

بخش اول

فصل ششم

ترکیب دو تابع

هدف کلی

آموزش مفهوم ترکیب دو یا چند تابع و کاربردهای آن در حل مسائل

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند:

- ۱- ضابطه‌ی $f \circ g$ و $g \circ f$ را با داشتن ضابطه‌ی f و g بنویسد.
- ۲- مقدار تابع‌های $f \circ g$ و $g \circ f$ را در بعضی از نقطه‌های دامنه‌اش تعریف کند.
- ۳- مسائل مربوط به کاربرد ترکیب تابع‌ها را حل کند.

پیش‌آزمون (۶)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱- اگر $f(x) = x^2 + 4$ و $g(x) = 3x - 1$ مطلوب است

محاسبه‌ی:

الف) $f(g(1))$ و $g(1)$

ب) $f(3)$ و $g(f(3))$

پ) $f(g(2))$ و $g(f(2))$

۲- اگر $f(x) = 3x$ و $g(x) = \frac{1}{3}x$ ضابطه‌ی $f \circ g$ و $g \circ f$

را بنویسید.

۳- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ تعیین کنید:

الف) $f(g(x))$

ب) $g(f(x))$

۴- اگر $f(x) = 1 - x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ تعیین کنید:

الف) D_f و R_f

ب) D_g و R_g

پ) $D_{f \circ g}$ و $D_{g \circ f}$

۱-۶ ترکیب دو تابع

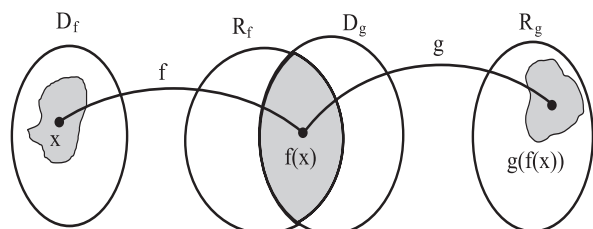
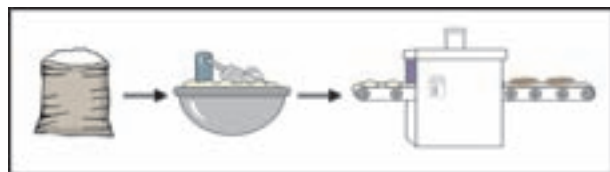
فرض کنید f و g دو تابع حقیقی باشند به طوری که اشتراک برد تابع f ، یعنی R_f ، و دامنه‌ی تابع g ، یعنی D_g ، تهی نباشد. یعنی،

$$R_f \cap D_g \neq \emptyset$$

ترکیب تابع g با f را با $g \circ f$ نشان می‌دهند و با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنند:

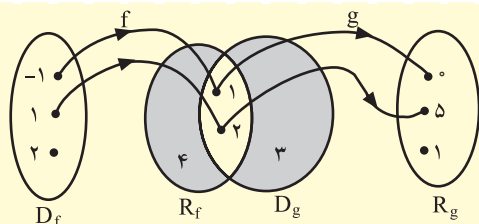
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

شکل ۱-۹۱ نشان می‌دهد که تابع $g \circ f$ فقط به ازای x ‌هایی قابل تعریف است که $f(x)$ به دامنه‌ی تابع g تعلق داشته باشد.



شکل ۱-۹۱

۱-۶-۱ مثال‌های حل شده



شکل ۱-۹۲

(۱) فرض کنید $f = \{(1, 2), (-1, 1), (2, 4)\}$ و $g = \{(1, 0), (2, 5), (3, 1)\}$ با توجه به شکل ۱-۹۲ دامنه و برد $g \circ f$ نوشته شده‌اند.

$$D_{g \circ f} = \{1, -1\}, \quad R_{g \circ f} = \{0, 5\}$$

حل ۲: با توجه به این که برای هر عدد حقیقی x ،
داریم $f(x) = x^2 + 1 > 0$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \sqrt{f(x)} \\ &= \sqrt{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

(۲) فرض کنید $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ، ضابطه‌ی $g \circ f$ را بنویسید.

