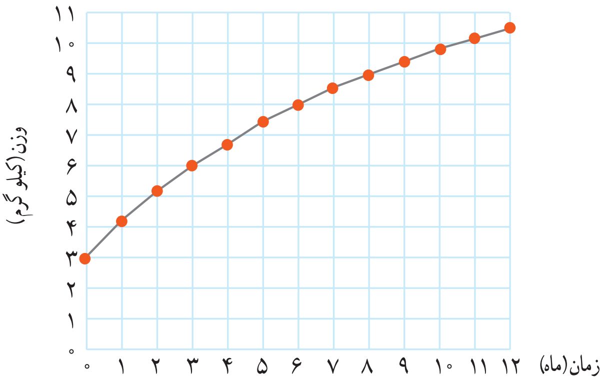
فصل ۲

تابع

مفهوم رابطه و تابع

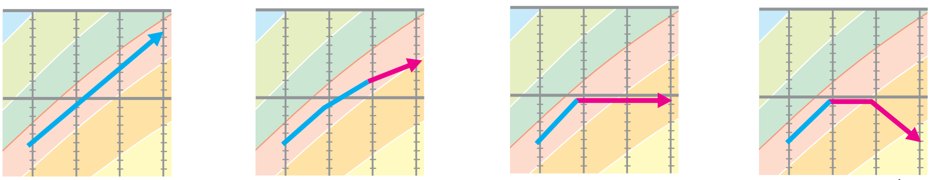
در موارد زیادی پدیده‌های پیرامون ما با یک‌دیگر در ارتباط هستند. به طور مثال «رشد» پدیده‌ای است که با زمان در ارتباط است. تغییرات رشد در موجودات زنده نوعی وابستگی به تغییرات زمان دارد. تغییرات در درجه حرارت و تغییرات ارتفاع به یکدیگر وابسته هستند. مساحت یک دایره به شعاع آن وابسته است. بنابراین طبیعی به نظر می‌رسد که این ارتباط‌ها را به طور دقیق‌تر مطالعه کنیم و در نتیجه کنترل و آگاهی بیشتری درمورد آن‌ها و نیز اسرار خلقت داشته باشیم.

شاید بیشتر شما نمودارهای وزن و یا قد یک کودک از بدو تولد تا هنگام ورود به مدرسه را دیده باشید. شکل (۱) نمودار تغییرات وزن یک کودک طبیعی را از هنگام تولد تا یک سالگی نشان می‌دهد[1].



شکل۱ : نمودار تغییرات در وزن یک کودک طبیعی

هنگامی که پزشکان می‌خواهند درمورد رشد وزن یک کودک اظهار نظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسه‌ی نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخ دهد که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



د) اُفت رشد　ج) توقف رشد　ب) کندی رشد　الف) رشد مطلوب

شکل۲

---

۱. برای سادگی یک نمونه از نمودارهای واقعی ارائه شده است.

جدول زیر نشان دهنده وزن یک کودک است که در پایان هرماه طی یک سال، توسط پزشک (یا یک مرکز بهداشتی) ثبت شده است.

زمان(ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن(کیلوگرم)	۲/۸	۳/۳	۴/۲	۵	۵	۵	۴/۸	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۲	۸	۸/۵

الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام‌یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟

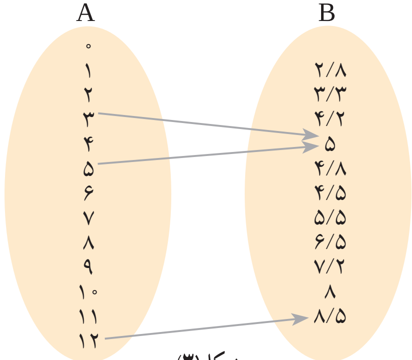
ب) در چه فاصله‌ی زمانی وزن او ثابت مانده است؟

ج) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به‌دست آمده را به یک‌دیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به‌دست آید. با مقایسه‌ی این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک‌سال بررسی کنید.

