۳ــ۲ــ۱ــ نامعادله: هر نامساوی را که شامل یک یا چند متغیر باشد نامعادله می‌نامند. برای حل نامعادلات، یعنی برای پیدا کردن اعدادی که با جایگزین کردن آن‌ها به جای متغیرها نامعادله تبدیل به نامساوی درست گردد.

شکل ۲۰ــ۱

مثال ۱: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کنید:

$$\frac{x^{۲}-۱}{x+۳}<۰$$

حل: ابتدا هریک از عبارات جبری $x^{۲}-۱$ و $x+۳$ را تعیین علامت می‌کنیم، سپس برای هریک از بازه‌های $x<-۳$ و $-۳<x<-۱$ و $-۱<x<۱$ و $x>۱$ علامت‌های $x^{۲}-۱$ و $x+۳$ را درهم ضرب می‌کنیم.

$$x^{۲}-۱=۰ \Rightarrow x^{۲}=۱ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۱} \Rightarrow x=\pm ۱$$
$$x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳$$

جدول ۳۱ــ۱

x		-۳		-۱		۱	
$x^{۲}-۱$	+		+	۰	−	۰	+
$x+۳$	−	۰	+		+		+
$\frac{x^{۲}-۱}{x+۳}$	−	تعریف نشده	+	۰	−	۰	+

بنابراین مجموعه جواب برابر است با:

$$\{x|x\in\mathbb{R} \text{ و } x<-۳ \text{ یا } -۱<x<۱\}$$

مثال ۲: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{x^{۲}-۲x+۲}{x}<۱$$

حل: همه‌ی جملات را به طرف چپ می‌آوریم:

$$\frac{x^{۲}-۲x+۲}{x}-۱<۰$$

ــ مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^{۲}-۲x+۲-x}{x}<۰ \Rightarrow \frac{x^{۲}-۳x+۲}{x}<۰$$

ــ با مساوی صفر قرار دادن صورت و مخرج کسر ریشه‌های آن‌ها را می‌یابیم :

$$x^{۲} - ۳x + ۲ = (x - ۱)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \end{cases} \text{ و } x = ۰$$

پس از رسم جدول، صورت و مخرج کسررا تعیین علامت کرده و با ضرب کردن علامت $x^{۲} - ۳x + ۲$ و x در هریک از بازه‌های $x < ۰$ و $۰ < x < ۱$، $۱ < x < ۲$ و $x > ۲$ علامت کل نامعادله را تعیین می‌کنیم و در آخر با توجه به علامت نامعادله، مقادیر منفی را به عنوان جواب می‌پذیریم.

جدول ۳۲ــ۱

x		۰		۱		۲	
$x^{۲} - ۳x + ۲$	+		+	۰	−	۰	+
x	−	۰	+		+		+
$\frac{x^{۲} - ۳x + ۲}{x}$	−	تعریف نشده	+	۰	−	۰	+

$\{x \mid x \in \mathbb{R} \ , \ x < ۰ \text{ یا } ۱ < x < ۲\}$: جواب

مثال ۳: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{x + ۵}{x - ۳} > \frac{x - ۳}{x + ۵}$$

حل: همه‌ی جملات را به طرف چپ معادله می‌آوریم ؛

$$\frac{x + ۵}{x - ۳} - \frac{x - ۳}{x + ۵} > ۰$$

ــ مخرج مشترک می‌گیریم ؛

$$\Rightarrow \frac{(x + ۵)^{۲} - (x - ۳)^{۲}}{(x - ۳)(x + ۵)} > ۰$$

ــ صورت کسر را به کمک اتحاد مزدوج و یا مربع دو جمله‌ای ساده می‌کنیم ؛

$$\frac{(x + ۵ + x - ۳)(x + ۵ - (x - ۳))}{(x - ۳)(x + ۵)} > ۰$$

$$\Rightarrow \frac{(۲x + ۲)(۸)}{(x - ۳)(x + ۵)} > ۰$$

ــ با مساوی صفر قراردادن صورت و مخرج، ریشه‌های عبارت را می‌یابیم ؛

$$۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱$$

$$(x - ۳)(x + ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ \text{یا} \\ x + ۵ = ۰ \Rightarrow x = -۵ \end{cases}$$

