

توابع خاص نامعادله و تعیین علامت

فصل ۳



توابع خاص و حل نامعادله

روابط زیادی بین پدیده‌ها یافت می‌شود که خطی نیست. به طور مثال رابطه‌ی بین طول ضلع یک مربع و مساحت آن و یا رابطه‌ی بین شعاع یک دایره و مساحت آن غیر خطی است. اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از x است و به صورت $f(x) = x^2$ یا $y = x^2$ قابل نمایش است. این تابع چون به کمک یک چند جمله‌ای درجه دوم از x بیان شده است، یک تابع درجه دوم از x نامیده می‌شود. به جای x که معمولاً آن را متغیر مستقل^۱ می‌نامند می‌توان از حروف دیگری نیز استفاده کرد. مثلاً c ، b ، a و... بنابراین $f(x) = x^2$ یا $f(a) = a^2$ یا $f(b) = b^2$ در حقیقت یک تابع را نمایش می‌دهند، هرگاه مقادیری که برای x یا a یا b در نظر می‌گیریم یکسان باشند. بنابراین اگر شعاع یک دایره را با r نمایش می‌دهیم تابعی که مساحت دایره را بر حسب شعاع آن معلوم می‌کند به صورت $f(r) = \pi r^2$ است که باز هم یک تابع درجه دوم است. به نظر شما دامنه‌ی این تابع چیست؟

به عنوان مثالی دیگر گره‌ای به شعاع r را در نظر بگیرید. حجم گره، تابعی از شعاع آن است. این تابع را می‌توان با نمایش جبری $f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ معرفی کرد. عبارت جبری $\frac{4}{3}\pi r^3$ یک چند جمله‌ای درجه سوم بر حسب r است. بنابراین $f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ را یک تابع درجه سوم می‌نامند. به همین ترتیب برخی از توابع هستند که معادله‌های آن‌ها، چند جمله‌ای‌های جبری بر حسب یک متغیر هستند. به این گونه توابع، توابع چند جمله‌ای گفته می‌شود.

به طور مثال توابع زیر همگی توابع چند جمله‌ای هستند:

$$f(x) = x^2 + 3x + 1 \quad g(x) = 5x^3 + 7 \quad h(a) = 2a^3 + 3a^2 - 1$$

$$t(b) = b^4 + 2b - 1 \quad f(x) = \frac{3}{8}x^5 + 6x^4 + 2x - \sqrt{7} \quad f(x) = -4x + 9$$

۱. معمولاً اعضای دامنه را متغیر مستقل و مقادیر تابع را متغیر وابسته می‌نامند.

۱- فرض کنید که تابع $f(x) = x^2$ تابعی باشد که مساحت یک مربع را برحسب طول ضلع آن به دست می دهد. نمودار این تابع را رسم کنید و آن را با نمودار تابعی که با معادله $y = x^2$ داده می شود مقایسه کنید. دامنه و برد هر دو را به دست آورید و با یکدیگر مقایسه کنید.

۲- تابع $g(x)$ با جدول زیر داده شده است. جاهای خالی را پر کنید.

x	-۳	-۲	۰	۱	۲	۳
$g(x) = x^2 + 5$	۱۴					

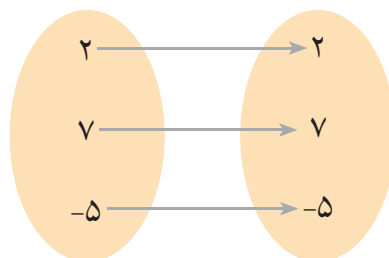
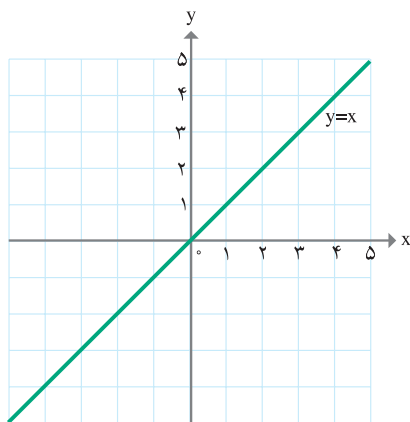
تابع همانی: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو در دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، آن تابع را تابع همانی می نامند.

در ادامه سه تابع با نمایش های متفاوت ارائه شده است :

الف) توضیح دهید که چرا هر یک از نمونه های ارائه شده تابع همانی هستند؟

ب) آیا می توانید تفاوت های آن ها را بیان کنید؟

ج) دامنه و برد هر کدام را به دست آورید.



اعداد طبیعی	۱	۲	۳	۴	۵	...
اعداد طبیعی	۱	۲	۳	۴	۵	...

تابع همانی را معمولاً با معادله $f(x) = x$ نیز نمایش می دهند.

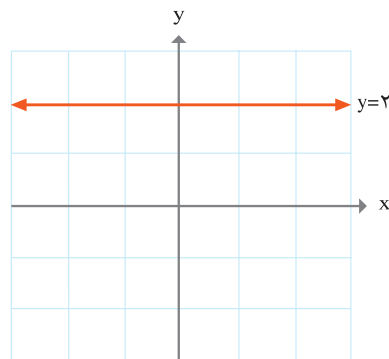
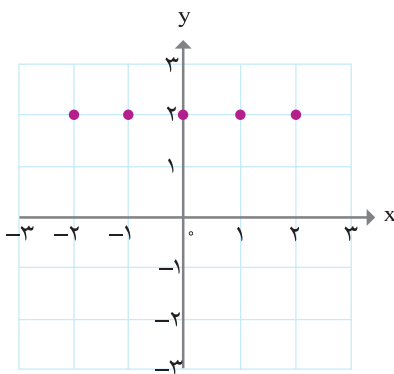
تابع ثابت

فرض کنید که دمای هوا در ساعات ۹ تا ۱۱ صبح تغییر نکند. این رابطه بین ساعات روز و دمای هوا، گونه‌ای از تابع را مشخص می کند که تابع ثابت نامیده می شود.



نمونه‌هایی از تابع ثابت در این جا ارائه شده اند، آن‌ها را با هم مقایسه کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آن‌ها را بیان کنید. بُرد این توابع چه خاصیتی دارد؟

ساعات روز	۹	۹/۵	۱۰	۱۰/۵	۱۱
دمای هوا	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸



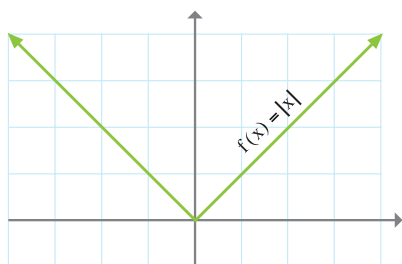
تابع ثابت تابعی است که برد آن تنها شامل یک عضو است.

تابع قدر مطلق

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد را به قدر مطلق آن‌ها نظیر می‌کند.

x	-۴	$-\frac{۷}{۳}$	-۲	-۱	۰	۱	$\sqrt{۲}$	$\frac{۷}{۳}$	۳	۴
f(x)	۴	$\frac{۷}{۳}$	۲	۱	۰	۱	$\sqrt{۲}$	$\frac{۷}{۳}$	۳	۴

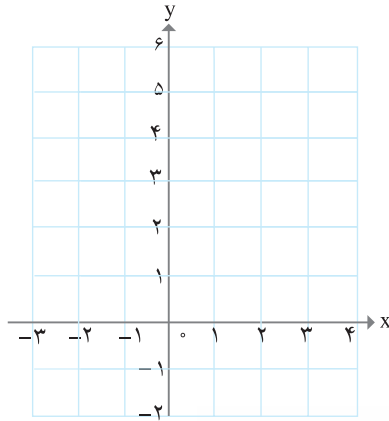
تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود. تابع قدر مطلق را با $f(x) = |x|$ نمایش می‌دهند.