اگرچه وزن کودک در فاصله‌ی بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود ولی به کمک نموداری که رسم‌کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصله‌ی بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

اطلاعات داده شده در جدول را علاوه بر این‌که به صورت یک نمودار می‌توان ارائه کرد، به صورت‌های دیگر نیز می‌توان نمایش‌داد. مثلاً، می‌توانیم ماه‌های یک سال را در مجموعه‌ای مانند A و وزن‌های نظیر کودک در هر ماه را در مجموعه‌ای مانند B نمایش‌دهیم (شکل ۳). همچنین برای نشان دادن وابستگی و ارتباط بین این دو مجموعه، هر عدد در مجموعه‌ی A را با یک پیکان، به عدد نظیر آن در مجموعه‌ی B وصل می‌کنیم. این گونه نمایش رابطه‌ی بین دو مجموعه را «نمودار ون» می‌نامند.

با توجه به فعالیت بالا، نمودار ون داده شده در شکل (۳) را تکمیل کنید :

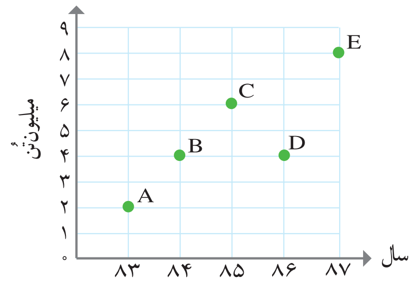


شکل(۳)

هر یک از سه روشی که برای نشان دادن وابستگی و ارتباط بین دو مجموعه ذکر شد (جدول، نمودار و نمودار ون) دارای مزایایی است. شیوه و نوع مطالعه پدیده‌ها، بر استفاده از یک یا چند نوع نمایش تأثیر می‌گذارد. در هر حال هر یک از سه نمایش ذکر شده، نمایش یک «رابطه» یا وابستگی بین اعضای دو مجموعه هستند.

فعالیت

۱ــ شکل (۴) نمودار میزان تولید یک محصول کشاورزی را در طی سال‌های ۱۳۸۳ تا ۱۳۸۷ نشان می‌دهد.



شکل۴ : نمودار میزان محصول کشاورزی

الف) نمایش‌های دیگر این رابطه (جدول و نمودار ون) را ارائه کنید.

ب) نقاط A و B و C و D و E هر یک چه چیزی را بازگو می‌کنند؟

ج) آیا این امکان وجود دارد که در یک سال معین، میزان محصول به‌دست آمده دو عدد متفاوت باشد؟! آیا سال‌هایی را می‌توان یافت که میزان محصول تولید شده در آن سال‌ها یکسان باشد؟

اگر در شکل (۴) محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می‌توان با یک «زوج» از اعداد به صورت زیر نمایش داد :

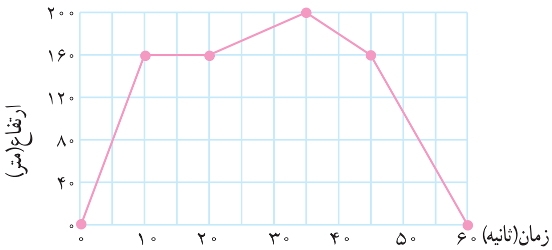
A(۸۳,۲)   B(۸۴,۴)   C(۸۵,۶)   D(۸۶,۴)   E(۸۷,۸)

ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است. مثلاً زوج های(۸۳,۲) و (۲,۸۳) برابر نیستند و دو نقطه متفاوت را در یک دستگاه مختصات نشان می‌دهند. از این جهت به هر یک از زوج های متناظر با نقاط A تا E یک «زوج مرتب» می‌گوییم. حال اگر همه این زوج های مرتب داده شده را در مجموعه‌ای قرار دهیم، یک نمایش دیگر برای رابطه ارائه شده در فعالیت (۲) به‌دست می‌آید.