پس از رسم جدول صورت و مخرج کسر را تعیین علامت کرده و با ضرب‌کردن علامت صورت و مخرج در هر یک از بـازه‌هـای $x < -۵$ ، $-۵ < x < -۱$ ، $-۱ < x < ۳$ و $x > ۳$

جدول ۳۳ــ۱

x		−۵		−۱		۳	
$۸(۲x + ۲)$	−		−	۰	+		+
$x - ۳$	−		−		−	۰	+
$x + ۵$	−	۰	+		+		+
$\frac{۸(۲x + ۲)}{(x - ۳)(x + ۵)}$	−	نامعین	+	۰	−	نامعین	+

علامت عبارت را در هر یک از این بازه‌ها مشخص می‌نمایم و در ستون آخر با توجه به علامت نامعادله ریشه‌هایی که در فواصل علائم مثبت قرار دارد به عنوان جواب می‌پذیریم.

جواب : $\{x | x \in \mathbb{R}$ و $-۵ < x < -۱$ یا $x > ۳\}$

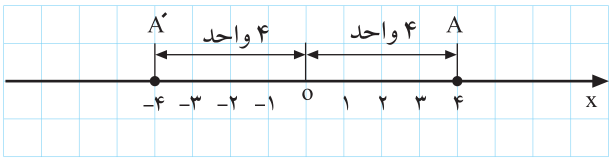
تمرین

نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۵x^{۲} + x < +۶$$

۴ــ۲ــ۱ــ قدرمطلق: بر روی شکل ۲۱ــ۱ دو نقطه‌ی A و ´A را به مختصات ۴ و ۴− مشاهده می‌کنید.

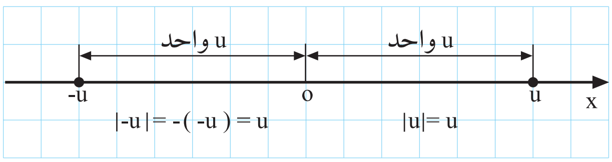
ــ فاصله‌ی این دو نقطه از مبدأ (نقطه‌ی O) قدرمطلق این اعداد نامیده می‌شود که برابر با عدد ۴ است.



شکل ۲۱ــ۱

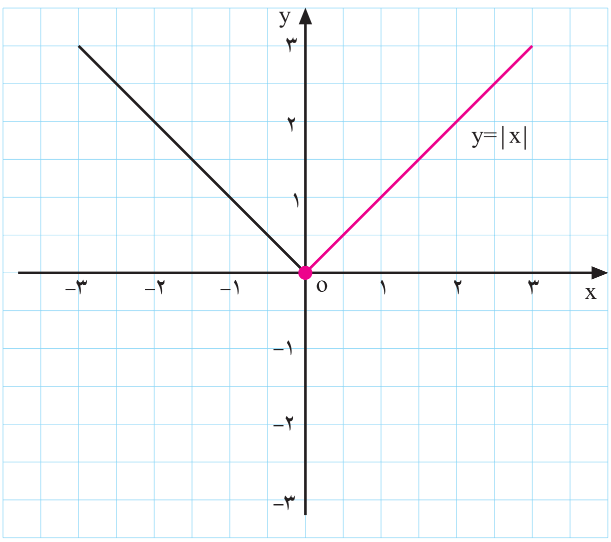
$|-۴| = ۴$ و $|-۴| = -(-۴) = ۴$

ــ این مطلب را به زبان ریاضی می‌توان به صورت شکل ۲۲ــ۱ نوشت.