در حالی که دامنه‌ی تابع قدر مطلق مجموعه اعداد حقیقی در نظر گرفته شود، نمودار تابع را رسم کرده‌ایم. برد این تابع، همه‌ی اعداد نامنفی یعنی: $[۰, +\infty)$ است. همان‌گونه که از جدول و شکل پیداست، این تابع یک به یک نیست.

با تکمیل جدول، زیر تابع $f(x) = |x| + ۳$ را رسم کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۳
$f(x) = x + ۳$				۳	$\frac{۷}{۲}$			

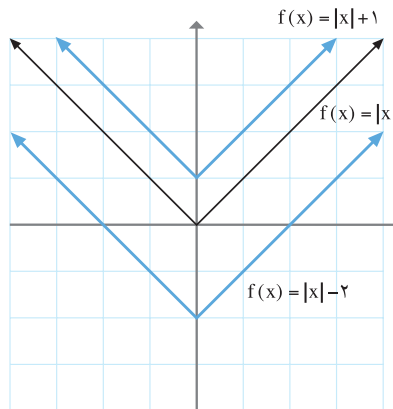


در شکل زیر با کمک تابع $f(x) = |x|$ دو تابع $f(x) = |x| + 1$ و $f(x) = |x| - 2$ را رسم کرده ایم.

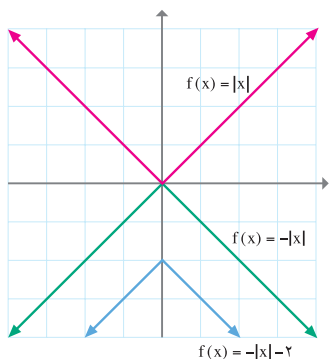
الف) با استفاده از شکل های زیر توضیح دهید که هر یک از آن ها چگونه رسم شده است.

ب) دامنه و برد هر یک را به دست آورید. آیا این توابع یک به یک هستند؟

ج) به همین روش تابع $f(x) = |x| + 4$ را رسم کنید.



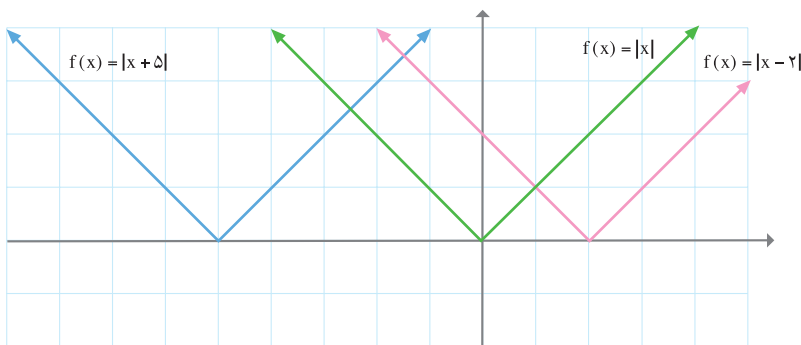
این گونه رسم یک تابع به کمک تابعی دیگر را «انتقال» نمودار تابع می نامند.



در شکل های زیر دامنه و برد توابعی که به کمک تابع قدر

مطلق $f(x) = |x|$ رسم شده اند را بیابید. $f(x) = -|x|$

چگونه رسم شده است؟



۱- نمودار تابع قدر مطلق $f(x) = |x - 4|$ را در حالت های زیر رسم کنید.

الف) $\{1, 2, 3, 4\}$ دامنه ی f

ب) مجموعه ی همه ی اعداد بزرگتر یا مساوی ۴ = دامنه ی f

ج) همه ی اعداد حقیقی = دامنه ی f

۲- توابع $f(x) = |x| + 2$ و $g(x) = |x + 2|$ و $h(x) = |x| - \frac{2}{3}$ را به کمک انتقال تابع

قدر مطلق $f(x) = |x|$ رسم کنید و دامنه و برد آن ها را به دست آورید.

۳- توابع $h(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$ و $f(x) = |x|$ و $g(x) = |2x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید

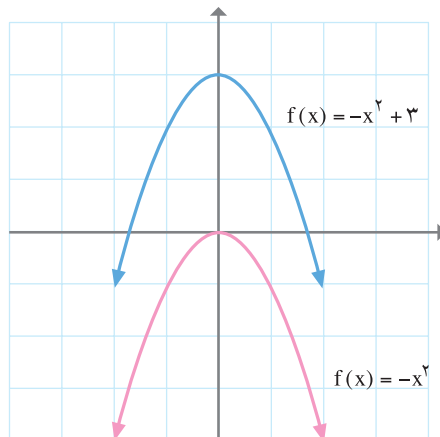
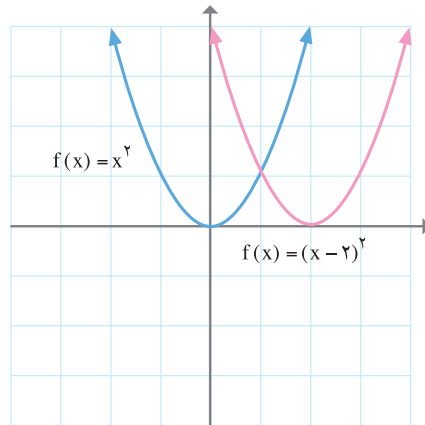
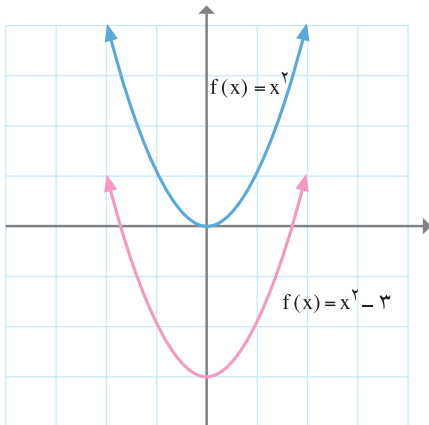
و با یک دیگر مقایسه کنید. برای رسم این توابع از جدولی شبیه تابع قدر مطلق کمک بگیرید.

رسم نمودار برخی از توابع درجه دوم به کمک انتقال تابع $f(x)=x^2$

مانند آن چه که در مورد توابع قدر مطلق دیدیم، می توان نمودار برخی از توابع درجه دوم را به کمک انتقال تابع $f(x)=x^2$ یا همان $y=x^2$ رسم کرد.



الف) توضیح دهید که هر یک از نمودارهای زیر چگونه به کمک نمودار $y=x^2$ رسم شده اند.
 ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را با استفاده از نمودار آن ها به دست آورید.



