بخش اول

فصل سوم

تابع

هدف کلی

تعمیق مفهوم تابع و ویژگی‌های مربوط به آن

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ تابع را تعریف کند.

۲ــ تابع را با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهد.

۳ــ تابع را از روی نمودار تشخیص دهد.

۴ــ دامنه‌ی تابع را تعیین کند.

۵ــ برد تابع را از روی نمودار آن تعیین کند.

۶ــ نمودار تابع‌های مثلثاتی $\sin x$ و $\cos x$ را رسم کند.

پیش‌آزمون (۳)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

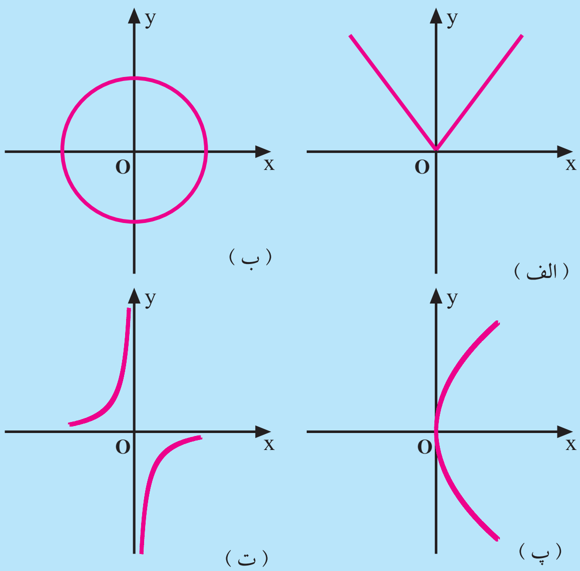
۱ــ کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

الف) $f = \{(۱,۲), (۲,۳), (۱,۳)\}$

ب) $g = \{(۱,۲), (۳,۲), (۵,۲)\}$

پ) $h = \{(-۱,۲), (-۲,۳), (-۳,۴), (۵,۱)\}$

۲ــ کدام یک از شکل‌های روبه‌رو نمایش یک تابع است؟ (شکل ۴۸ــ۱).



شکل۴۸ــ۱

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی زیر در $\mathbb{R}$ تعریف شده است :

$$f(x) = \begin{cases} x^۳, & x \geq ۰ \\ -x^۲, & x < ۰ \end{cases}$$

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) مقدارهای $f(-۲)$، $f(۳)$ و $f(۰)$ را حساب کنید.

۴ــ اگر $f(-۱)=۰$ ، $f(-۲)=-۱$ ، $f(-۳)=-۲$ و $f(۰)=-۱$ ، تابع f را به‌صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

۵ــ تابع f به‌صورت زیر داده شده است.

$$f = \{(-۱,۰), (۲,۳), (۱,-۱), (۳,۲)\}$$

مطلوب است تعیین $f(-۱)$، $f(۲)$ و $f(۳)$.

۶ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^۲ + x + ۱$ داده شده است. مطلوب است محاسبه‌ی :

$$f(۲),\ f(-x),\ f(۳x)$$

$$f(\sqrt{x}),\ f(x-۱)$$

۷ــ تابع $f(x)=۲\sin x$ و نقطه‌ی $m\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۶}\\ a+۲\end{matrix}\right.$ داده شده است. مقدار a را چنان بیابید که این نقطه روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد.

۸ــ تابع $y=a\sin x+b\cos x$ داده شده است. مقدار a و b را طوری تعیین کنید که نمودار این تابع از دو نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۰\\ ۱\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۲}\\ ۲\end{matrix}\right.$ بگذرد.

۹ــ کدام یک از رابطه‌های زیر ضابطه‌ی یک تابع است؟

الف) $۲x+y=۷$

ب) $x+y^{۲}-۲=۰$

پ) $y+۲x^{۲}-x=۱$

۱۰ــ اطلاعات جدول زیر را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید. آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

x	۳	۴	۵	۶	۷
y	۲	۵	−۱	۲	۲

۱۱ــ مقدار هریک از تابع‌های زیر را به‌ازای xهای مشخص شده تعیین کنید (شکل ۴۹ــ۱).

الف) $f(x)=-۲x^{۲}+x+۳,\ \ x=-۱,\frac{۱}{۴},۲$

ب) $g(x)=\frac{۳x}{x-۲},\ x=-۱,\frac{۱}{۲},۳$

پ) $h(x)=\sin(۲x+\frac{\pi}{۶}),\ x=\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۴},\pi.$

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

الف)

x	−۱	$\frac{۱}{۴}$	۲
f(x)			

ب)

x	−۱	$\frac{۱}{۲}$	۳
g(x)			

پ)

x	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	π
h(x)			

شکل ۴۹ــ۱

خواندنی

ظاهراً واژه‌ی تابع[1] را اولین بار لایب نیتز[2]، در سال ۱۶۹۴ به‌عنوان کمیتی وابسته به یک نمودار به‌کار برده است. در سال ۱۷۱۸ یوهان برنولی[3] یک تابع را به‌صورت عبارت‌هایی متشکل از چند ثابت و یک متغیر درنظر گرفت. بعداً در همین قرن اویلر[4] تابع را به‌عنوان معادله‌ای تشکیل یافته از ثابت‌ها و متغیرها بررسی کرد. اویلر به‌طور وسیعی از نماد بسیار پراهمیت f(x) استفاده می‌کرد.

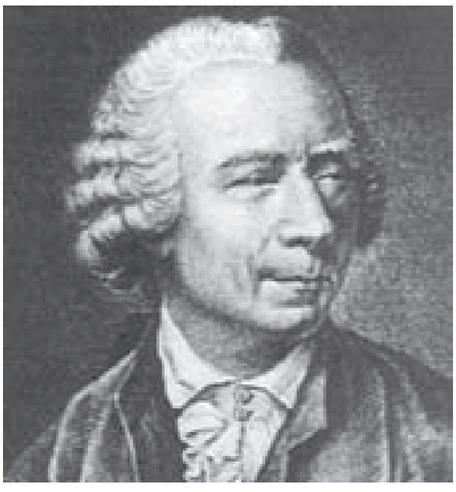
تعریف تابع که تا به امروز مورد استفاده قرار می‌گیرد توسط دیریکله[5] (۱۸۵۹ــ۱۸۰۵) فرمول‌بندی شده است. او می‌گوید: اگر دو متغیر x و y چنان به‌هم مربوط باشند که برای هر مقدار x **فقط یک مقدار** y به‌دست آید آنگاه y تابعی از x نامیده می‌شود. او x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته نامید، مقادیر y به مقادیری که به x نسبت داده می‌شود وابسته است. او مقادیر x را **دامنه‌ی تابع** و مقادیر y متناظر با آن‌ها را **برد تابع** نامید.

پس از بیان مفهوم مجموعه، تابع با مجموعه‌ای از **زوج‌های مرتب**[6] نیز بیان شد.[۲]

گاتفرید لایب نیتز (۱۷۱۶ـ ۱۶۴۶)

یوهان برنولی(۱۷۴۸ـ ۱۶۶۷)

گوستاو دیریکله (۱۸۵۹ـ ۱۸۰۵)



اویلر(۱۷۸۳ـ ۱۷۰۷)

۱) Function

۲) Leibnitz

۳) Johann Bernoulli

۴) Euler

۵) Dirichlet

۶) Ordered pairs

۳ــ۱ــ تابع

یکی از مفاهیم مهم در ریاضیات، مفهوم تابع است. در اکثر امور روزمره با تابع سر و کار داریم. در این بخش ضمن معرفی چند تابع، مشخص نمودن تابع با ضابطه، با جدول و با نمودار، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱ــ۳ــ۱ــ تابع با ضابطه: برای تغییر ولتاژ (اختلاف پتانسیل) از ترانسفورمر استفاده می‌شود.