حل ۳:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 1 \\ &= \frac{1-x}{x}. \end{aligned}$$

(۳) فرض کنید $f(x) = x - 1$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ ، ضابطه‌ی $f \circ g$ را بنویسید.

تمرین ۱-۱

۱- اگر $f(x) = x^2 + 2x$ آن گاه $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(t)$ ، $f(\sqrt{t})$ و $f(2t+1)$ را تعیین کنید.

۲- فرض کنید $f(x) = x + 2$ و $g(x) = x^2$. مقدار $(f \circ g)(1)$ و $(g \circ f)(1)$ را حساب کنید. آیا $f \circ g = g \circ f$ ؟

۳- ضابطه‌ی $f \circ g$ و $g \circ f$ را در هر یک از حالات زیر حساب کنید.

الف) $f(x) = 2x$ ، $g(x) = 1 - 3x$

ب) $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x + 1$

پ) $f(x) = x^3$ ، $g(x) = x^2$

ت) $f(x) = x^2$ ، $g(x) = \sqrt{x}$

۴- فرض کنید I تابع همانی با ضابطه‌ی $I(x) = x$ باشد.

اگر f تابع دلخواهی باشد $f \circ I$ و $I \circ f$ چه تابعی هستند؟

۵- فرض کنید $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

ضابطه‌ی $f \circ g$ و $g \circ f$ را تعیین کنید.

۶- فرض کنید $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$.

ضابطه‌ی $f \circ g$ و $g \circ f$ را تعیین کنید.

۷- فرض کنید $f^2 = f \circ f$ و $f^n = \overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^n$. ضابطه‌ی

f^n را در هر یک از حالات زیر تعیین کنید. (تمرین الف) برای راهنمایی حل شده است.)

الف) $f(x) = x + 1 \Rightarrow f^2(x) = f(f(x))$
 $= f(x) + 1 = x + 1 + 1 = x + 2$

$f^3(x) = f(f^2(x)) = f^2(x) + 1$
 $= (x + 2) + 1 = x + 3 \Rightarrow f^n(x) = x + n$.

ب) $f(x) = 2x$

پ) $f(x) = x^2$.

۲-۶-۱ بازی و ریاضی

(۱) تابع f بر مجموعه‌ی عددهای حسابی، یعنی

$$W = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(n) = (n^2 \text{ یکان عدد}), (n \in W)$$

مقدارهای $f^2(n) = (f \circ f)(n)$ را به دست آورید (برای n

دلخواه).

برای کمک به شما مقدار f^2 برای چند عدد در روبه‌رو

حساب شده است. دیده می‌شود که مقدارهای $f^2(x)$ متعلق به

مجموعه‌ی زیر است:

$$A = \{0, 1, 5, 6\}.$$

آیا هر عدد دلخواه n متعلق به W اختیار شود

$$(f \circ f)(n) \in A \text{ (چرا؟)}$$

$$345 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \Rightarrow f^2(345) = 5$$

$$297 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 1$$

$$340 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0$$

$$228 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 6$$

$$16 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} 6$$

$$12 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 6$$

$$23 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 1$$

$$71 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1$$

$$54 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} 6$$

$$9 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1$$

$$252 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 36 \Rightarrow f^3(252) = 36$$

$$100 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0$$

$$45 \xrightarrow{f} 25 \xrightarrow{f} 25 \xrightarrow{f} 25$$

$$17 \xrightarrow{f} 49 \xrightarrow{f} 81 \xrightarrow{f} 1$$

$$93 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 81 \xrightarrow{f} 1$$

$$146 \xrightarrow{f} 36 \xrightarrow{f} 36 \xrightarrow{f} 36$$

$$21 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1$$

$$74 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 36 \xrightarrow{f} 36$$

$$98 \xrightarrow{f} 64 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 36$$