۱- در شکل های زیر نمودار توابع درجه دوم زیر رسم شده اند.

$$f(x) = (x - 5)^2 - 2$$

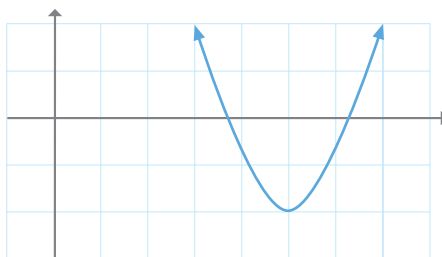
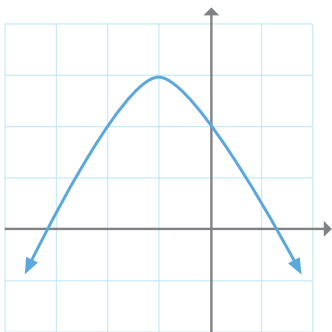
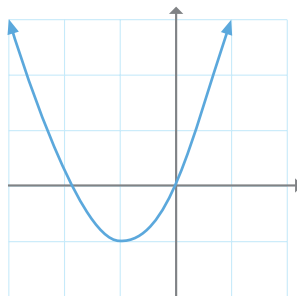
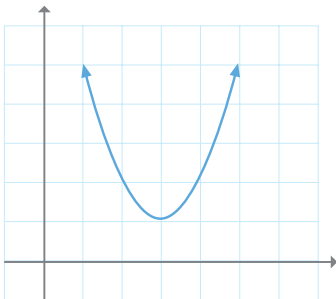
$$f(x) = (x + 1)^2 - 1$$

$$f(x) = (x - 3)^2 + 1$$

$$f(x) = -(x + 1)^2 + 3$$

الف) تعیین کنید که هر یک از نمودارها چه تابعی را نشان می دهند.

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید :



۲- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2$$

$$f(x) = -(x - 1)^2 - 4$$

$$f(x) = 2x^2$$

$$f(x) = (x - 5)^2$$

توابع گویا

همان گونه که برخی از توابع به کمک یک چند جمله‌ای قابل نمایش هستند، بعضی از توابع را می‌توان به کمک یک عبارت گویا نمایش داد. هر یک از توابع زیر یک تابع گویا است:

$$f(x) = \frac{2}{x+1} \quad g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-\frac{2}{5}x + 7} \quad h(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2 - 4}$$

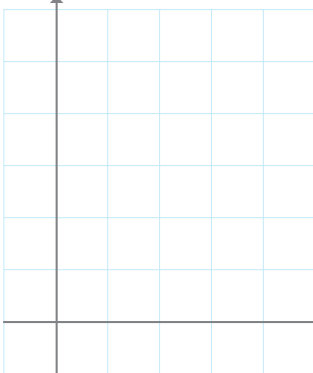
۱- جدول زیر رابطه‌ی بین اعداد طبیعی و وارون آن‌ها را نشان می‌دهد.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
f(x)	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$...

الف) معادله‌ای برای رابطه‌ی داده شده بر حسب x به دست آورید. آیا این معادله یک تابع گویا را نشان می‌دهد؟

ب) دامنه‌ی این تابع را معلوم کنید.

ج) نمودار این تابع را (با مشخص کردن زوج‌های مرتب داده شده در جدول، در یک صفحه مختصات) رسم کنید.



۲- در فعالیت ۱ به جای اعداد طبیعی، اعداد حقیقی را

در نظر بگیرید. تنها عدد حقیقی که وارون ندارد، صفر است،

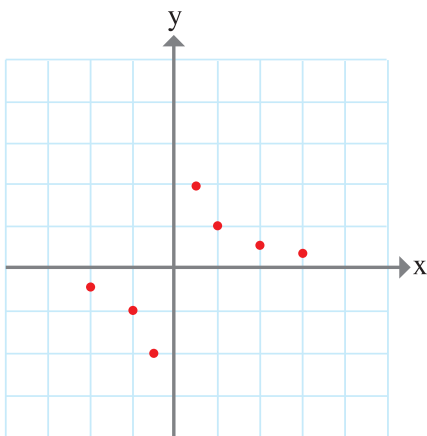
زیرا تقسیم بر صفر تعریف نشده است. یک نمایش مناسب

برای تابعی که به هر عدد حقیقی، وارون آن را نسبت دهد، نمایش جبری $f(x) = \frac{1}{x}$ یا معادله‌ی

$y = \frac{1}{x}$ است. دامنه‌ی چنین تابعی، مجموعه‌ی همه‌ی اعدادی است که به ازای آن‌ها عبارت

گویای $\frac{1}{x}$ تعریف شده است، یعنی دامنه‌ی تابع f(x) مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی به جز صفر یا

همان $R - \{0\}$ است.



الف) چه تفاوتی بین دامنه‌ی تابع f و دامنه‌ی تابع به دست آمده در فعالیت ۱ وجود دارد؟

ب) قسمتی از نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. بقیه‌ی نمودار را کامل کنید. (زوج‌های مرتب بیشتری را از تابع مشخص کنید و نقاط به دست آمده روی نمودار را به هم وصل کنید.)

ج) آیا می‌توانید به کمک شکل به دست آمده، برد تابع f را تعیین کنید؟ آیا این تابع یک به یک است؟

داده‌ها

دامنه‌ی توابع گویای زیر را به دست آورید :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-9} \quad g(x) = \frac{255x}{100-x} \quad h(x) = \frac{x+7}{3x} \quad k(x) = \frac{\frac{1}{2}x-4}{x^2+1}$$

توابع گویا در دنیای واقعی دارای کاربردهای زیادی هستند. در فعالیت زیر با یکی از این کاربردها آشنا می‌شویم :

مثال

هزینه‌ی پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به وسیله‌ی تابعی

مانند : $f(x) = \frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه‌ی پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است. مثلاً "هزینه‌ی پاک‌سازی ۱۰ درصد آلودگی برابر است با :

$$f(10) = \frac{255 \times 10}{100-10} = \frac{2550}{90} = 28 \frac{2}{3}$$



الف) هزینه‌ی پاک‌سازی ۵۰ درصد از آلودگی این رودخانه چه قدر است؟

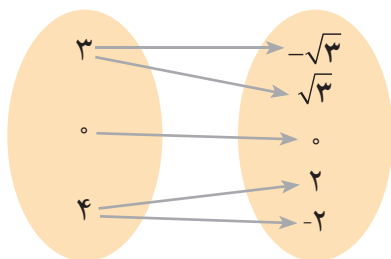
ب) آیا امکان دارد که با توجه به تابع داده شده، ۱۰۰ درصد از آلودگی رودخانه را از بین برد؟

ج) دامنه‌ی تابع داده شده را با توجه به رابطه‌ی داده شده به کمک بازه نمایش دهید.

د) دامنه‌ی این تابع را با دامنه‌ی تابع g مطرح شده در تمرین در کلاس مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای از این مقایسه به دست می‌آید؟

توابع رادیکالی

پیدا کردن دامنه و برد هر تابع دلخواهی، همیشه کار ساده‌ای نیست. در این کتاب تأکید بر پیدا کردن دامنه‌ی توابع است. زیرا در بیش‌تر کاربردهای توابع در دنیای واقعی، تعیین دامنه اهمیت بیش‌تری از پیدا کردن برد آن دارد. ضمناً به‌طور معمول پیدا کردن دامنه، کمک به یافتن برد آن می‌نماید.