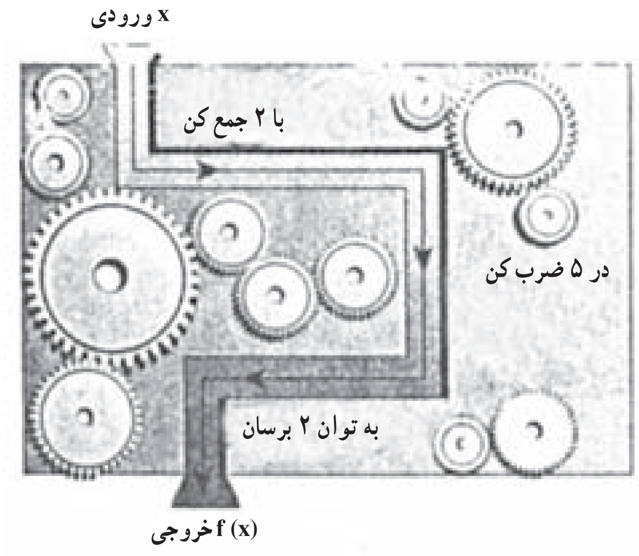
ارتباط بین $V_۱$ و $V_۲$ با رابطه‌ی (۱) بیان می‌شود که در آن a عددی ثابت است. رابطه‌ی (۱) نشان می‌دهد که ولتاژ خروجی **تابع** ولتاژ ورودی است. رابطه‌ی (۱) را **ضابطه‌ی** این تابع می‌گویند. در رابطه‌ی (۱) ثابت a به نوع ترانسفورمر بستگی دارد. با داشتن مقدار ولتاژ ورودی $(V_۱)$ و مقدار ولتاژ خروجی $(V_۲)$ می‌توان a را به‌دست آورد.

مثلاً، اگر $a=۰/۰۵$ و $V_۱$ مساوی ۲۳۰ ولت باشد داریم:

$$V_۲=aV_۱ \Rightarrow V_۲=۰/۰۵\times ۲۳۰=۱۱/۵ \text{ ولت}$$

و اگر $V_۲$ مساوی ۱۰ ولت باشد آنگاه:

$$۱۰=۰/۰۵\times V_۱ \Rightarrow V_۱=\frac{۱۰}{۰/۰۵}=۲۰۰ \quad \text{ولت}$$



شکل ۵۰ــ۱

ولتاژ ورودی $V_۱ \Rightarrow \boxed{\text{ترانسفورمر}} \Rightarrow V_۲$ ولتاژ خروجی

$$V_۲=aV_۱ \qquad (۱)$$

کار در کلاس ۵ــ۱

۱) جدول ۱ــ۱ برای یک ترانسفورمر داده شده است.

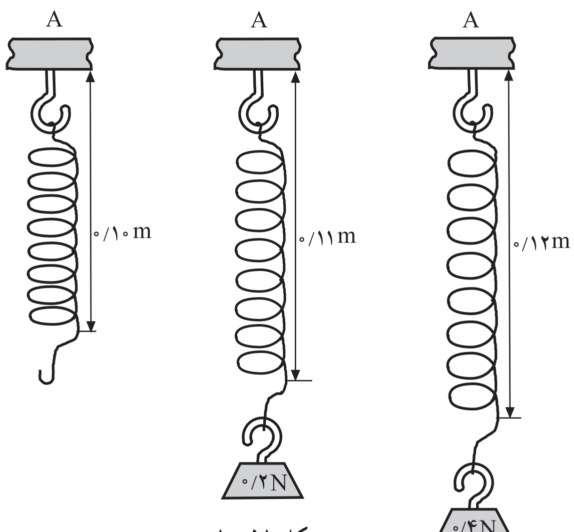
الف) با استفاده از جدول، عدد ثابت a را، از رابطه‌ی (۱)، به‌دست آورید.

ب) با استفاده از قسمت (الف) جدول را کامل کنید.

جدول ۱ــ۱

$V_۱$	۱۹۰	۲۰۰	۲۲۰		۲۴۰
$V_۲$	۱۹			۲۳	۲۴

۲) یک سَرِ فنری به طول ۰/۱۰ متر به نقطه‌ی A بسته شده است (شکل ۵۱ــ۱). با آویختن وزنه‌های متفاوت به انتهای فنر، طول فنر مطابق جدول ۲ــ۱، تغییر کرده است. وزن وزنه را با W و طول فنر را با L نشان می‌دهیم.



شکل ۵۱ــ۱

الف) با توجه به شکل ۵۱ــ۱ یا جدول ۲ــ۱، ملاحظه می‌کنید که L تابع W است. آیا ضابطه‌ی این تابع به‌صورت روبه‌رو است؟ تحقیق کنید.

ب) با توجه به این ضابطه، جدول ۲ــ۱ را کامل کنید.

جدول ۲ــ۱

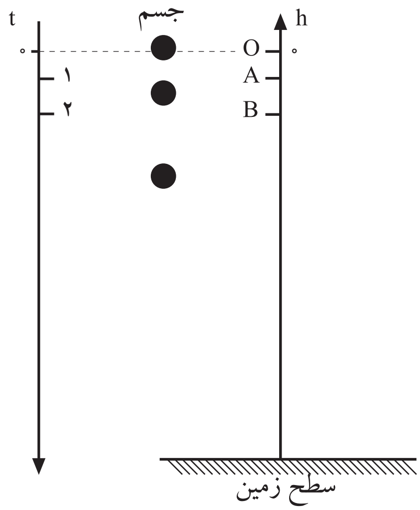
W	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۰/۹	۱
L	۰/۱۰	۰/۱۱	۰/۱۲		۰/۱۴		۰/۱۵

$$L = ۰/۱۰ + ۰/۰۵W$$

۳) گلوله‌ای از ارتفاع ۱۲۵ متری رها می‌شود (سقوط آزاد) (شکل ۵۲ــ۱). می‌دانید اگر فاصله‌ی یک نقطه از سطح زمین را با h و لحظه‌ی رسیدن به آن نقطه را با t نشان دهیم، رابطه‌ی زیر بین h و t برقرار است.

$$h = -\frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

در این رابطه نقطه‌ی آغاز حرکت را مبدأ مختصات گرفته‌ایم $(t = ۰, h = ۰)$ و $g \cong ۱۰\frac{m}{s^{۲}}$ است.



شکل ۵۲ــ۱

جدول ۳ــ۱ مکان جسم را در لحظه‌های متفاوت نشان می‌دهد. شکل ۵۲ــ۱ نیز راهنمای جدول ۳ــ۱ است.

جدول ۳ــ۱

نقطه	t	h
O	۰	۰
A	۱	-۵
B	۲	-۲۰
C	۳	
D	۴	
E	۵	-۱۲۵

الف) جدول و شکل را کامل کنید.

ب) گلوله پس از چند **ثانیه** به سطح زمین برخورد می‌کند؟

پ) در چه لحظه‌ای فاصله‌ی گلوله از نقطه‌ی رها شده ۸۰ متر است؟

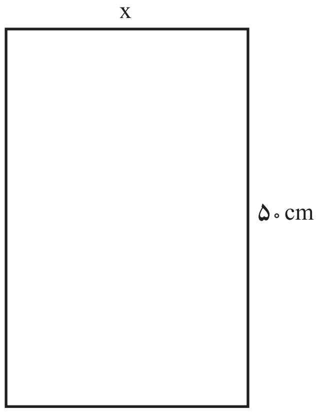
تمرین ۵ ــ ۱

۱) شکل ۵۳ ــ ۱ یک ورق آلومینیوم به شکل مستطیل، به طول ۵۰ سانتی‌متر و عرض x سانتی‌متر را نشان می‌دهد. واضح است که مساحت و محیط این ورق تابعی از متغیر x است.

