کنیم.

- (۱) چندجمله‌ای را به صورت استاندارد می‌نویسیم.
- (۲) ضریب‌های چندجمله‌ای را به ترتیب از چپ به راست می‌نویسیم.
- (اگر توانی از x نباشد ضریب آن را صفر منظور می‌کنیم.)
- (۳) ریشه‌ی $(x+1)=0$ ، یعنی صفر مقسوم‌علیه را به دست می‌آوریم.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

(۴) مقدار ریشه را در جدولی به صورت جدول ۲-۱۶

می‌نویسیم.

(۵) عدد صفر را زیر ضریب بزرگ‌ترین درجه می‌نویسیم و با آن جمع می‌کنیم.

(۶) بقیه‌ی عملیات را مطابق جدول ۲-۱۷ انجام می‌دهیم.

(۷) با استفاده از اعداد جدول ۲-۱۷ خارج قسمت تقسیم را می‌نویسیم.

$$2x^3 - 3x^2 + 5x + 10 = (x+1)(2x^2 - 5x + 10)$$

مثال ۲: تقسیم $x^4 - 4x^2 + 2x - 4$ بر $(x-2)$ را به روش هورنر انجام دهید. سپس خارج قسمت تقسیم را بنویسید.

حل ۲

$$x^3 + 2x^2 + 2 = \text{خارج قسمت}$$

مثال ۳: حد تابع $q(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{x^2 + x - 2}$ را،

وقتی $x \rightarrow 1$ ، تعیین کنید.

حل ۳: چون صورت و مخرج کسر مساوی $q(x)$ ، به ازای

$x=1$ صفر می‌شوند، پس چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج بر $(x-1)$ بخش‌پذیرند. با استفاده از بخش‌پذیری داریم:

$$3x^2 + x - 4 = (x-1)(3x+4)$$

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

بنابراین، با توجه به این که $x \neq 1$ ،

$$q(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1)(3x+4)}{(x-1)(x+2)} = \frac{3x+4}{x+2}$$

لذا،

$$\lim_{x \rightarrow 1} q(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+4}{x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x+4)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+2)} = \frac{3+4}{1+2} = \frac{7}{3}$$

جدول ۲-۱۶

		۲	-۳	۵	۱۰
-۱	+	۰			
		۲			

جدول ۲-۱۷

		۲	-۳	۵	۱۰
-۱	+	۰	$(-1) \times 2$	$(-1) \times (-5)$	$(-1) \times 10$
		۲	-۵	۱۰	۰

جدول ۲-۱۸

		۱	۰	-۴	۲	-۴
۲	+	۰	۲	۴	۰	۴
		۱	۲	۰	۲	۰

در نظر بگیرید. جدول ۲-۱۹ تغییرات این تابع را وقتی $x \rightarrow 0$ نشان می‌دهد.

تمرین ۵-۲

هریک از حدهای زیر را با استفاده از بخش پذیری حساب

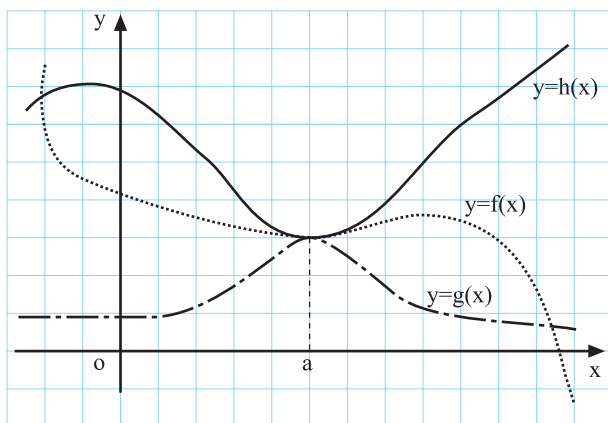
کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x - 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^3 + 2x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{(x+2)^3}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$



شکل ۴۰-۲

فعالیت ۹-۲

تابع $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^3 + 4x^2 - 5x - 2}{x^2 + 2x + 1}$ را در نظر

می‌گیریم.

(۱) مقدارهای $f(-2)$ و $g(-2)$ را به دست آورید.

(۲) حد $q(x)$ وقتی $x \rightarrow -2$ ، به چه صورت درمی‌آید؟

(۳) به کمک بخش پذیری صورت و مخرج کسر مساوی

$q(x)$ را تجزیه و بعد ساده کنید.

(۴) آیا $q(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x + 6x + 1}$ ؟

(۵) اینک حد $q(x)$ را، وقتی $x \rightarrow -2$ ، حساب کنید.

۶-۱-۲- قضیه فشردگی: اگر به ازای هر x از

بازه I ، که شامل عدد a است، مگر احتمالاً در a ، داشته باشیم:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$

مثال ۱: ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

حل: می‌دانیم که همواره $-1 \leq \sin x \leq 1$ پس، اگر x

عددی مثبت باشد داریم:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

اما، $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. بنابراین، طبق

نامساوی‌های بالا و قضیه فشردگی

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

مثال ۲: تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ، ($x \neq 0$) را

جدول ۱۹-۲

x	...	$-\frac{\pi}{3^\circ}$	$-\frac{\pi}{18^\circ}$	$-\frac{\pi}{90^\circ}$...	$\frac{\pi}{90^\circ}$	$\frac{\pi}{18^\circ}$	$\frac{\pi}{3^\circ}$...
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$...	۰/۹۹۸۱۷۳	۰/۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۹۹۹۹۸	تعریف نشده	۰/۹۹۹۹۹۹۸	۰/۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۸۱۷۳	...