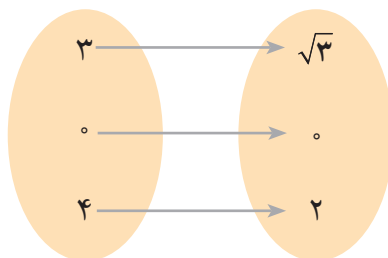
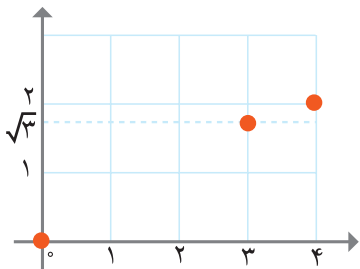


۱- می‌دانید که تنها اعداد نامنفی ریشه‌های دوم دارند. در رابطه‌ی مقابل که با نمودار ون نمایش داده شده است، هر عدد به ریشه‌های دوم آن نظیر شده است، چرا این رابطه یک تابع نیست؟

اگر رابطه‌ی بالا را به این شکل تغییر دهیم که هر عدد به ریشه‌ی دوم نامنفی آن نظیر شود یک تابع به دست می‌آید. برخی نمایش‌های متفاوت تابع به دست آمده در صفحه‌ی بعد ارائه شده است.

x	۰	۳	۴
y	۰	$\sqrt{3}$	۲

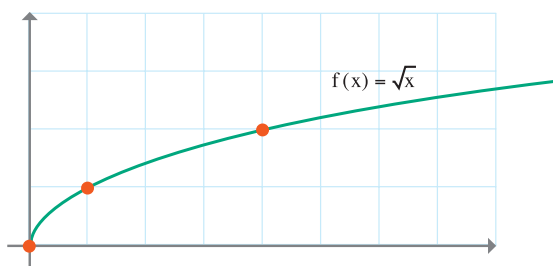
$$\{(0,0), (3, \sqrt{3}), (4, 2)\}$$



دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی $A = \{0, 3, 4\}$ و برد آن $B = \{0, \sqrt{3}, 2\}$ است.

نمایش جبری این تابع به صورت $y = \sqrt{x}$ است که یک تابع رادیکالی نامیده می‌شود.

۲- در مثال قبل سه عدد ۰ و ۳ و ۴ به ریشه‌ی دوم نامنفی خود نظیر شدند. حال فرض کنید که تابعی مانند f هر عدد نامنفی را به ریشه‌ی دوم نامنفی آن نظیر کند. دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی همه‌ی اعداد نامنفی است که می‌توان آن را به صورت بازه‌ی $[0, +\infty)$ نمایش داد. برد تابع f نیز $[0, +\infty)$ است.



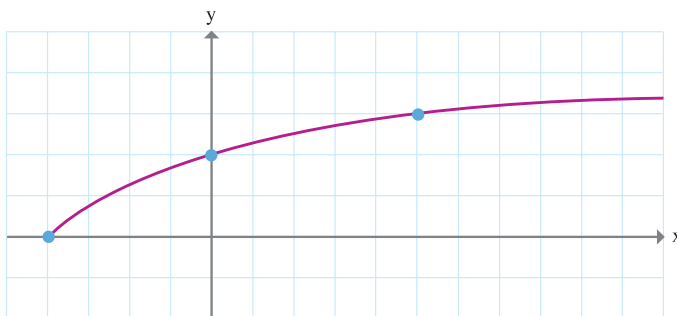
معادله‌ی این تابع به صورت $y = \sqrt{x}$ یا $f(x) = \sqrt{x}$ است و نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.

آیا کار با سه نمایش دیگر این تابع (زوج مرتبی، نمودار ون و جدول) آسان‌تر و کارآمدتر هستند؟

۳- دامنه و برد تابع $f(x) = \sqrt{x+4}$ را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

حل: برای یافتن دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{x+4}$ یا $y = \sqrt{x+4}$ باید اعدادی را بیابیم که برای آن‌ها حاصل $x+4$ نامنفی باشد. به عبارت دیگر باید داشته باشیم: $x+4 \geq 0$

جواب این نامعادله $x \geq -4$ است. پس دامنه‌ی تابع بازه $[-4, +\infty)$ است. نمودار تابع f چنین است:



برد این تابع یا مجموعه‌ی مقادیری که برای y به دست می‌آید، بازه‌ی $[0, +\infty)$ است.



۱- نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را به دست آورید.

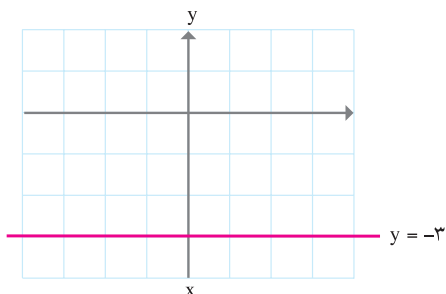
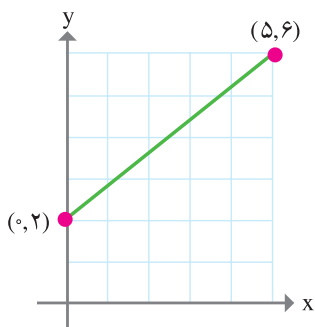
الف) $g(x) = \sqrt{x} + 4$

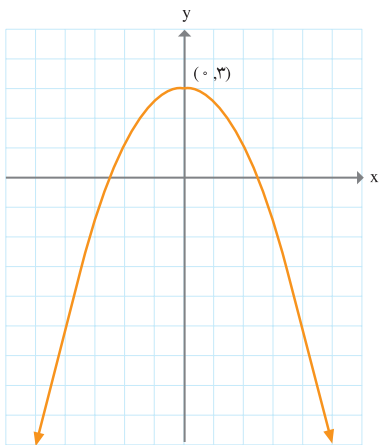
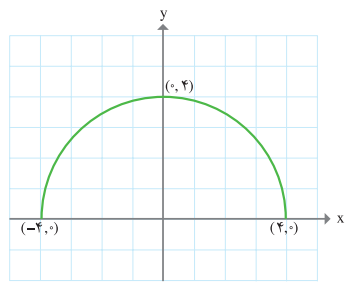
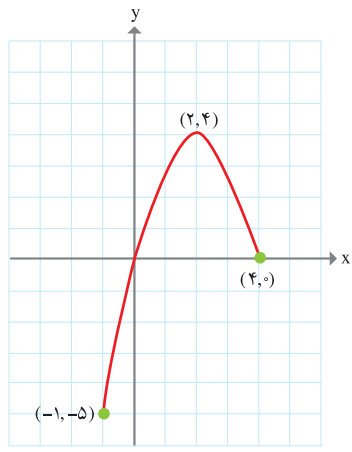
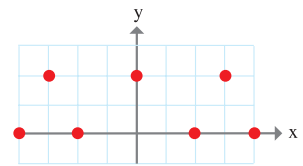
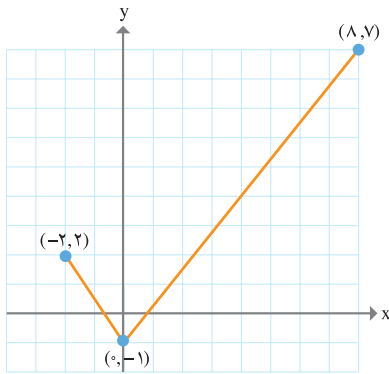
ب) $h(x) = \sqrt{x-4}$

ج) $t(x) = \sqrt{x} - 4$

د) $m(x) = \sqrt{2x-5}$

۲- در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هریک از این توابع را به کمک نمودار آن‌ها معلوم کنید. در هر مورد که امکان دارد دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید.