الف) اگر $S(x)$ مساحت این ورق باشد فرمول $S(x)$ را بنویسید.

ب) اگر $p(x)$ محیط این ورق باشد فرمول $p(x)$ را بنویسید.

پ) با توجه به این که x اندازه‌ی عرض یک مستطیل است، حدود تغییرات x را تعیین کنید.



شکل ۵۳ ــ ۱

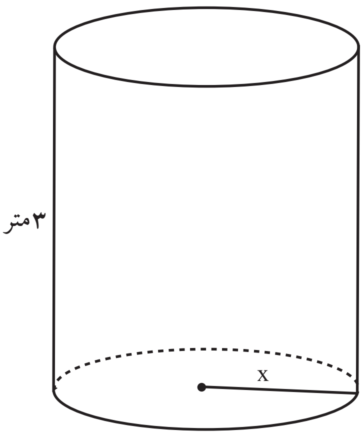
۲) نرخ کرایه‌ی نوعی اتومبیل، برای هر کیلومتر طی مسافت، ۱۵۰ ریال، به اضافه‌ی ورودی ثابت ۴۰/۰۰۰ ریال است. کرایه‌ی اتومبیل تابعی از x، یعنی مسافت طی شده، برحسب کیلومتر، است. ضابطه‌ی این تابع را بنویسید (شکل ۵۴ ــ ۱).

شکل ۵۴ ــ ۱

۳) می‌دانید که سطح جانبی و حجم استوانه به شعاع قاعده و ارتفاع آن بستگی دارد. فرض کنید ارتفاع استوانه‌ای ۳ متر و شعاع قاعده‌ی آن x متر باشد (شکل ۵۵ ــ ۱).

الف) اگر $S(x)$ سطح جانبی این استوانه باشد ضابطه‌ی $S(x)$ را بنویسید.

ب) اگر $V(x)$ حجم این استوانه باشد فرمول $V(x)$ را بنویسید.



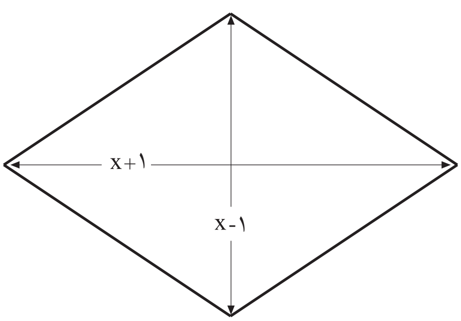
شکل ۵۵ ــ ۱

۴) قطرهای یک لوزی به ترتیب $x+1$ و $x-1$ متر هستند (شکل ۵۶ ــ ۱).

الف) اگر $f(x)$ مساحت این لوزی باشد ضابطه‌ی $f(x)$ را بنویسید.

ب) با توجه به شکل روبه‌رو، حدود تغییرات x را تعیین کنید.

پ) نمودارتابع $y=f(x)$ را رسم کنید.



شکل ۵۶ ــ ۱

۲ــ۳ــ۱ــ تابع با جدول: می‌دانید که دمای بدن بیمار، با توجه به وضع روحی و جسمی او، به زمان بستگی دارد. جدول ۴ــ۱ دمای بدن بیماری را در ساعت‌های معین نشان می‌دهد.

آیا رابطه‌ای برای بیان دمای بدن (θ) این بیمار در لحظه‌های مختلف (t) وجود دارد؟ چرا؟ به عبارت دیگر، θ تابعی از t است، آیا این تابع ضابطه دارد؟

این مثال، نمونه‌ای از یک تابع است که با جدول مشخص شده و ضابطه ندارد (این تابع را با مثال فنر و وزنه مقایسه کنید).

جدول ۵ ــ۱ دمای هوای شهری را در ساعت‌های مختلف یک روز نشان می‌دهد.

الف) آیا می‌توانید بگویید دمای هوای این شهر در ساعت ۲۰ یا ۲۳ چقدر بوده است؟

ب) آیا می‌توانید رابطه‌ی بین دما و زمان را با یک فرمول بیان کنید؟ چرا؟

ج) آیا دمای این شهر در یک لحظه می‌تواند دو عدد متفاوت باشد؟

جدول ۴ــ۱

t	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲
θ	۳۸/۵	۳۹	۳۹/۱	۳۹/۴	۳۹	۳۹/۸	۴۰

جدول ۵ ــ۱

t	۵	۷	۹	۱۱	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
θ	۱۲	۱۴	۲۱/۵	۲۸	۳۰/۵	۳۴/۵	۳۱	۲۷/۵

کار در کلاس ۶ــ۱

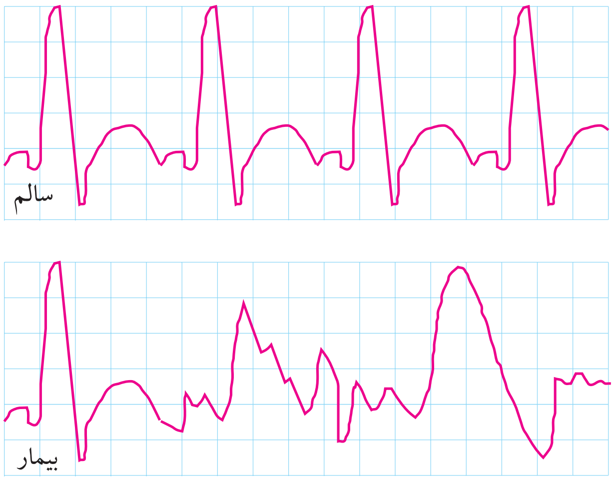
معلم گرامی

چنانچه به تفصیل در کتاب راهنمای معلم ریاضی(۳) پودمانی آمده است دانش‌آموزان را به گروه‌های چند نفری تقسیم کنید سپس با نظارت خود، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌ها را توسط گروه‌ها انجام دهید.

هر گروه با همفکری اعضای خود حداقل دو تابع که با جدول قابل بیان است پیدا کند. (ممکن است گروه‌های متفاوت تابع‌های یکسان به‌دست آورند.) چه نتیجه‌ای از این کار گروهی عاید شد؟

۳ــ۳ــ۱ــ تابع با نمودار: حتماً دیده‌اید که ادارات، وزارتخانه‌ها و نهادهای مختلف برای نشان دادن نتایج فعالیت‌های خود از نمودار استفاده می‌کنند. نمونه‌ای از تابع‌ها که با نمودار نشان داده می‌شوند، عبارت‌اند از :

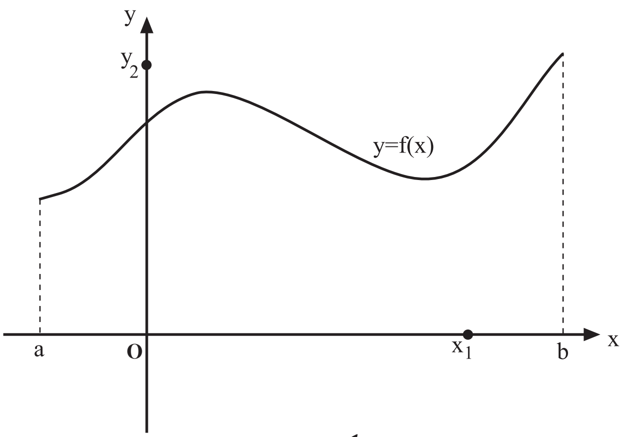
نمودار مربوط به تولید گندم (برنج، سیب‌زمینی، نفت، گاز و...) در مدتی معین. مثلاً، ضربان قلب تابعی از زمان است و پزشک از روی نمودار به سادگی می‌تواند قلب سالم و ناسالم را مشخص کند (شکل ۵۷ــ۱). این کار غالباً با نگاه به ضابطه‌ی تابع، عملی نیست!