مجموعه‌ی : {(۸۳,۲),(۸۴,۴),(۸۵,۶),(۸۶,۴),(۸۷,۸)}

نمایش زوج مرتبی رابطه‌ی داده شده می‌باشد. در زوج مرتب (۸۵,۶)، ۸۵ را مؤلفه‌ی اول و ۶ را مؤلفه‌ی دوم می‌نامیم.

۲ـ شکل (۵) نمودار ارتفاع پرواز یک پرنده از سطح زمین را، در طی ۱ دقیقه نشان می‌دهد.



شکل۵ : نمودار ارتفاع یک پرنده

الف) چه تفاوت ظاهری بین این نمودار و نمودار فعالیت (۲) مشاهده می‌کنید؟

ب) این نمودار، رابطه‌ی بین چه مجموعه‌هایی را نشان می‌دهد؟

ج) از بین چهار نمایش مختلفی که برای این رابطه می‌شناسید، به نظر شما کدام‌یک مناسب‌تر است؟

د) آیا این امکان وجود دارد که پرنده در یک زمان معین در دو ارتفاع متفاوت از سطح زمین باشد؟!

هـ) آیا زمان‌هایی وجود دارند که در آن‌ها پرنده ارتفاعی یکسان از سطح زمین داشته باشد؟

شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز و تبریز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر جمعیت آن شهرها را به طور تقریبی بنویسید.

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز
جمعیت(میلیون نفر)					

الف) با استفاده از محورهای مختصات نموداری برای رابطه‌ی داده شده در جدول رسم کنید. همچنین این رابطه را با نمودار ون نمایش دهید.

ب) آیا امکان دارد که یک شهر دو جمعیت مختلف داشته باشد؟! آیا به طور کلی این امکان وجود دارد که دو یا چند شهر جمعیتی یکسان داشته باشند؟

مفهوم تابع

در این‌جا ویژگی‌های مشترک رابطه‌های ذکر شده در صفحات قبل را مرور می‌کنیم. همان‌طور که درمورد تغییرات وزن یک کودک دیدید، این امکان وجود دارد که در پایان همه‌ی ماه‌ها، کودک

دارای وزن‌های متفاوت باشد (نمودار رشد یک کودک معمولی). همچنین ممکن است در پایان دو یا چند ماه مختلف دارای وزنی یکسان باشد و به عبارت دیگر وزن او ثابت مانده‌باشد. اما :

غیر ممکن است که یک کودک «در پایان یک ماه معین دو یا چند وزن متفاوت داشته باشد».
غیر ممکن است که در پایان یک سال معین «میزان محصول به‌دست آمده دو یا چند مقدار متفاوت باشد».
همچنین غیر ممکن است که یک پرنده « در یک زمان معین در دو یا چند ارتفاع متفاوت باشد».
و سرانجام غیر ممکن است که یک شهر «در یک زمان معین دارای دو یا چند جمعیت متفاوت باشد».

چه مفهوم مشترکی در همه‌ی این رابطه‌ها پیدا می‌کنید؟ در ریاضیات به چنین رابطه‌هایی یک «تابع» گفته می‌شود. به عبارت دقیق‌تر :

یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نظیر می‌شود.

می‌توان با استفاده از نمایش‌های مختلف یک رابطه، در مورد تابع بودن آن رابطه قضاوت کرد. مثلاً به کمک نمودار ون می‌توان تابع بودن یک رابطه را بررسی کرد. به عبارت دیگر با توجه به مفهوم تابع :

یک رابطه بین مجموعه‌ی A و مجموعه‌ی B که با نمودار ون نمایش داده شده است، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

این نکته را می‌توان به عنوان معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه با استفاده از نمودار ون در نظر گرفت.

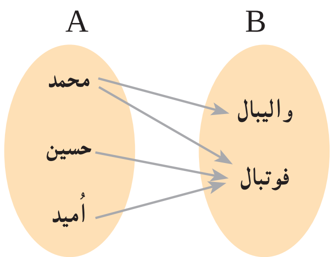
با تکمیل جملات زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که آن رابطه به صورت نمودار یا زوج مرتب ارائه می‌شود، معیارهایی به‌دست آورید.