۱- نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و دامنه و برد هر یک را به دست آورید.
 کدام یک از این توابع خطی است؟

$$f(x) = \frac{1}{4}x \quad g(x) = \frac{1}{4}x + 2 \quad h(x) = \frac{1}{4}(x - 2)$$

۲- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

$$y = \sqrt{2x} \quad y = \sqrt{-5+x} \quad y = \sqrt{-x+3} \quad y = \sqrt[3]{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x-2} + 1 \quad g(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x+3} \quad h(x) = -\sqrt{x} - 1 \quad y = \sqrt{-2x+7}$$

۳- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) دامنه‌ی تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(0, \infty)$ و بُرد آن نیز $(0, \infty)$ است.

ب) دامنه‌ی تابع $f(x) = 2|x| - \frac{1}{3}$ همه‌ی اعداد حقیقی و بُرد آن $(2, \infty)$ است.

ج) دامنه‌ی تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است.

د) اگر $f(x) = 2x + 1$ آن گاه: $f(1) = \frac{f(2)}{2}$

۴- اگر $f(x) = 2x - 3$ مطلوب است:

$$f(0) \quad f(1) \quad f\left(\frac{3}{4}\right) \quad f(a) \quad f(2x) \quad f(x+1)$$

۵- دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{5}x - 1 \quad h(x) = \frac{5}{x^2 - 2x} \quad y = \frac{3x^2 - x + 7}{x^2 - 2x - 3} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{2x - 7}{4} \quad y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad f(z) = \frac{z + 2}{\sqrt{z - 2}} \quad y = \frac{\sqrt{x + 1}}{x}$$

۶- نمودار یک تابع خطی f از نقاط $(۳, -۴)$ و $(-۳, ۰)$ می‌گذرد. مطلوب است:
 $f(-۴)$, $f(-۱)$

۷- دو مثال از دو تابع متفاوت ارائه کنید که هر دو دارای دامنه‌ها و بردهای مساوی باشند، ولی هیچ زوج مرتبی در بین آن‌ها مشترک نباشد.

۸- فرض کنید برای تابعی مانند f داشته باشیم: $f(x-1) = 5x$ مطلوب است: $f(7)$.

۹- نمودار تابعی مانند y را رسم کنید که دامنه‌ی آن $[-۳, ۳]$ و برد آن $[۰, ۵]$ باشد، مشروط بر آن که:

(الف) تابع y یک به یک باشد.

(ب) تابع y یک به یک نباشد.

۱۰- یک شرکت حمل و نقل مسافر، برای هر گروه ۸۰ نفره یا بیش‌تر از افراد، نرخ حمل و نقل هر مسافر توسط اتوبوس درستی را از فرمول زیر تعیین می‌کند:

$$n \geq 80 \quad \text{نرخ حمل و نقل هر مسافر بر حسب هزار تومان} = 8 - 0.05(n - 80)$$

که در آن n تعداد مسافر است و $\{90, 100, 110, 120, 130, 140, 150\}$ $n \in$

(الف) نرخ حمل و نقل هر مسافر برای یک گروه ۱۰۰ نفره چه قدر است؟

(ب) هزینه‌ی حمل و نقل ۱۰۰ مسافر چه قدر است؟

(ج) تابعی بنویسید که هزینه‌ی حمل و نقل را بر حسب n به دست دهد.

(د) جدول زیر را کامل کنید و سپس نمودار $R(n)$ را رسم نمایید. بیش‌ترین مقدار به دست آمده برای $R(n)$ را چگونه تفسیر می‌کنید؟

n (تعداد مسافر)	۹۰	۱۰۰	۱۱۰	۱۲۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۵۰
$R(n)$ (هزینه‌ی کل بر حسب هزار تومان)	۷۱۵

۱۱- فرض کنید $f(x) = 3x$ و $g(x) = 2x + 1$ کدام یک از روابط زیر در مورد f و g درست و کدام یک نادرست است؟

(الف) $g(a+b) = g(a) + g(b)$, $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(ب) $g(ab) = g(a).g(b)$, $f(ab) = f(a).f(b)$

(ج) $g(kx) = kg(x)$, $f(kx) = kf(x)$



۱۲- فرض کنید $f(x) = mx + b$ یک تابع خطی باشد و داشته باشیم:

$$f(2) = 5 \text{ و } f(x+2) = f(x) + 2$$

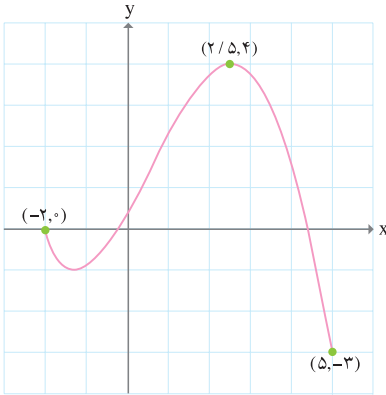
الف) مطلوب است تابع f و رسم نمودار آن.

ب) آیا می‌توان گفت که در هر تابع خطی رابطه $f(x+2) = f(x) + 2$ برقرار است؟

۱۳- یک تانکر گاز از یک استوانه و دونیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 3° متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

۱۴- تابعی بنویسید که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی $\{0, 2, 5\}$ باشد و هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کند:

الف) یک به یک نباشد (ب) $f(0) > f(2)$



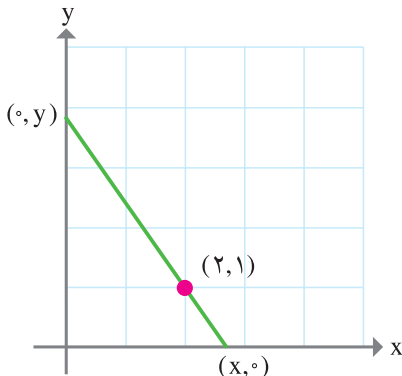
۱۵- دامنه و برد تابع زیر را پیدا کنید.

۱۶- اگر $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ مطلوب است:

$f(0)$ و $f(1)$ و $f(\sqrt{2})$

۱۷- اگر $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ و $f(1) = 5$ و $f(-2) = -1$ مقدار $3a - 2b$ را

به دست آورید.



۱۸- به ازای هر خط که از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد و جهت مثبت محورهای مختصات را در نقاط $(x, 0)$ و $(0, y)$ قطع می‌کند، یک مثلث قائم الزاویه در ناحیه‌ی اول محورهای مختصات تشکیل می‌شود. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که مساحت هر مثلث قائم الزاویه را به عنوان تابعی از x به دست دهد. دامنه‌ی این تابع را معلوم کنید.

۱۹- کدام یک از توابع زیر وارون پذیرند؟

$$f = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2)\} \quad g = \{(1, 2), (3, 4), (5, 2)\}$$

$$h = \{(4, 1), (5, 2), (6, 1)\} \quad k = \{(1, 1), (2, 5), (3, 6)\}$$

نامعادله و تعیین علامت

مسائل بسیاری هست که برای حل آن‌ها باید علامت عبارت‌های جبری را مشخص کنیم. به بیان دیگر نیاز است تا بدانیم آن عبارت به ازای چه مقادیری مثبت یا منفی است. به طور اختصار این موضوع «تعیین علامت» نامیده می‌شود.