شکل ۵۷ــ۱

در شکل ۵۸ــ۱ نمودار تابع $y = f(x)$ را ملاحظه می‌کنید.

> ویژگی اصلی تابع، که نمودار آن نیز باید این ویژگی را داشته باشد، آن است که به ازای هر x از دامنه‌ی تابع فقط یک y حاصل شود. یعنی، هر خط موازی محور yها نمودار $y = f(x)$ را **حداکثر در یک نقطه** قطع کند.



شکل ۵۸ــ۱

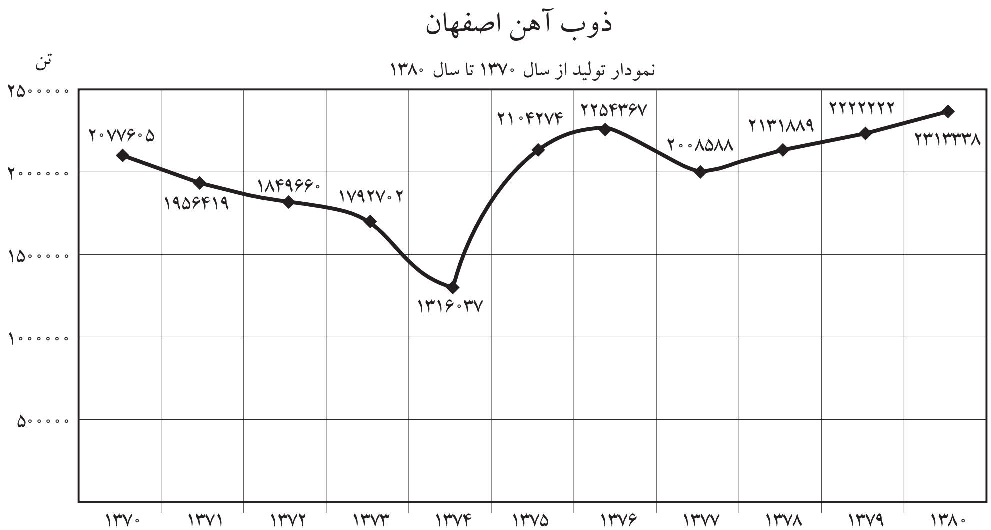
آیا در مورد نمودار شکل ۵۸ــ۱ این ویژگی برقرار است؟

توضیح دهید که $f(x_1)$ چگونه به‌دست می‌آید.

نحوه‌ی به‌دست آوردن x_2 را، به‌طوری که $y_2 = f(x_2)$ ، شرح دهید.

کمترین و بیشترین مقدار y در چه نقاطی اتفاق می‌افتد؟

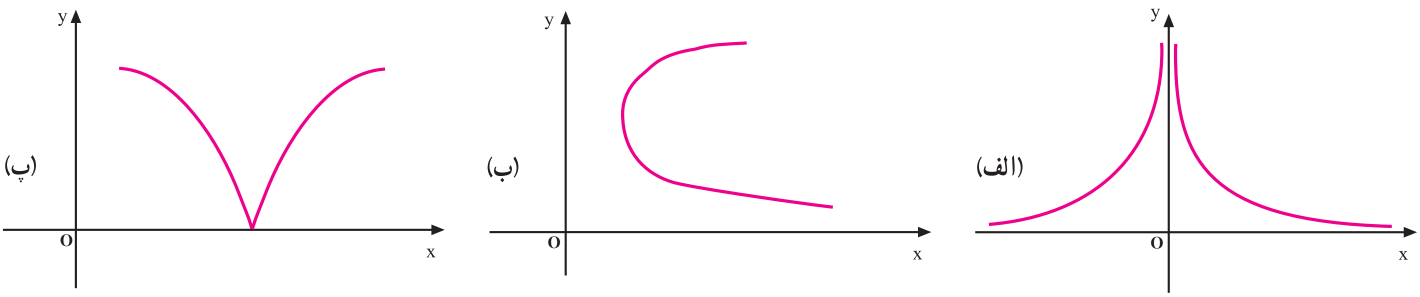
آیا همیشه همین‌طور است؟ مثال بیاورید.



کار در کلاس ۷ــ۱

از نمودارهای مقابل، کدام معرّف یک تابع است؟ توضیح دهید (شکل ۵۹ ــ۱).

شما نیز چند نمودار که معرف تابع باشند رسم کنید.

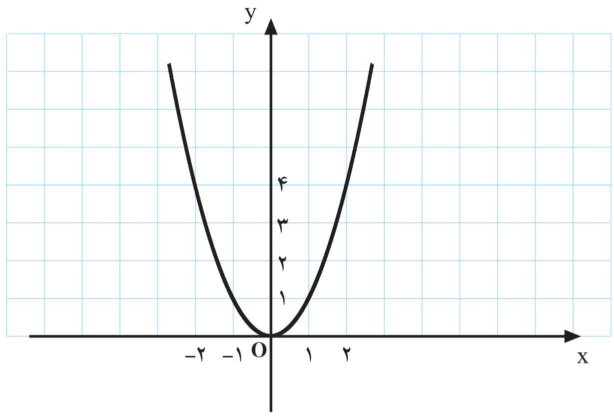


شکل ۵۹ ــ۱

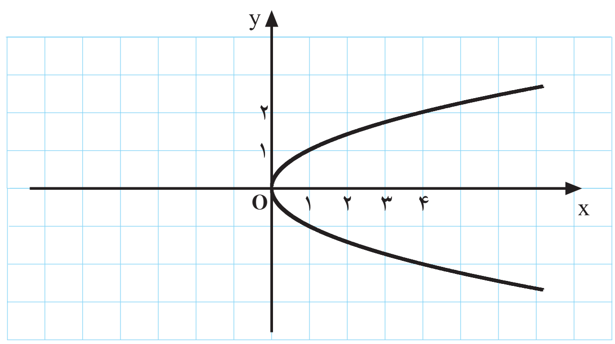
۴ــ۳ــ۱ــ تعریف تابع: اگر x و y چنان به هم مربوط باشند که برای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به‌دست آید، y را تابع x می‌نامیم. طبق این تعریف تنها مقدار متناظر با x را با f(x) نشان می‌دهند و این وابستگی را چنین می‌نویسند :

(بخوانید : y مساوی افِ ایکس است) $y = f(x)$

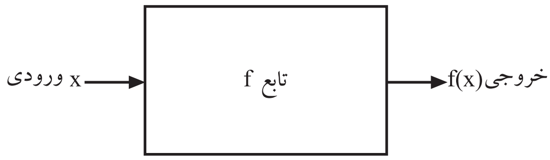
و منظور آن است که «y تابعی از x است». معمولاً x را متغیر مستقل و y را تابعِ x می‌نامند. باید توجه داشت که f(x) معمولاً یک عبارت جبری است که مقدار y را به ازای x تعیین می‌کند. f(x) را **فرمول** یا **ضابطه‌ی** تابع نامند. از نماد f(x) معلوم می‌شود که متغیر، x و تابع، f است.



شکل ۶۰ ــ۱ــ نمودار $y = x^2$. این نمودار یک تابع مشخص می‌کند.