شکل ۲۲ــ۱

به طور کلی برای نمایش فاصله‌ی یک نقطه از صفر که در آن جهت مهم نمی‌باشد از قدرمطلق استفاده می‌کنیم. قدرمطلق عدد x را که با علامت $|x|$ نمایش می‌دهند به صورت زیر تعریف می‌کنیم :



شکل ۲۳ــ۱

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

مثال ۱: قدرمطلق عبارت روبه‌رو را بیابید.

$$|\sqrt{۲} - ۱|$$

حل: $\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر از یک است، پس می‌نویسیم :

$$\sqrt{۲} > ۱$$

ــ $\sqrt{۲} - ۱$ عددی مثبت است، یعنی :

$$\sqrt{۲} - ۱ > ۰$$

ــ بنابراین قدرمطلق آن $(\sqrt{۲} - ۱)$ خودش می‌باشد.

$$\underbrace{|\sqrt{۲} - ۱|}_{x>۰} = \underbrace{\sqrt{۲} - ۱}_{x}$$

مثال ۲: قدرمطلق عبارت روبه‌رو را بیابید.

$$|\sqrt{۵} - ۳|$$

حل: عدد $\sqrt{۵}$ از عدد ۳ کوچک‌تر است، یعنی :

$$\sqrt{۵} < ۳$$

ــ حاصل عبارت $\sqrt{۵} - ۳$ منفی است، پس داریم :

$$\sqrt{۵} - ۳ < ۰$$

$\sqrt{۵} - ۳$ عدد منفی است بنابراین برای یافتن قدرمطلق آن باید در عدد منفی یک ضرب شود.

$$\underbrace{|\sqrt{۵} - ۳|}_{x<۰} = -(\underbrace{\sqrt{۵} - ۳}_{x}) = ۳ - \sqrt{۵}$$

مثال ۳: اگر $x > ۳$ باشد قدرمطلق عبارت روبه‌رو را به دست آورید.

$$|x - ۳|$$

حل: چون $x > ۳$ می‌باشد، پس :

$$x - ۳ > ۰$$

بنابراین قدرمطلق آن برابر خودش می‌باشد :

$$|x - ۳| = x - ۳$$

مثال ۴: اگر $x < -۱$ باشد قدرمطلق عبارت مقابل را به دست آورید.

$$|x + ۱| \ , \ \ x < -۱$$

حل: چون $x < -۱$ است، داریم :

$$x + ۱ < ۰$$

ــ برای محاسبه‌ی قدرمطلق عبارت داخل آن قرینه می‌گردد :

$$|x+1|=-(x+1)=-x-1$$
$$\Rightarrow |x+1|=-x-1\ ,\ \ x<-1$$

مثال ۵: اگر $x<2$ باشد حاصل عبارت مقابل را بیابید :

$$|2-x|-|x-3|$$

حل: چون $x<2$ بنابراین $2-x>0$، که پس از بیرون آمدن از قدرمطلق تغییر نمی‌کند.

$$|2-x|=2-x$$

ــ عبارت $x-3$ منفی است، پس از بیرون آمدن از قدرمطلق در منفی ضرب می‌شود.

$$|x-3|=-(x-3)=-x+3$$

ــ حاصل عبارت برابر است با :

$$|2-x|-|x-3|=2-x+x-3=-1$$

بعضی خواص قدرمطلق اعداد حقیقی

خاصیت اول قدر مطلق:

$$\sqrt{\mathbf{x}^2}=|\mathbf{x}|$$
$$\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5\ ,\ \ \sqrt{3^2}=|3|=3$$

مثال ۶: حاصل عبارت‌های روبه‌رو را بیابید.

$$\sqrt{x^2+2x+1}+|x-1|\ ,\ \ -1<x<1$$

حل: چون $-1<x<1$، $x+1$ مثبت و $x-1$ منفی است.

$$\sqrt{(x+1)^2}+|x-1|=|x+1|+|x-1|$$

آنگاه داریم :

$$=x+1-(x-1)=x+1-x+1=2$$

نکته‌ی ۱: همواره برای هر عدد حقیقی x داریم :

$$|x|^2=x^2$$

مثال ۷: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$|x-2|<3$$

حل: با استفاده از نکته‌ی ۱ می‌توان نوشت :

$$(|x-2|)^2=(x-2)^2$$

ــ دو طرف نامعادله را به توان **۲** می‌رسانیم.