$$109 \xrightarrow{f} 81 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1$$

$$284576 \xrightarrow{f} 642 \xrightarrow{f} 330 \xrightarrow{f} 312 \xrightarrow{f} 312$$

$$249 \xrightarrow{f} 321 \xrightarrow{f} 312$$

$$201389732564 \xrightarrow{f} 1266 \xrightarrow{f} 431 \xrightarrow{f} 312$$

$$25 \xrightarrow{f} 211 \xrightarrow{f} 312$$

$$9 \xrightarrow{f} 101 \xrightarrow{f} 312$$

$$88 \xrightarrow{f} 220 \xrightarrow{f} 330 \xrightarrow{f} 312$$

$$2 \xrightarrow{f} 110 \xrightarrow{f} 312$$

(۲) تابع f بر مجموعه‌ی عددهای حسابی به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(n) = (n \text{ یکان})^2, \quad (n \in W)$$

آیا به ازای هر عدد n از W ، $f^3(n) = (fofof)(n)$ به مجموعه‌ی زیر تعلق دارد؟ چرا؟

$$B = \{0, 1, 25, 36\}$$

در مقابل $f^3(n)$ برای چند n حساب شده است.

(۳) فرض کنید $n = 284576$ ؛ در رابطه با این عدد سه عدد دیگر می‌توان نوشت:

$$R = 6 = (n \text{ تعداد رقم‌های عدد})$$

$$Z = 4 = (n \text{ تعداد رقم‌های زوج})$$

$$F = 2 = (n \text{ تعداد رقم‌های فرد})$$

اینک تابع f را بر مجموعه‌ی عددهای طبیعی چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(n) = \overline{RZF}$$

(یعنی $f(n)$ عدد حاصل از کنار هم گذاشتن سه عدد R ، Z و F است.)

بنابراین، $f(284576) = 642$ ، f^2 ، f^3 و ... را حساب

کنید تا وقتی که به عدد ثابتی برسید. این عدد ثابت چیست؟

حالا به مثال‌های روبه‌رو توجه کنید.

آیا برای هر عدد طبیعی n ، اگر فرایند بالا را روی آن

انجام دهیم، در نهایت به عدد ۳۱۲ می‌رسیم؟ [۱۱]

امتحان کنید!

آزمون پایانی (۶)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱- اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ آن گاه $f(2)$ ، $f(\frac{1}{2})$ ، $f(\sqrt{3})$ ، $f(\frac{1}{\sqrt{3}})$ و $(f \circ f)(x)$ را تعیین کنید.

۲- اگر $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ و $g(x) = \sqrt{2-x}$ باشد حساب کنید:

الف) $f(g(2))$ و $g(f(1))$

ب) $f(g(x))$ و $g(f(x))$

پ) آیا برای هر x ، $g(f(x)) = f(g(x))$ ؟

۳- فرض کنید $f(x) = x^2 + 5x$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

الف) D_f و R_g را تعیین کنید.

ب) $D_{f \circ g}$ را حساب کنید.

پ) $(f \circ g)(x)$ را بنویسید.

۴- اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \sin x$ کدام یک از

مقدارهای $(f \circ g)(\frac{\pi}{2})$ و $(g \circ f)(3)$ را می توان تعیین کرد؟ چرا؟

۵- فرض کنید:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

اگر n عددی طبیعی باشد $f^n(x)$ را تعیین کنید.

تمرین‌های تکمیلی بخش اول

۱- نقطه‌های نظیر $\sqrt{3}$ و $\frac{\sqrt{2}}{4}$ را روی یک محور اعداد حقیقی مشخص کنید (روش انجام کار را شرح دهید).

۲- الف) نقطه‌های $A(3, 4)$ و $B(1, 2)$ و $C(5, 2)$ را در یک دستگاه مختصات قائم مشخص کنید.
ب) نوع مثلث ABC را تعیین کنید.
پ) مختصات نقطه‌ی A' ، وسط ضلع BC ، را به دست آورید.