شکل ۶۱ ــ۱ــ نمودار $y^2 = x$.این نمودار یک تابع مشخص نمی‌کند. چرا؟

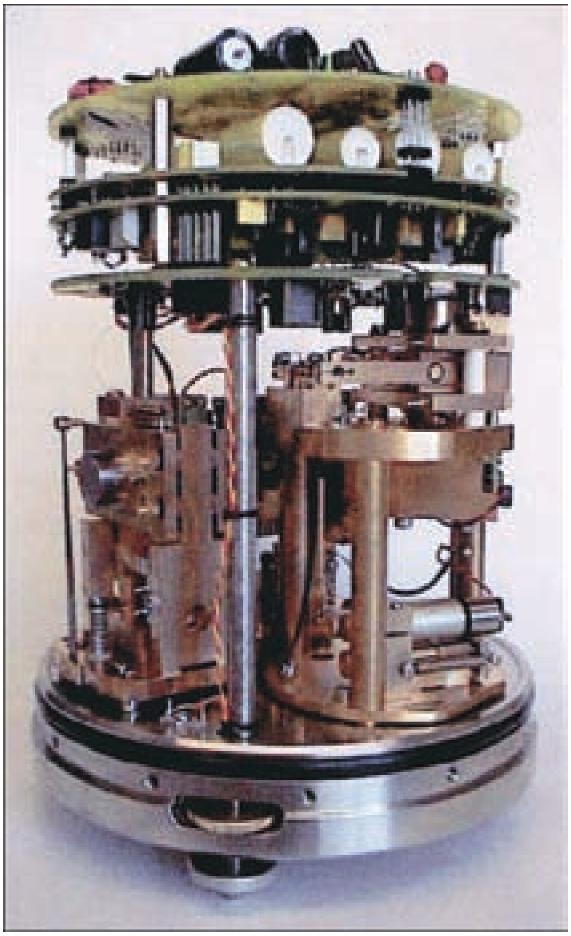


شکل ۶۲ ــ ۱

نکته‌ی ۱: در مسائل مختلف ممکن است برحسب ضرورت متغیر x یا تابع y با نمادهای دیگری بیان شود. مثلاً، $h(t)=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}$ که در آن t متغیر است و h تابع.

نکته‌ی ۲: همان‌طور که می‌دانید تابع‌های زیادی وجود دارند که دارای ضابطه نیستند. مثلِ تابع دمای هوا در لحظه‌های مختلف روز.

نکته‌ی ۳: همچنین می‌دانید که دستگاه‌هایی وجود دارند که با تغییر یک متغیر، نمودار تغییرات تابع را ثبت می‌کنند. برای چنین تابع‌هایی نیز ممکن است نتوانیم ضابطه‌ای تعیین کنیم (مثلاً دستگاه زلزله نگار) (شکل ۶۳ ــ ۱).



شکل ۶۳ ــ ۱

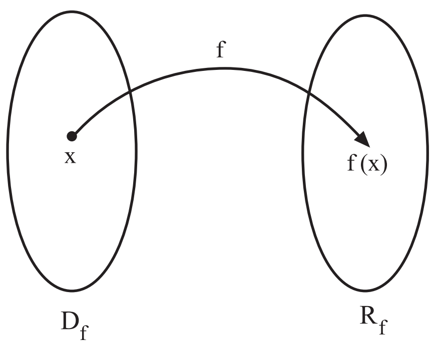
در تابع f مجموعه‌ی مقادیر x را **دامنه‌ی تابع** f (D_f) و مجموعه‌ی مقادیر y را **برد تابع** f (R_f) می‌نامند.

در مثال فنر، دامنه و برد تابع مربوط به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$D_f=\{۰,۰/۲,۰/۴,۰/۶,۰/۸,۰/۹,۱\}$$

$$R_f=\{۰/۱۰,۰/۱۱,۰/۱۲,۰/۱۳,۰/۱۴,۰/۱۵\}$$

در حقیقت f دستگاهی است که x را به‌عنوان **ورودی** دریافت می‌کند و f(x) را به‌عنوان **خروجی** تحویل می‌دهد (شکل ۶۴ ــ ۱).



شکل ۶۴ ــ ۱

به این ترتیب تابع f را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از **زوج‌های مرتب**، یعنی، $(x,f(x))$ نشان داد.

در مثال فنر، تابع مربوط را می‌توان با مجموعه‌ی زوج‌های مرتب زیر نیز نمایش داد.

$$f=\{(۰,۰/۱۰),(۰/۲,۰/۱۱),(۰/۴,۰/۱۲),(۰/۶,۰/۱۳)(۰/۸,۰/۱۴),(۰/۹,۰/۱۴۵),(۰/۱,۰/۱۵)\}.$$

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نوشت:

$$f=\{(x,f(x)):x\in D_f\},$$

$$R_f=\{f(x):x\in D_f\}.$$

تابع‌ها را می‌توان به چهار شکل مختلف یعنی فرمول (ضابطه)، جدول، مجموعه‌ی زوج‌های مرتب و نمودار، نشان داد. در هر مورد از شکلی که مناسب‌تر است استفاده کنید و بدانید که هر چهار شکل نمایش تابع معتبر است.

در این کتاب با تابع‌هایی سروکار داریم که به ازای هر x از دامنه‌ی آن‌ها f(x) عددی حقیقی است. به عبارت دیگر، $R_f \subseteq \mathbb{R}$. در این صورت تابع f را یک **تابع حقیقی** می‌گویند.

کار در کلاس ۸ ــ ۱

۱) فرض کنید، $f(x)=۶x-۲$ و $D_f=\{-۱,-\frac{۱}{۲},۰,۱,۲\}$.

الف) f را با جدول مشخص کنید (جدول ۶ ــ ۱).

ب) R_f را بنویسید.

ج) f را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

راهنمایی: f(x) را به ازای xهای متعلق به D_f حساب کنید.

۲) دامنه و برد تابع‌های f و g را بنویسید و مقدار تابع را در نقطه‌ای که مشخص شده، از روی شکل ۶۵ــ۱، معین کنید.

$D_f=$

$R_f=$

$f(۳)=$

$D_g=$

$R_g=$

$g(۲)=$

۳) تابع f با نمودار شکل ۶۶ ــ ۱ مشخص شده است.

الف) D_f و R_f را بنویسید.

ب) با توجه به نمودار f(۱) و f(۵) را بنویسید.

پ) اگر $f(x)=۹$ مقدار x چیست؟

ت) اگر $f(x)=۴$ مقدار x چیست؟

ث) کمترین مقدار تابع دربازه‌ی $[۱,۱۰]$ چیست؟

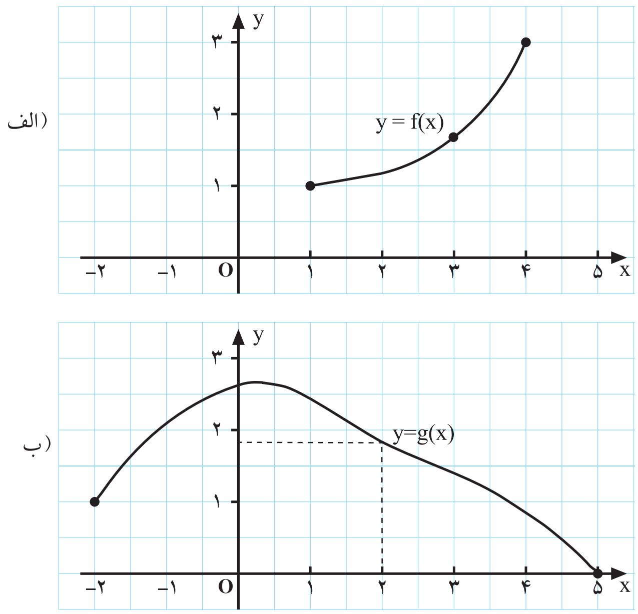
ج) بیشترین مقدار تابع دربازه‌ی $[۱,۱۰]$ چیست؟