$$\left(|x-2|\right)^2 < 3^2 \Rightarrow (x-2)^2 < 3^2$$

ــ همه‌ی جملات نامعادله را به یک طرف انتقال می‌دهیم :

$$\Rightarrow (x-2)^2 - 3^2 < 0$$

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم :

$$\Rightarrow (x-2-3)(x-2+3) < 0$$

ــ نامعادله به دو عامل ضرب تبدیل می‌شود.

$$\Rightarrow (x-5)(x+1) < 0$$

ــ هر یک از عامل‌های نامعادله را برابر صفر قرار می‌دهیم :

ــ ریشه را به دست می‌آوریم :

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

ــ ریشه‌ها را به ترتیب نزولی به صعودی در جدول **۳۴ــ۱** می‌نویسیم.

ــ عوامل مربوط به دو ریشه را تعیین علامت می‌کنیم.

ــ علامت کلی نامعادله را از ضرب علامت‌های هر یک از ستون عمودی به‌دست می‌آوریم.

جدول ۳۴ــ۱

x	$x<-1$	-1	$-1<x<5$	5	$x>5$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-5)(x+1)$	$+$	0	$-$ (جواب)	0	$+$

ــ با توجه به شرط نامعادله، مجموعه جواب برابر با :

$$\{x \mid x\in \mathbb{R} \text{ و } -1<x<5\} = (-1,5)$$

مثال ۸: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید :

$$|2x-1| > |x+2|$$

حل: دو طرف نامعادله را به توان دو می‌رسانیم :

$$(2x-1)^2 > (x+2)^2$$

ــ همه‌ی عبارات را به یک طرف انتقال می‌دهیم :

$$\Rightarrow (2x-1)^2 - (x+2)^2 > 0$$

ــ با استفاده از اتحاد مزدوج داریم :

$$\Rightarrow (2x-1-(x+2))(2x-1+x+2) > 0$$

ــ نامعادله را به حاصل ضرب دو عامل تبدیل می‌کنیم :

$$\Rightarrow (x-3)(3x+1) > 0$$

ـ ریشه‌های هر یک از عامل‌های نامعادله را به دست می‌آوریم.

$$x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$$

$$۳x+۱=۰ \Rightarrow ۳x=-۱ \Rightarrow x=\frac{-۱}{۳}$$

ـ ریشه را به ترتیب صعودی در جدول ۳۵ـ۱ می‌نویسیم :

ـ تک تک عوامل را تعیین علامت می‌کنیم.

ـ علامت کلی نامعادله را از ضرب علامت‌های هر یک از ستون‌های عمودی به دست می‌آوریم :

ـ با توجه به جهت علامت نامعادله مجموعه جواب برابر است با :

جدول ۳۵ـ۱

x		$-\frac{۱}{۳}$		۳	
$x-۳$	−		−	۰	+
$۳x+۱$	−	۰	+		+
$(x-۳)(۳x+۱)$	+ جواب	۰	−	۰	+ جواب

$$\text{م.ج}=\left\{x \middle| x\in \mathbb{R}, x<\frac{-۱}{۳} \ \text{یا}\ x>۳\right\}$$

خاصیّت دوم قدرمطلق

$$۲)\ |x|=|-x| \quad \text{یا} \quad |a-b|=|b-a|$$

مثال ۹: معادله‌ی مقابل را حل کنید :

$$|x+۳|=۴$$

حل: فاصله‌ی $x+۳$ از صفر برابر ۴ واحد می‌باشد، بنابراین $x+۳$ می‌تواند ۴ یا ۴− باشد.

$$|x+۳|=۴ \Rightarrow x+۳=\pm۴ \Rightarrow$$

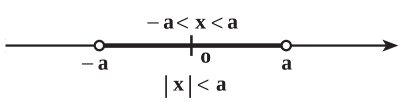
$$\begin{cases} x+۳=۴ \Rightarrow x=۴-۳ \Rightarrow x=۱ \\ \text{یا} \\ x+۳=-۴ \Rightarrow x=-۴-۳ \Rightarrow x=-۷ \end{cases}$$

ـ مجموعه‌ی جواب‌ها برابر است با :

$$\{-۷,۱\}$$

خاصیت سوم قدرمطلق:

$$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a \quad (\text{a عدد حقیقی و مثبت})$$



شکل ۲۴ـ۱

مثال ۱۰: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$|x-۲|<۱$

حل: فاصله $x-۲$ از صفر، کوچک‌تر از ۱ می‌باشد.