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور عرض ها نمودار را حداکثر..
....

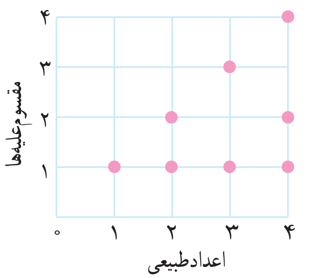
اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج های مرتب داده شده باشد، هنگامی این مجموعه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی[1] در آن..
....

توجه داشته باشید که ممکن است یک رابطه‌ی دلخواه، تابع نباشد. به طور مثال رابطه‌های زیر تابع نیستند.

مثال



۱ــ فرض کنید مجموعه‌ی A شامل سه دانش‌آموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعه‌ی B شامل ورزش‌های مورد علاقه‌ی آن‌ها یعنی والیبال و فوتبال باشد. چرا این رابطه یک تابع نیست؟



۲ــ نمودار مقابل رابطه‌ی بین مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۱ تا ۴ و مجموعه‌ای که شامل مقسوم‌علیه‌های این اعداد است، را نشان می‌دهد. در این رابطه هر عدد به مقسوم علیه‌های آن نظیر می‌شود.
چرا این نمودار یک تابع را نشان نمی‌دهد؟ سه نمایش دیگر این رابطه را که می‌شناسید، ارائه کنید و توضیح دهید که چرا این نمایش ها، نمایشی از یک تابع نیستند.

مسائل

۱ــ در هر یک از موارد زیر رابطه‌ای بین دو پدیده ذکر شده‌است. توضیح دهید که چگونه این رابطه‌ها را می‌توان به کمک یک تابع توصیف کرد؟

رابطه‌ی بین افراد و قد آن‌ها

رابطه‌ی بین افراد و وزن آن‌ها

۱. دو زوج مرتب (c,d) و (a,b) مساوی هستند هرگاه a=c و b=d در غیر این صورت دو زوج مرتب را متمایز می‌نامیم.

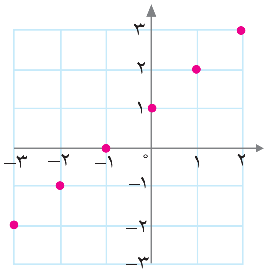
رابطه‌ی بین افراد و سن آن‌ها
رابطه‌ی بین دانش‌آموزان یک کلاس و نمره‌ی ریاضی پایان ترم آن‌ها
رابطه‌ی بین سال‌های مختلف و میزان بودجه‌ی اختصاص یافته به آن سال‌ها در یک کشور
رابطه‌ی بین افراد و دمای بدن آن‌ها در یک زمان خاص
رابطه‌ی بین مستطیل‌ها و محیط آن‌ها

آیا می‌توانید رابطه‌های دیگری را مثال بزنید که تابع باشند؟

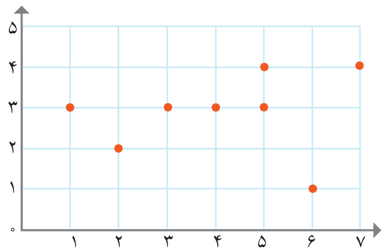
چند رابطه مثال بزنید که تابع نباشند.

کدام‌یک از رابطه‌هایی که به صورت‌های متفاوت در مسائل ۲، ۳ ، ۴ و ۵ نمایش داده شده‌اند، یک تابع هستند؟

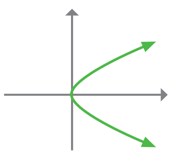
۲– نمودار

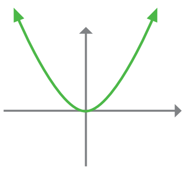


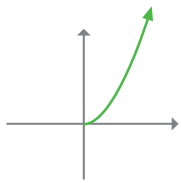
(الف)

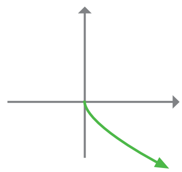


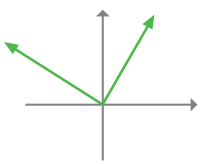
(ب)