جدول ۶ ــ ۱

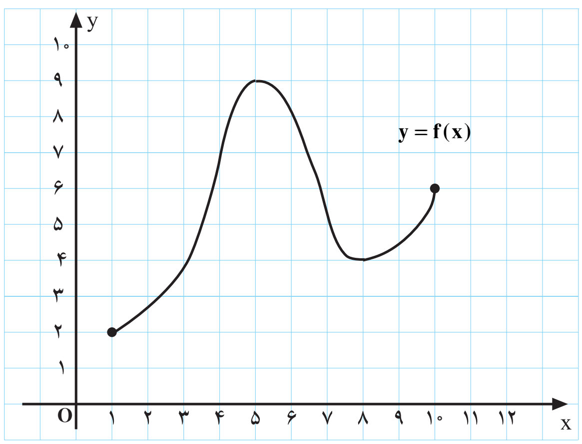
x	-۱	
f(x)	-۸	

$R_f=\{-۸,$

$f=\{(-۱,-۸),$



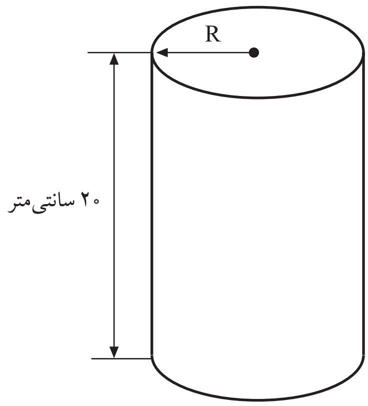
شکل ۶۵ ــ ۱



شکل ۶۶ ــ ۱

تمرین ۶ــ۱

۱) ارتفاع استوانه‌ای ۲۰ سانتی‌متر است($h = ۲۰cm$) (شکل ۶۷ ــ۱). می‌دانید که حجم یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعده‌ی R از رابطه‌ی $V = \pi R^۲ h$ حساب می‌شود. اگر R بین ۸ تا ۱۲ سانتی‌متر تغییر کند حجم این استوانه بین چه مقادیری تغییر می‌کند؟



شکل ۶۷ ــ۱

۲) فرض کنید $h(x) = x^۲$ و $t(x) = x$ و دامنه‌ی هر دو تابع بازه‌ی $[۰,۱]$ باشد.

الف) نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید ؛ (شکل ۶۸ ــ۱) ؛

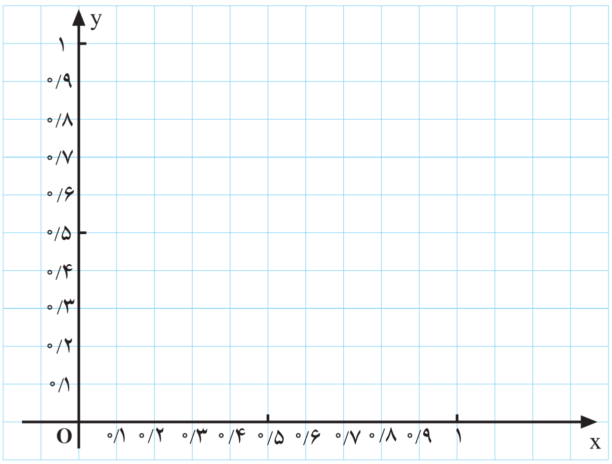
ب) برد تابع h را تعیین کنید ؛

$R_h =$

پ) برد تابع t چیست؟

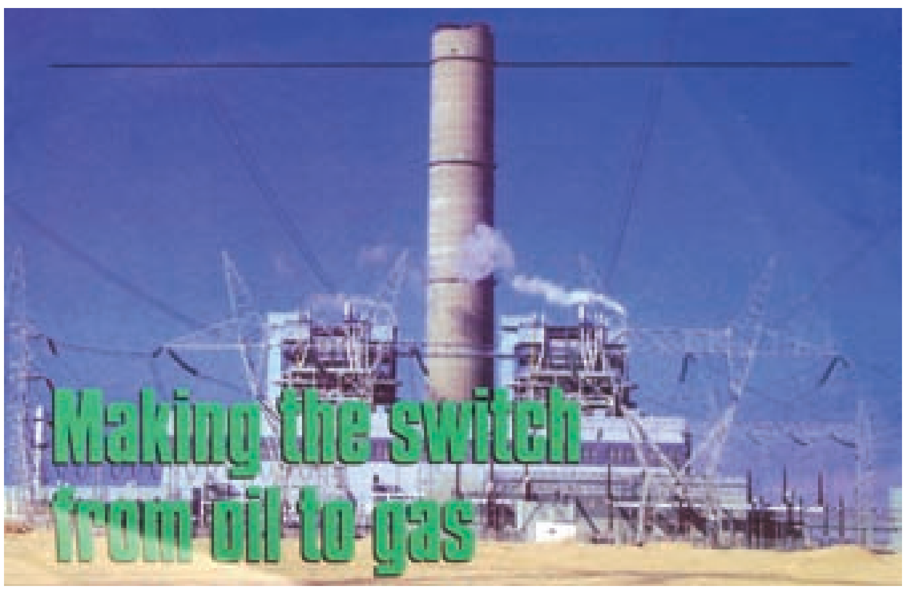
$R_t =$

ت) آیا دو تابع h و t برابرند؟ چرا؟



شکل ۶۸ ــ۱

تساوی دو تابع: دو تابع وقتی با هم برابرند که دامنه‌ی یکسان داشته باشند و به ازای هر عضو از دامنه مقدار دو تابع برابر باشند.

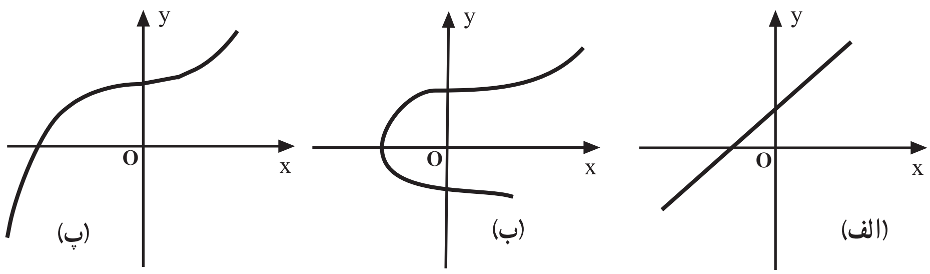


۳) کدام نمودار مربوط به یک تابع است؟ توضیح دهید (شکل ۶۹ ــ ۱).

الف)

ب)

پ)



شکل ۶۹ ــ ۱

۴) نشان دهید که هیچ‌یک از رابطه‌های زیر، بین x و y، یک تابع مشخص نمی‌کنند.

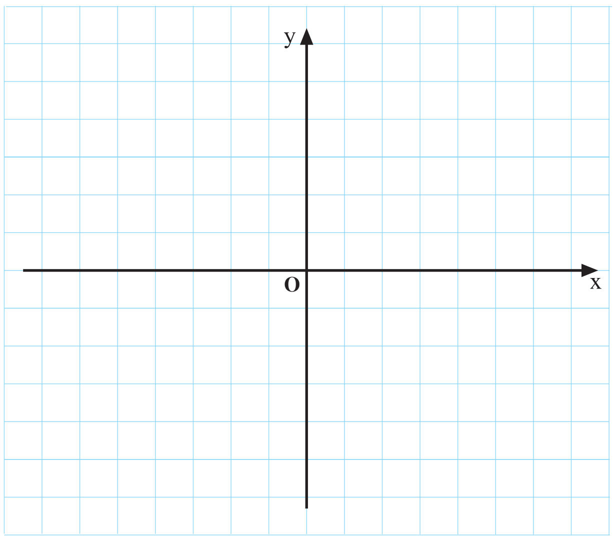
الف) $x+y^{۲}=۴$

ب) $|y|=x+۱$

پ) $y^{۲}=x$

۵) تابع $y=x^{۲}-۱$ مفروض است.