ت) طول میانه‌ی AA' از این مثلث را حساب کنید.

۳- مقدارهای a و b را چنان بیابید که دو نقطه‌ی $M(b-1, 1-a)$ و $M'(a+2, 3b)$ نسبت به محور x قرینه‌ی یکدیگر باشند. سپس مختصات این دو نقطه را حساب کنید.

۴- آیا نقطه‌ی $A(2m-1, m)$ می‌تواند بر نقطه $B(2, -3)$ منطبق باشد؟ چرا؟

۵- هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب آن‌ها را به صورت مجموعه و نماد بازه بنویسید و روی محور اعداد نیز نشان دهید.

الف) $1 < -2x + 3 < 9$

ب) $\frac{x+2}{3} > \frac{1-x}{2}$

۶- اگر $A = [-3, 4]$ و $B = [2, 5]$ باشد، بازه‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $A \cap B$

ب) $A \cup B$

پ) $A - B$

۷- ولتاژ ورودی یک ترانسفورمر 23° ولت و ولتاژ خروجی آن $11/5$ ولت است. ثابت این ترانسفورمر را تعیین کنید.

۸- کدام مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) $\{(2, 5), (3, -1), (4, 6), (-2, 2)\}$

ب) $\{(-1, 3), (2, 4), (3, 2), (-2, 7), (2, 6)\}$

۹- کدام، ضابطه‌ی یک تابع است؟

الف) $y + x^2 - 4 = 0$

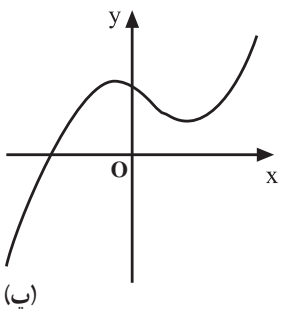
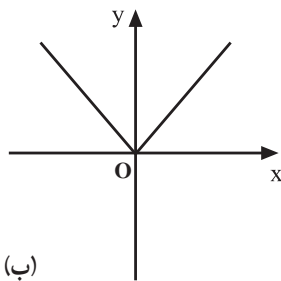
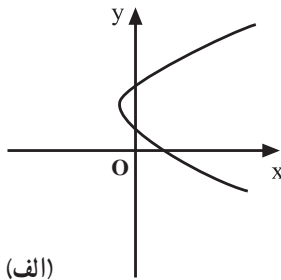
ب) $y^2 + x - 4 = 0$

پ) $|y| = x + 3$

ت) $y = |x| - 2$

۱۰- کدام شکل، نمودار یک تابع را مشخص می‌کند؟

(شکل ۹۳-۱).



شکل ۹۳-۱

۱۱- تابع $y = -x^2 + 4x$ داده شده است.

۱۵- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشد:

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

الف) ضابطه $(f \times g)(x)$

ب) آیا نقطه $A(2, 4)$ روی این نمودار است؟

ب) ضابطه $(g \circ f)(x)$

پ) مقدار m را چنان بیابید که نقطه $(2m, 1)$ روی

پ) $f(2) \times g(2)$

نمودار این تابع باشد.

ت) $g(f(2\sqrt{2}))$

۱۲- اگر $f(x) = ax^2 + 3x - a$ مقدار a را چنان

ت) $f(3) \times g(\frac{1}{3})$

بیابید که $f(2) = 8$ باشد.

را تعیین کنید.

۱۳- نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱۶- اگر $f(x) = \sqrt{2x}$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشد، ضابطه

الف) $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ و $x \in [0, 2\pi]$

$(g \circ f)(x)$ را تعیین کنید.

ب) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ و $x \in [0, 2\pi]$

۱۴- دامنه‌ی هر یک از تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $y = -2x^2 + x$

ب) $y = \frac{3x}{x^2 - 1}$

پ) $y = \sin 2x$

ت) $y = \sqrt{5x + x^2}$