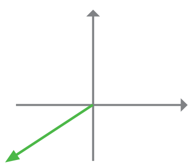

(ج)

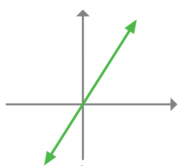

(د)

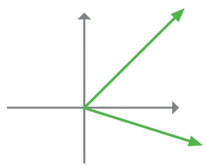

(هـ)


(و)


(ز)


(ح)


(ط)


(ی)

۳– جدول

x	۱	۲	۳	۴	۵	...
y	۶	۷	۸	۹	۱۰	...

(ب)

x	۲	۹	۰	۵	−۱
y	۱	۰	۲	۴	۴

(الف)

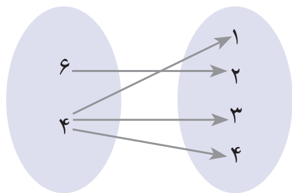
x	۲	۸	۷	۴	۸
y	۲	۷	۷	۹	۴

(د)

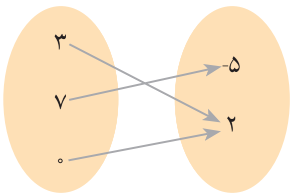
x	$\frac{۱}{۳}$	−۲	۵	−۲	۷	۱۰
y	$\frac{۱}{۳}$	۱	۵	۴	۵	$\sqrt{۲}$

(ج)

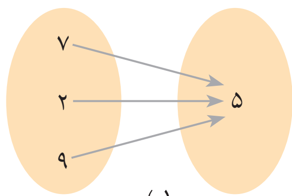
۴– نمودار ون



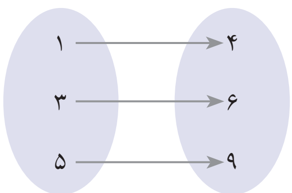
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

۵– زوج‌های مرتب

ب) $\{(۰,۱) , (\frac{۳}{۵},۱) , (−۵,۱) , (۸,۱)\}$

الف) $\{(۲,۱) , (۳,−۵) , (۳,۷)\}$

د) $\{(۵,۲)\}$

ج) $\{(۱,۱) , (۲,۲) , (\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}), (−۴,−۴)\}$

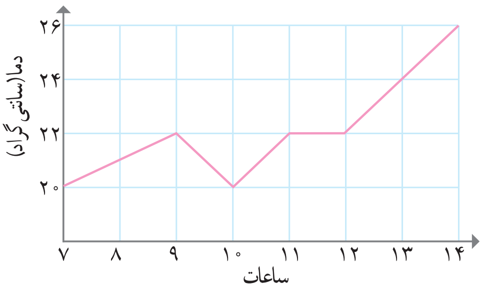
و) $\{(۲,۳) , (۳,۲) , (۱,۱)\}$

هـ) $\{(۲,۳) , (۰,−۶) , (۰,۳) , (\sqrt{۷},۱)\}$

۶- اگر بدانیم رابطه‌ی زیر یک تابع است، مقادیر a و b را به‌دست آورید و نمودار تابع را رسم کنید.

$$\{(a-۱,۲)\ ,\ (۵,a-۲)\ ,\ (a-۲,b+۳)\ ,\ (۳,۵)\ ,\ (۵,۳)\}$$

۷- نمودار مقابل تغییرات در دمای یک شهر از ساعت ۷ صبح تا ۱۴ بعد از ظهر را نشان می‌دهد.