الف) نمودار این تابع را رسم کنید (شکل ۷۰ ــ ۱).



شکل ۷۰ ــ ۱

ب) آیا نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۳\\۸\end{matrix}\right.$ روی نمودار این تابع است؟

پ) اگر نقطه‌ی $B\left|\begin{matrix}۱\\b\end{matrix}\right.$ روی نمودار این تابع باشد b چیست؟

ت) عدد a را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی $C\left|\begin{matrix}a\\-۱\end{matrix}\right.$ روی نمودار تابع فوق باشد.

ث) آیا نقطه‌ی $D\left|\begin{matrix}\sqrt{۳}\\۱\end{matrix}\right.$ روی نمودار این تابع قرار دارد؟

۶) فرض کنید $f(x)=x^{۲}-۲x$. جدول ۷ــ۱ را کامل کنید و بعد نمودار $y=f(x)$ را در دفتر خود رسم کنید.

جدول ۷ــ۱

x	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳
f(x)						

۷) تابع f به صورت زیر تعریف شده است. جدول ۸ ــ ۱ را کامل و سپس نمودار تابع را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۲x-۱, & x<۱\\ x^{۲}, & x\geq ۱\end{cases}$$

جدول ۸ــ۱

x	f(x)
−۱	
۰	
۱	
۲	
۳	

۸) در زیر چند تابع با ضابطه داده شده‌اند، مقدار آن‌ها را در نقاط مشخص شده حساب کنید.

الف) $f(x)=x^{۲}-x+\frac{۱}{۲}$ ، $x=۰,\frac{\pi}{۲}$

ب) $g(x)=۳x^{۲}-x$, $x=-۱,۱$

پ) $h(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}$, $x=-۲,۰/۵$

$f(۰)=$, $f(\frac{\pi}{۲})=$

$g(-۱)=$, $g(۱)=$

$h(-۲)=$, $h(۰/۵)=$

۹) تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}-x$ تعریف شده است. مقادیر زیر را حساب کنید. (h عددی حقیقی است.)

$f(۳)$, $f(۳+h)$, $f(۳+h)-f(۳)$

$f(۳)=$

$f(۳+h)=$

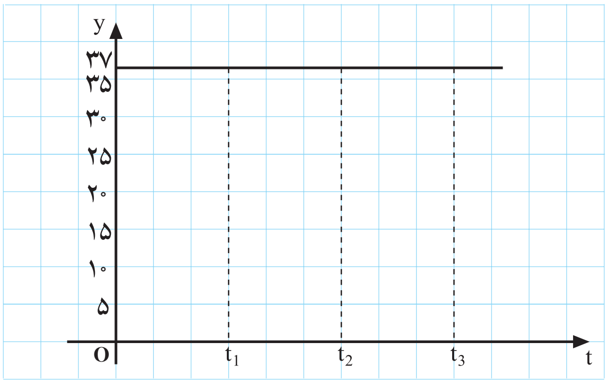
$f(۳+h)-f(۳)=$

۵ــ۳ــ۱ــ چند تابع ویژه

ــ ***تابع ثابت:*** دمای بدن یک انسان سالم همواره چند درجه‌ی سلسیوس(سانتی‌گراد) است؟ اگر f(t) دمای بدن این شخص در زمان t باشد داریم :

$f(t)=۳۷,$

این تابع که به ازای هر t دارای مقدار ثابت ۳۷ است **تابع ثابت** نامیده می‌شود. نمودار این تابع را در شکل ۷۱ــ۱ ملاحظه می‌کنید.



شکل ۷۱ــ۱

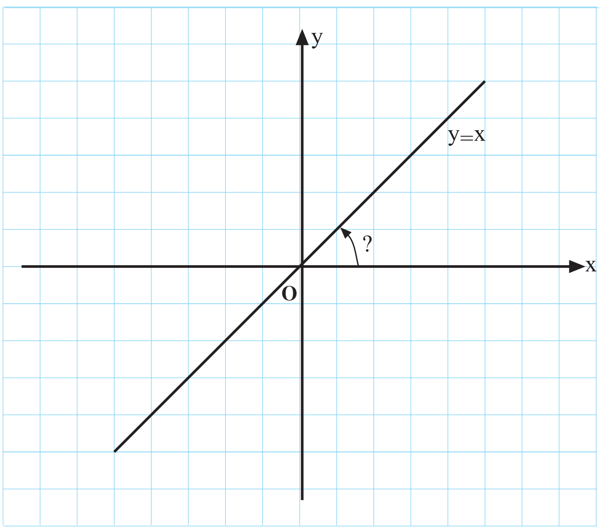
شما نیز چند تابع ثابت مثال بزنید و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

اگر به ازای هر x از دامنه‌ی تابع f، $f(x)=c$ که $c\in\mathbb{R}$ ، f را تابع ثابت گویند.

ــ ***تابع همانی:*** یک شیء در فاصله‌ی x جلوی آینه‌ای تخت قرار دارد. فاصله‌ی تصویر این شیء تا آینه چقدر است؟ (شکل ۷۲ــ۱). اگر f(x) فاصله‌ی شیء تا آینه باشد.

$f(x)=x$

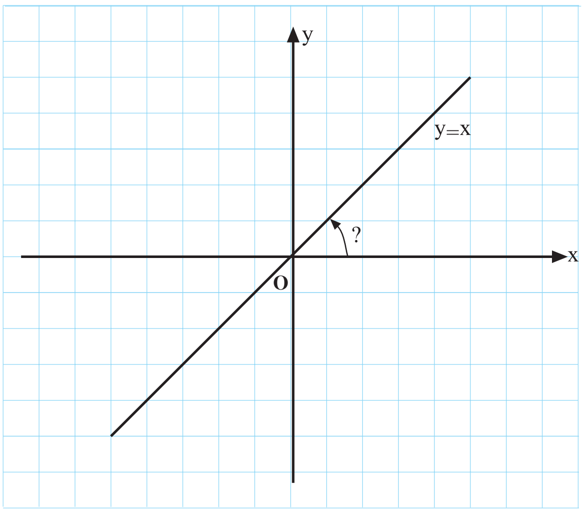
این نمونه‌ای از یک **تابع همانی** است.



شکل ۷۲ــ۱

اگر به ازای هر x از دامنه‌ی f، $f(x)=x$ ، f را تابع همانی گویند.

نمودار تابع همانی را در شکل ۷۳ـ۱ می‌بینید. زاویه‌ی نمودار تابع همانی با محور ox چند درجه است؟



شکل ۷۳ـ۱

در حالت کلی،نمودار تابع همانی نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات است.

ــ تابع‌های مثلثاتی:

در شکل ۷۴ـ۱ دایره‌ی مثلثاتی رسم شده و زاویه‌ی α مشخص شده است.

الف) این دایره‌ی مثلثاتی چه ویژگی‌هایی دارد؟

ب) نقطه‌های مربوط به $\pi+\alpha$ و $۲\pi+\alpha$ را روی این دایره مشخص کنید.

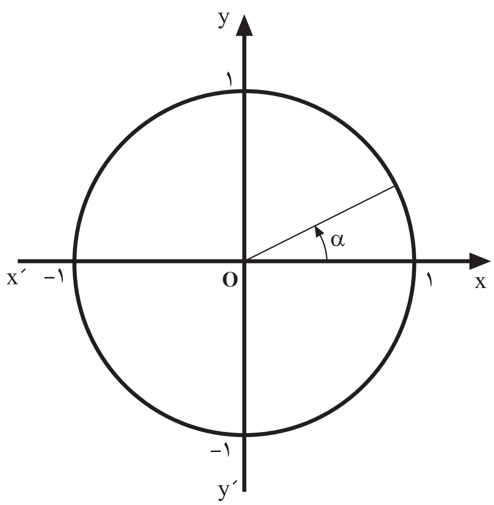
پ) مقدار $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را به ترتیب، روی محور $y'oy$ و محور $x'ox$ مشخص کنید.