به طوری که ملاحظه می شود، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $\frac{\sin x}{x}$ به عدد یک میل می کند. یعنی، جدول ۱۹-۲ نشان می دهد که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

مثال ها (در رابطه با نتیجه ی ۲)

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ را تعیین کنید.

حل: می توان نوشت:

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x}$ را حساب کنید.

حل: داریم:

$$\frac{\tan 5x}{x} = 5 \frac{\tan 5x}{5x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x} = 5$$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}$ را حساب کنید.

حل: داریم:

$$\frac{\tan \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} = \frac{2}{3} \frac{\tan \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}$$

بنابراین، با فرض $\frac{3x}{2} = t$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} = \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = \frac{2}{3}$$

نتیجه ی ۱: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

زیرا، با توجه به این که $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos 0} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

نتیجه ی ۲: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = m$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = m$

که در آن ها m عددی حقیقی و مخالف صفر است.

زیرا، می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} m \cdot \frac{\sin mx}{mx}$$

با فرض $mx = y$ ، واضح است که وقتی $x \rightarrow 0$ ،

$y = mx \rightarrow 0$ ، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} m \frac{\sin mx}{mx} = \lim_{y \rightarrow 0} m \cdot \frac{\sin y}{y} = m \cdot 1 = m$$

به همین ترتیب،

$$\lim_{x \rightarrow 0} m \frac{\tan mx}{mx} = \lim_{y \rightarrow 0} m \cdot \frac{\tan y}{y} = m \cdot 1 = m$$

تمرین ۶-۲

۱- حدهای زیر را حساب کنید. (مستقیماً از نتیجه‌های

۱ و ۲ استفاده کنید.)

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \pi x}{x}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \sqrt{2}x}{3x}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sin x}{x^2}$

۲- نشان دهید که اگر n و m اعداد حقیقی غیر صفر

باشند آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

۳- اگر m و n اعداد حقیقی غیر صفر باشند حد زیر را

حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{nx}$$

۴- با استفاده از تمرین‌های ۲ و ۳ مقدار حدهای زیر را

بنویسید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sqrt{3}x}$

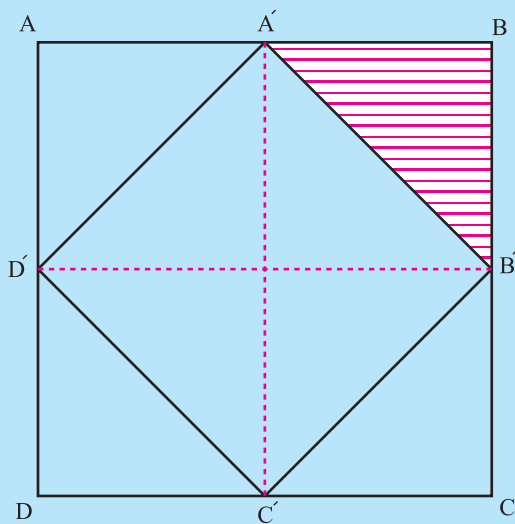
ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{5}x}{3x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x \sin 3x}{6x^2}$

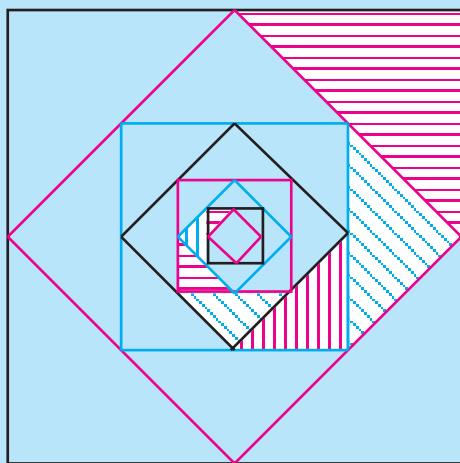
ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی



شکل ۲-۴۱



شکل ۲-۴۲

۱- در شکل ۲-۴۱ مربعی به ضلع ۴ سانتی متر رسم شده است. وسط ضلع‌های مجاور مربع نیز به هم وصل شده‌اند. پاسخ دهید:

(الف) مساحت مربع $A'B'C'D'$ چقدر است؟
(ب) مساحت قسمت سایه زده شده (مثلث $A'BB'$) چقدر است؟

۲- مجدداً وسط ضلع‌های مربع $A'B'C'D'$ شکل مسئله‌ی قبل را به هم وصل کرده‌ایم و مطابق شکل ۲-۴۲ یک گوشه‌ی آن را سایه زده‌ایم و این کار را روی مربع جدید تکرار کرده‌ایم و... با توجه به این مطلب، مجموع زیر را حساب کنید.

$$2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots =$$

این مجموع با مساحت قسمت‌های سایه زده شده چه رابطه‌ای دارد؟

۳- فرض کنید:

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2, & x > 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$$

اگر تابع f در $x = 1$ حد داشته باشد، مقدار a برابر چیست؟

۴- فرض کنید:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x > 2 \\ 3, & x = 2 \\ x - 1, & x < 2 \end{cases}$$

حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$