به عنوان مثال و همان‌گونه که در بخش‌های قبل دیده‌اید برای تعیین دامنه‌ی تابعی مثل $f(x) = \sqrt{x-1}$ نیاز است تا $x-1$ تعیین علامت شود. همچنین در تمرین‌های گذشته آمده بود که سود حاصل از تولید یک کالا در یک شرکت از رابطه‌ی $y = 6x - 300$ به دست می‌آید، که x تعداد کالای تولیدی و y سود حاصل از فروش برحسب تومان است. جدول زیر مقادیر y را به ازای چند مقدار مختلف از x نشان می‌دهد.

x	۱	۵	۵۰	۱۰۰	۱۰۰۰
$y = 6x - 300$	-۲۹۴	-۲۷۰	۰	۳۰۰	۵۷۰۰

همان‌طور که دیده می‌شود با تولید ۵۰ عدد کالا سود ما صفر خواهد بود و اگر کمتر از این تعداد کالا تولید شود ضرر خواهد بود یا به عبارتی سود منفی خواهد شد. در نتیجه تعیین علامت $y = 6x - 300$ مشخص می‌کند سود و ضرر به ازای چه تعداد کالا خواهد بود.

در این بخش قصد داریم به تعیین علامت عبارت‌هایی به شکل $y = ax + b$ که در آن a و b اعداد حقیقی و معلومی هستند بپردازیم. هر عبارت جبری به شکل $ax + b$ که a و b دو عدد بوده و $a \neq 0$ یک «چند جمله‌ای درجه‌ی اول» برحسب x نامیده می‌شود.



عبارت $y = 4x + 8$ را در نظر بگیرید.
الف) جدول زیر را تکمیل کنید:

x	-5	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
$y = 4x + 8$			o			10	
علامت y			o			+	

ب) نامعادله $4x + 8 \geq 0$ را حل کنید.

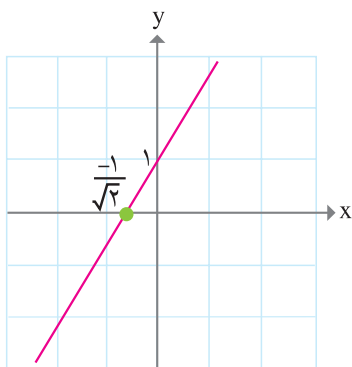
ج) نمودار تابع $f(x) = 4x + 8$ را رسم کرده و با استفاده از آن مقادیری از x که $f(x) = 0$ ، $f(x) > 0$ و $f(x) < 0$ را روی شکل مشخص کنید.

د) قسمت‌های ب و ج را برای $y = -2x + 6$ انجام دهید. مشخص کنید علامت ضریب x در دو عبارت مذکور چه تغییری در جواب ایجاد می‌کند؟ اکنون به مثال زیر توجه کنید:

می‌خواهیم علامت عبارت $y = \sqrt{2}x + 1$ را به ازای مقادیر مختلف از x مشخص کنیم. روشن است که به ازای $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، داریم: $y = 0$.

اگر $x > \frac{-1}{\sqrt{2}}$ آنگاه $\sqrt{2}x > -1$ و در نهایت داریم $\sqrt{2}x + 1 > 0$. پس عبارت فوق به ازای $x > \frac{-1}{\sqrt{2}}$ مثبت است. به سادگی دیده می‌شود که اگر $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ آنگاه $y < 0$. جمع‌بندی این مطالب در جدول زیر دیده می‌شود.

x	$x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$x > \frac{-1}{\sqrt{2}}$
علامت y	-	o	+



همچنین نمودار $y = \sqrt{2}x + 1$ به صورت زیر است :
 و می توان نتایج جدول فوق را از روی آن به دست آورد.
 روشن است که به ازای $x > \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، y به دست آمده
 بالای محور x ها، یعنی مثبت است و به ازای $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ،
 $y = \sqrt{2}x + 1$ پایین محور x ها قرار دارد، یعنی منفی است
 و به ازای $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ برابر صفر است.

با توجه به فعالیت و مثال بالا در مورد تعیین علامت
 $y = ax + b$ در حالتی که $a > 0$ می توان گفت :

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
علامت $y = ax + b$	-	o	+



۱- عبارت $y = 3x + 4$ به صورت زیر تعیین علامت می شود.

x	$x < -\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$x > -\frac{4}{3}$
$y = 3x + 4$	-	o	+

۲- دامنه ی تابع $f(x) = \sqrt{2x-1}$ را مشخص کنید.
 جدول تعیین علامت $2x-1$ به شکل زیر است :

x	$\frac{1}{2}$
علامت $2x-1$	o
	-
	+

بنابراین دامنه ی تابع عبارت است از $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.



۱- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{100 - 5x}$ را مشخص کنید.

۲- جدول تعیین علامت $y = ax + b$ را در حالتی که $a < 0$ رسم کنید.

۳- با مراجعه به ابتدای بحث مشخص کنید برای این که سود شرکت حداقل 10^6 میلیون تومان باشد، چه نامعادله‌ای باید حل شود؟ حداقل چه تعداد کالا باید تولید شود؟

همان طور که می‌دانیم حاصل ضرب دو عدد مثبت یا دو عدد منفی همواره مثبت است. همچنین اگر دو عدد علامت‌های مختلفی داشته باشند، حاصل ضرب آن‌ها همواره منفی است. با توجه به این مطلب می‌توان مثال زیر را حل نمود.



علامت عبارت $y = (x-1)(x-2)$ را به ازای مقادیر مختلف x بیابید. جدول تعیین علامت برای $x-1$ و $x-2$ به صورت زیر است.

x	۱
$x-1$	- +

x	۲
$x-2$	- +

می‌توان اطلاعات مربوط به این دو جدول را در یک جدول به شکل زیر نمایش داد.

x	۱	۲
$x-1$	- +	+
$x-2$	-	- +

در نتیجه برای تعیین علامت $(x-1)(x-2)$ باید مشخص کنیم x در چه محدوده‌ای قرار دارد. سه محدوده در جدول فوق وجود دارد: $x \geq 2$ ، $1 < x < 2$ و $x \leq 1$.

بنابراین تعیین علامت عبارت $(x-1)(x-2)$ به صورت زیر است (؟)

x	۱	۲
$(x-1)(x-2)$	+ -	+ -

در نتیجه مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(x-1)(x-2) \geq 0$ عبارت است از $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.
 برای سهولت در نوشتن، تمام جدول‌های صفحه‌ی قبل را می‌توان در یک جدول به صورت زیر نشان داد.

x	۱	۲
x-1	-	+
x-2	-	+
$(x-1)(x-2)$	+	+

۱- عبارت $(2x-1)(x-4)$ را تعیین علامت کنید.

۲- نامعادله‌ی $x^2 - 7x + 10 \geq 0$ را با استفاده از تجزیه حل کنید.