$|x-۲|<۱$

ــ $x-۲$ کوچک‌تر از ۱ و بزرگ‌تر از ۱ــ می‌باشد (طبق خاصیت سوم قدرمطلق)

$-۱<x-۲<۱$

ــ به همه طرف‌های نامعادله عدد ۲ را اضافه می‌کنیم :

$\Rightarrow -۱+۲<x-۲+۲<۱+۲$

ــ پس جواب نامعادله برابر است، با :

$\Rightarrow ۱<x<۳$

نکته‌ی ۲ : $|a-b|$ فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی b و a را روی محور نشان می‌دهد، بدون آن‌که مشخص کند کدام بزرگ‌تر می‌باشد. مثلاً فاصله‌ی دو نقطه‌ی ۱ و ۷ برابر ۶ است.

$|۱-۷|=۶$

ــ فاصله‌ی دو نقطه‌ی ۲ و ۵ برابر با ۳ است.

$|۵-۲|=۳$

مثال ۱۱: نامعادله‌های روبه‌رو را در قالب یک جمله‌ی کوتاه بنویسید.

الف) $|x-۲|<۱$

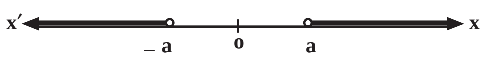
ب) $|x-۱۰|>۵$

جواب الف: مجموعه‌ی همه‌ی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها از ۲ کمتر از ۱ می‌باشد.

جواب ب: همه‌ی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها از ۱۰ از ۵ بیش‌تر است.

خاصیت چهارم قدرمطلق:

(a عدد حقیقی و مثبت) $|x|>a \Leftrightarrow x>a$ یا $x<-a$



شکل ۲۵ـ۱

مثال ۱۲: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$|x-۳|>۲$

حل: در این مثال می‌خواهیم همه‌ی اعدادی را که فاصله‌ی آن‌ها از ۳ بیش‌تر از ۲ است مشخص کنیم ؛ بنابر خاصیت چهارم قدرمطلق :

$\Rightarrow x-۳>۲$ یا $x-۳<-۲$

$\Downarrow$

$x>۵$ یا $x<۱$

ــ بنابر این مجموعه جواب معادله برابر است با :

ج.م $=\{x | x\in\mathbb{R}$ و $x>۵$ یا $x<۱\}$

تمرین

۱ــ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\sqrt{(۴-\sqrt{۵})^{۲}}+|۲-\sqrt{۵}|-|-۳|=?$$

۲ــ نامعادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $|۵x-۷|>۴$

۲) $|۳x-۱|<|x+۲|$

۳) $|۱-۷x|<۳$

۳ــ عبارات زیر را با قدرمطلق نشان دهید.

الف : مجموعه‌ی اعدادی که فاصله‌ی آن‌ها از ۲ − بیش‌تر از ۳ باشد.

جواب: $|x+۲|>۳$

ب : مجموعه‌ی اعدادی که فاصله‌ی آن‌ها از ۱ کمتر از ۷ باشد.

ج : مجموعه‌ی اعدادی که فاصله‌ی آن‌ها از ۱− برابر با ۲ باشد.

۴ــ اگر $۰ \le x < ۱$ باشد حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$|x|+|x-۱|=?$$

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۲)

۱ــ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف)

$$p=\frac{۲x+۱}{۳x-۲}+۴$$

ب)

$$p=۴x^{۲}-۷x+۳$$

۲ــ نامعادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $\frac{۳}{۲x-۵}>۴$

۲) $x^{۲}<+۱۰x-۹$

۳) $۲\leq\frac{۵}{۴}x-۱<۷$

۴) $|۳x-۱|\geq ۴$

۵) $|-۵x+۱|<۲$