ت) وقتی α از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ (یعنی ۹۰°) تغییر می‌کند $\sin\alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

ث) وقتی α از $\frac{\pi}{۲}$ تا π (یعنی ۱۸۰°) تغییر می‌کند $\sin\alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

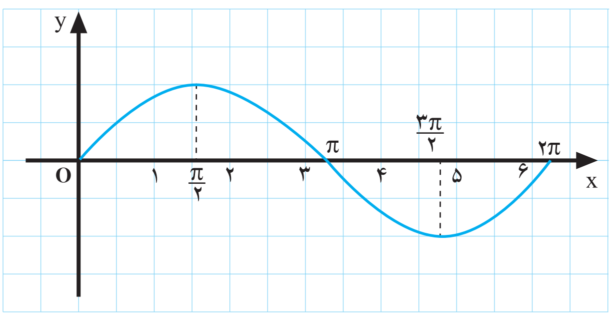
ج) وقتی α از ۰ تا ۱۸۰° تغییر می‌کند $\cos\alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

چ) وقتی α از $\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{۳\pi}{۲}$ (یعنی ۲۷۰°) تغییر می‌کند $\sin\alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟



شکل ۷۴ـ۱

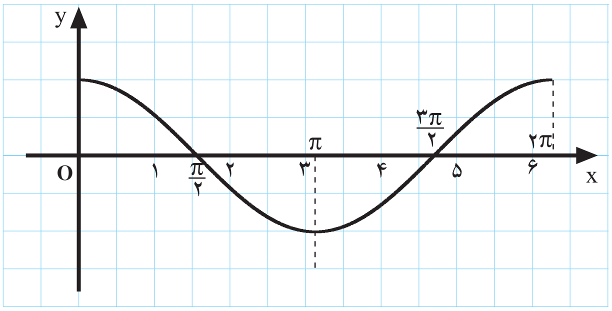
ح) با توجه به آنچه در قسمت‌های قبل ملاحظه شد، نمودار تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم شده‌اند(شکل‌های ۷۵ـ۱ و ۷۶ـ۱).



شکل ۷۵ـ۱ـ نمودار تابع $y = \sin x$

خ) با توجه به این که برای هر α، $\sin(\alpha+۲\pi)=\sin\alpha$، نمودار $y=\sin x$ را در بازه‌ی $[۲\pi,۴\pi]$ رسم کنید.

د) با توجه به این که برای هر α، $\cos(\alpha+۲\pi)=\cos\alpha$، نمودار $y=\cos x$ را در بازه‌ی $[۲\pi,۴\pi]$ رسم کنید.



شکل ۷۶ــ۱ــ نمودار تابع $y=\cos x$

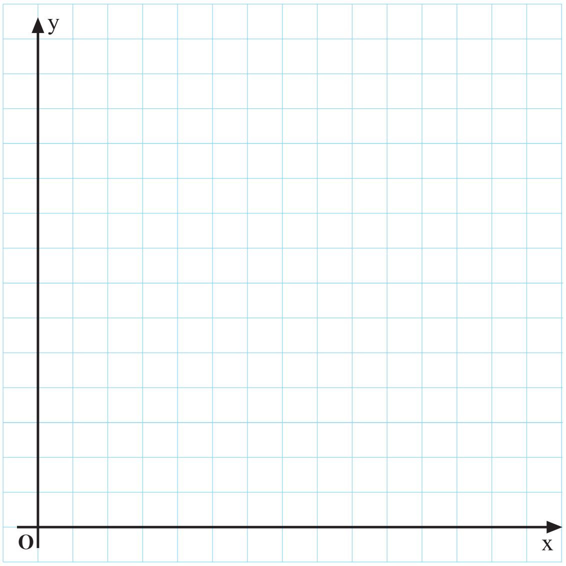
تمرین ۷ــ۱

۱) تابع $y=f(x)$ چنین تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases} x, & ۰<x\leq ۵ \\ ۲x, & ۵<x\leq ۷ \\ \frac{۳}{۲}x, & ۷<x\leq ۱۰ \end{cases}$$

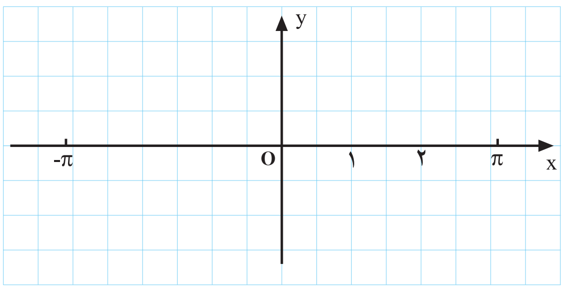
الف) دامنه‌ی این تابع را بنویسید ؛

ب) نمودار این تابع را رسم کنید (شکل ۷۷ــ۱).



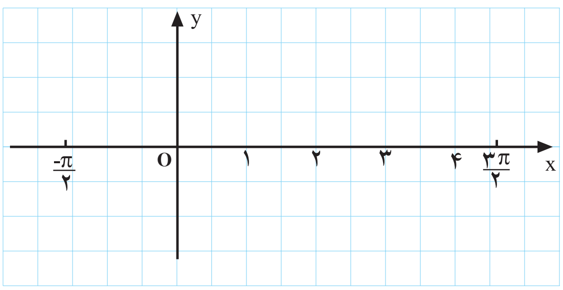
شکل ۷۷ــ۱

۲) نمودار تابع $y=\sin x$ را در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ رسم کنید (شکل ۷۸ــ۱).



شکل ۷۸ــ۱

۳) نمودار تابع $y=\cos x$ را در بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{۲},۳\frac{\pi}{۲}\right]$ رسم کنید (شکل ۷۹ــ۱).



شکل ۷۹ــ۱

آزمون پایانی (۳)

۱ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=2x-1$ و $D_f=\{0,1,5\}$ است.

الف) این تابع را با مجموعه زوج‌های مرتب نمایش دهید.

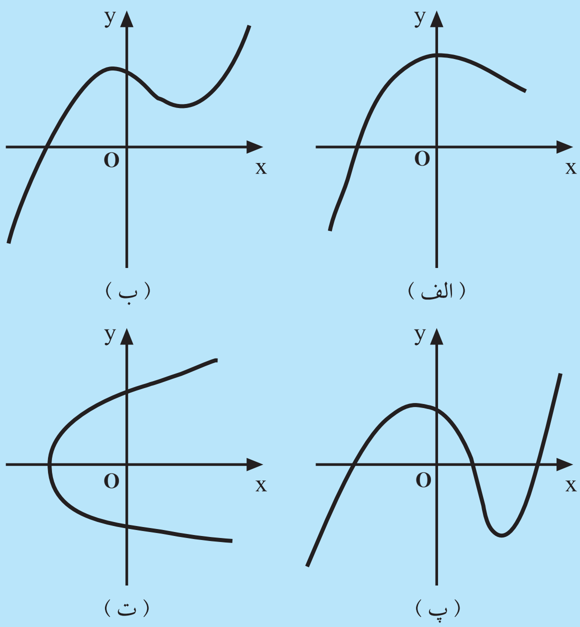
ب) این تابع را با جدول نمایش دهید.

پ) نمودار این تابع را تعیین کنید.

۲ــ تابع مربوط به دمای محل سکونت خود را در ساعت‌های ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۸ و ۲۲ مشخص کنید. آیا می‌توانید برای این تابع ضابطه به‌دست آورید؟

۳ــ کدام یک از نمودارهای شکل ۸۰ــ۱ یک تابع را مشخص می‌کند؟

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی



شکل ۸۰ــ۱