۳- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x^2 \geq 25$ چیست؟

۴- تابع $g(x) = \sqrt{-(x-1)(x-3)}$ به ازای چه مقادیری از x قابل قبول است؟

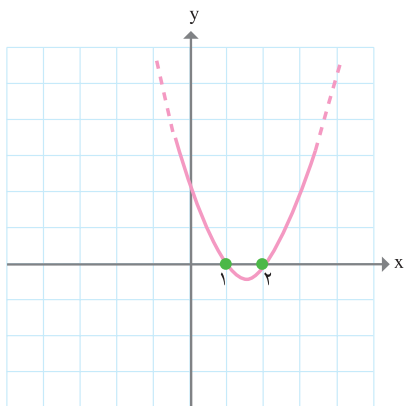
علی به عنوان یکی از اعضای تیم والیبال مدرسه‌اش وارد زمین شده است و آماده‌ی شنیدن صدای سوت آغاز بازی از سوی داور است. او به محض شنیدن صدای سوت ضربه‌ای به توپ می‌زند، فرض کنید $h(t) = -(t-1)^2 + 3$ نشانگر ارتفاع توپ در زمان t برحسب متر باشد. (مبدأ زمان با سوت داور و زمان نیز برحسب ثانیه است).
 الف) جدول زیر را کامل کنید.

t	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲
h(t)						

h(0) نشانگر چه کمیتی می‌تواند باشد؟

ب) نمودار h(t) را رسم کنید. چهار زمان مختلف بیابید که در آن‌ها توپ در فاصله‌ی حداقل $\frac{2}{5}$ متری از زمین باشد.

ج) پس از چه زمانی توپ به زمین برخورد خواهد کرد؟ روی نمودار آن را مشخص کنید.
 د) با توجه به نمودار $h(t)$ مشخص کنید آیا توپ به ارتفاع بیش از ۳ متر می‌رسد؟
 ه) تمام زمان‌هایی که توپ در ارتفاع بیشتر از یا مساوی $2/5$ متر از زمین است را با یک نامعادله نشان داده و آن‌ها را بیابید. با توجه به نمودار نیز به این سؤال پاسخ دهید.
 همان‌گونه که در فعالیت فوق دیده می‌شود موارد زیادی پیش می‌آید که برای تعیین علامت یک عبارت و یا حل یک نامعادله در نظر گرفتن نمودار آن مفید می‌باشد.



در قسمت‌های قبل تابع $f(x) = (x-1)(x-2)$ تعیین علامت شد، نمودار تابع به شکل مقابل است. همان‌طور که می‌دانید تعیین علامت به این معناست که عبارت به ازای چه مقادیری منفی یا مثبت است. در شکل مقابل مشهود است که بازه‌ی (۱ و ۲) نمودار زیر محور x ‌ها قرار دارد، یعنی مقدار تابع منفی است. در دو نقطه‌ی ۱ و ۲ (ریشه‌ها) برابر صفر بوده و خارج از بازه‌ی [۱, ۲] نمودار بالای محور x ‌ها می‌باشد یعنی عبارت $(x-1)(x-2)$ مثبت است.

۱- با رسم نمودار $y = x^2 - 2$ جواب نامعادله‌ی $x^2 - 2 \geq 0$ را به دست آورید.
 ۲- نامعادله‌ی $x^2 + 1 > 0$ به ازای چه مقادیری از x برقرار است؟ با رسم نمودار $y = x^2 + 1$ وضعیت آن را نسبت به محور x ‌ها بررسی کرده و به سؤال قبل جواب دهید.
 ۳- اگر $f(x) = (x-1)(x-2)$ ، با توجه به نمودار آن تمام مقادیر x که $f(x) \geq 2$ را روی شکل مشخص کنید.

۴- با توجه به نمودارهای درجه‌ی دومی که تا به حال در کتاب دیده‌اید آیا می‌توانید با رسم شکل حالتی که نمودار محور x ‌ها را قطع نمی‌کند مشخص کنید؟

تعیین علامت چند جمله‌ای درجه‌ی دوم

در مطالب گذشته با تعیین علامت عبارت‌هایی نظیر $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ ، $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ و $x^2 - 7x + 10$ آشنا شدیم. در این بخش قصد داریم روش کلی برای تعیین علامت یک عبارت به شکل $y = ax^2 + bx + c$ که در آن a و b و c اعداد معلومی هستند ارائه کنیم.

سه عبارت بالا و به طور کلی هر عبارت به شکل $ax^2 + bx + c$ که $a \neq 0$ و a و b و c اعداد معلومی هستند را یک «چند جمله‌ای درجه‌ی دوم» بر حسب x می‌نامیم.



چند جمله‌ای درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید.

الف) اگر $ax^2 + bx + c = 0$ ، به روش Δ ریشه‌های آن را مشخص کنید. (فرض کنید $\Delta \geq 0$).

ب) اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم مذکور باشند، نشان دهید:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

ج) با استفاده از (ب) جاهای خالی زیر را پر کنید.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (\dots\dots)x + (\dots\dots)\right] = a(\dots\dots)(\dots\dots)$$

پس از حل فعالیت فوق در می‌یابید که اگر یک عبارت درجه‌ی دوم دو ریشه داشته باشد آنگاه به صورت حاصل ضرب دو عبارت درجه‌ی اول با یک ضریب (همان a) تجزیه می‌شود. چون روش تعیین علامت عبارت‌های درجه‌ی اول و حاصل ضرب آن‌ها را می‌دانیم به راحتی می‌توان آن عبارت درجه‌ی دوم را تعیین علامت کرد. به مثال زیر توجه کنید.



عبارت $y = 2x^2 - 3x + 1$ را تعیین علامت کنید.

با روش Δ به سادگی به دست می‌آید که 1 و $\frac{1}{2}$ ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x + 1 = 0$ هستند.

بنابراین مطابق فعالیت بالا داریم $2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$. جدول تعیین علامت به قرار

صفحه‌ی بعد است:

x	$\frac{1}{2}$	1
$2x - 1$	-	+
$x - 1$	-	+
$2(x - 1)(x - \frac{1}{2})$	+	-

اگر ضریب 2 در مثال فوق عددی منفی، مثلاً -2 بود چه تغییری در جدول تعیین علامت رخ می‌داد؟

اگر $a > 0$ و عبارت درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ دو ریشه مانند x_1 و x_2 داشته باشد

طبق فعالیت داریم: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ، در این صورت جدول تعیین علامت y به صورت زیر است.

x	x_1	x_2
$ax^2 + bx + c$	+	-

۱- توابع زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $f(x) = 6x^2 - 8x + 2$

ب) $g(x) = -3x^2 + 9x - 2$

۲- اگر $y = ax^2 + bx + c$ و معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه مانند x_1 و x_2 داشته باشد و $a < 0$ جدول تعیین علامت آن را بکشید. تفاوت آن با حالتی که $a > 0$ چیست؟

۳- اگر $x_1 = x_2$ در هر دو حالت $a > 0$ و $a < 0$ جدول تعیین علامت $ax^2 + bx + c$ را مشخص کنید.

۴- با رسم نمودار $y = (x + 1)^2$ و $y = -(x + 1)^2$ این دو عبارت را تعیین علامت کنید. شباهت این سؤال با سؤال قبل چیست؟

تا کنون با مطالعه‌ی قسمت‌های قبل با روش تعیین علامت عبارات‌های درجه‌ی دومی که ریشه‌ی حقیقی دارند آشنا شده‌اید. در این بخش قصد داریم تا عبارات‌های درجه‌ی دومی را بررسی کنیم که ریشه‌ی حقیقی ندارند.

حتماً از سال گذشته به یاد دارید که در این حالت $\Delta < 0$. به عبارت دیگر اگر معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه نداشته باشد آنگاه $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. در نتیجه $4ac - b^2 > 0$. از طرفی

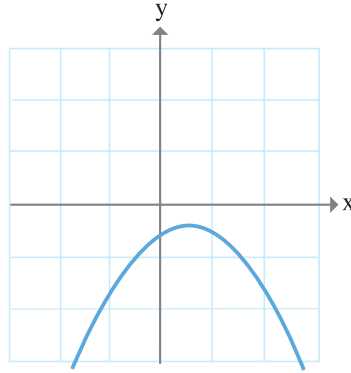
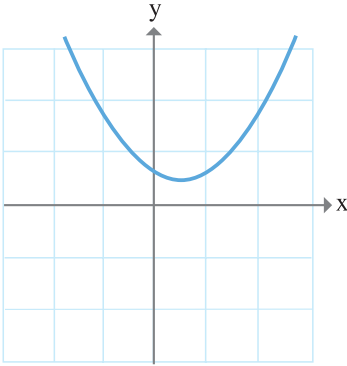
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = \\ a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

از دو عبارت داخل کروشه یکی مثبت و یکی نامنفی است. بنابراین عبارت داخل کروشه همواره مثبت است. (به ازای هر x) در نتیجه علامت $ax^2 + bx + c$ ، بسته به این که a چه علامتی دارد همواره یک نوع است. جدول تعیین علامت به شکل زیر است.

	x	دلخواه
$a > 0$	$ax^2 + bx + c$	+
$a < 0$	$ax^2 + bx + c$	-

البته این موضوع از منظر دیگری نیز قابل بررسی است. همان‌گونه که می‌دانیم پس از رسم نمودار $y = ax^2 + bx + c$ محل برخورد آن با محور x ها نشانگر ریشه‌های آن می‌باشد، زیرا در این مکان‌ها $y = 0$. بنابراین اگر عبارت مذکور ریشه نداشته باشد به این معنی است که هیچ‌گاه $y = 0$ اتفاق نمی‌افتد یعنی هیچ نقطه‌ای از نمودار روی محور x ها نیست. با توجه به نمودارهای درجه‌ی دوم مختلفی که تاکنون دیده‌ایم در این حالت یا نمودار به تمامی بالای محور x ها قرار دارد یا به تمامی پایین محور x ها قرار دارد.

در این صورت شکل کلی به دو صورت زیر است :

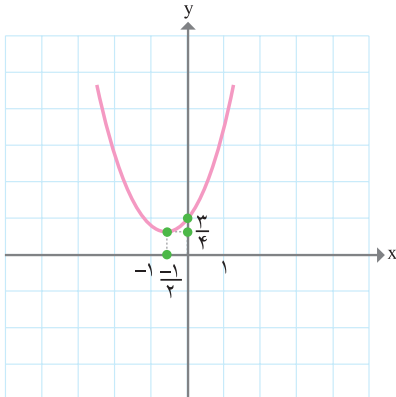


چرا اگر قسمتی از نمودار عبارت درجه‌ی دوم بالای محور x ها و قسمتی پایین باشد آنگاه آن عبارت حتماً ریشه دارد؟

تمام جواب‌های نامعادله‌ی $x^2 + x + 1 \geq 0$ را بیابید.
داریم :

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

چون همواره $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ پس $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4} > 0$ ، در نتیجه به ازای هر x نامساوی



$x^2 + x + 1 \geq 0$ درست است، یعنی جواب نامعادله

عبارت است از مجموعه‌ی \mathbb{R} .

درضمن نمودار $y = x^2 + x + 1$ به صورت مقابل

است.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود نمودار مقابل به ازای

هر x بالای محور x ها قرار دارد، یعنی مثبت است.

عبارت $y = x^2 - x + 5$ را تعیین علامت کنید.
 می‌دانیم $\Delta = 1^2 - 4 \times 5 = -19 < 0$ ، بنابراین $\Delta < 0$ و همچنین ضریب x^2 برابر یک است که مثبت می‌باشد. بنابراین طبق مطالب قبل همواره $x^2 - x + 5 > 0$. یعنی مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x^2 - x + 5 > 0$ عبارت است از \mathbb{R} .

جمع‌بندی تمام مطالب مربوط به تعیین علامت چند جمله‌ای درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است:

حالت اول: $\Delta > 0$ ، در این حالت دو ریشه‌ی متمایز مانند x_1 و x_2 داریم ($x_1 < x_2$)

x	x_1	x_2
$y = ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	مخالف علامت a

حالت دوم: $\Delta = 0$ ، در این حالت یک ریشه داریم:

x	$x_1 = x_2$
$y = ax^2 + bx + c$	موافق علامت a

حالت سوم: $\Delta < 0$

x	دلخواه
$y = ax^2 + bx + c$	موافق علامت a

۱- نشان دهید اگر $x \in \mathbb{R}$ آنگاه $2x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

۲- اگر $a > 0$ ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

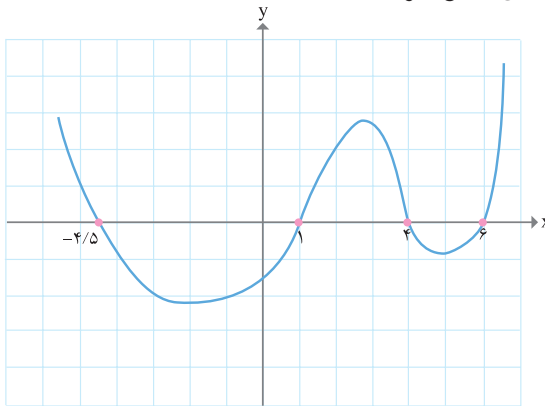
(یعنی حاصل جمع هر عدد مثبت با معکوس خودش حداقل دو است.)

۳- اگر $b > 0$ و a با استفاده از تمرین قبل نشان دهید: $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$
 ۴- دامنه‌ی هریک از توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \sqrt{-2x^2 - 3x + 1}$ ب) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

ج) $h(x) = \sqrt{x(x-3)^2}$ د) $i(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

۵- نمودار تابع f مطابق شکل زیر است.



به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟ $\sqrt{f(x)}$

۶- تمامی اعدادی که اگر جای a قرار گیرند عبارت $y = ax^2 + 3x + 1$ همواره مثبت می‌شود را بیابید.

۷- به ازای هریک از مقادیر a معادله‌ی $x^2 + 2x + a = 0$ یا ریشه‌ی حقیقی ندارد یا دو ریشه‌ی متمایز یا دو ریشه‌ی یکسان دارد. در هریک از این سه حالت تمام مقادیر ممکن برای a را بیابید.

۸- مهدی و امید در حال تمرین برای مسابقه‌ی فوتبال هستند. آن‌ها قرار است تمرین شوت زدن انجام دهند. با شنیدن صدای سوت مربی هرکدام به تویی که جلوی پایشان است ضربه‌ای می‌زنند. اگر $h(t) = -t^2 + 1$ نشانگر ارتفاع توپ مهدی در زمان t و $g(t) = -3t^2 + 18t$ نشانگر ارتفاع توپ امید در زمان t باشد طی چند ثانیه توپ امید در ارتفاع بالاتر از ارتفاع توپ مهدی قرار دارد؟ (ت بر حسب ثانیه و $h(t)$ و $g(t)$ بر حسب متر هستند.)