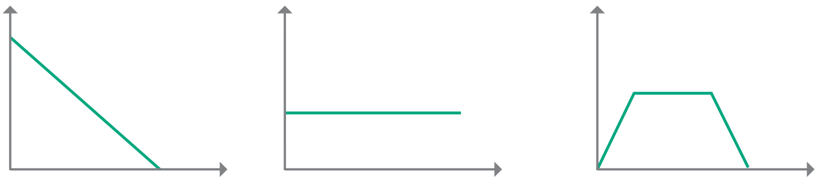
آیا این نمودار یک تابع را نشان می‌دهد؟

بیش‌ترین و کم‌ترین دمای ثبت شده چه‌قدر هستند؟

در کدام ساعات دما ثابت مانده است ؟

چگونه به کمک نمودار می‌توان همه‌ی زمان‌هایی را مشخص کرد که دمای هوا در آن زمان‌ها یک مقدار معین است؟

۸- کدام‌یک از نمودارهای زیر، می‌تواند نمایشگر ارتفاع هواپیمایی باشد که از یک فرودگاه بلند می‌شود، مدتی در آسمان پرواز می‌کند و سپس فرود می‌آید؟



نمودارهای دیگر چه چیزهایی را می‌توانند نشان‌دهند؟ آیا هر سه نمودار تابع هستند؟

دامنه و برد توابع

جدول زیر رابطه‌ی بین ساعاتی از روز و دمای بدن یک فرد بیمار را نشان می‌دهد :

ساعات روز	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دمای بدن(سانتی گراد)	۴۰	۳۸	۳۷	۳۷	۳۷

اطلاعات داده شده در جدول را چگونه تفسیر می‌کنید؟

نمایش رابطه داده شده به صورت زوج‌های مرتب از این قرار است :

$$\{(۸,۴۰)\ ,\ (۹,۳۸)\ ,\ (۱۰,۳۷)\ ,\ (۱۱,۳۷)\ ,\ (۱۲,۳۷)\}$$

مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل دهنده‌ی هر رابطه را «دامنه» رابطه می‌نامند. بنابراین دامنه‌ی رابطه‌ی داده شده برابر است با مجموعه‌ی : A = {۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲}
مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل دهنده هر رابطه را «برد» رابطه می‌نامند. بنابراین برد رابطه‌ی داده شده برابر است با مجموعه‌ی : B = {۳۷, ۳۸, ۴۰} .

الف) اگر بخواهیم با استفاده از جدول داده شده، دامنه و برد رابطه را بیابیم چگونه این کار را انجام دهیم؟

ب) نمایش‌های دیگر این رابطه را ارائه کنید و دامنه و برد رابطه را از آن‌ها تعیین‌کنید. آیا می‌توانید روشی برای یافتن دامنه و برد از نمایش‌های مختلف یک رابطه ارائه دهید؟

ج) چرا رابطه‌ی داده شده یک تابع است؟

توجه داریم که دامنه و برد یک تابع دقیقاً مشابه دامنه و برد یک رابطه تعریف می‌شود، بنابراین :

مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج های مرتب تشکیل دهنده یک تابع را «دامنه» و مجموعه‌ی همه مؤلفه‌های دوم زوج های مرتب تشکیل دهنده یک تابع را «برد» تابع می‌نامند.

دامنه‌ی تابع مورد بحث در فعالیت قبل مجموعه A = {۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲} و برد آن مجموعه B = {۳۷, ۳۸, ۴۰} می‌باشد.

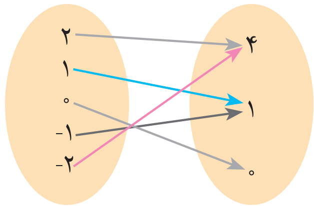
۱- دامنه و برد رابطه‌های زیر را که به شکل‌های مختلفی ارائه شده‌اند به‌دست آورید. در هر مورد تابع بودن رابطه‌ی داده شده را نیز بررسی‌کنید.

الف) {(۲,۳) , (−۳,۵) , (۲,۷)}

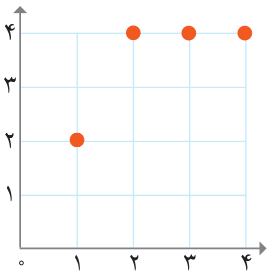
ب)

متوازی الاضلاع	مستطیل	مربع	مثلث	چند ضلعی
۳۶۰	۳۶۰	۳۶۰	۱۸۰	مجموع زوایای داخلی(درجه)

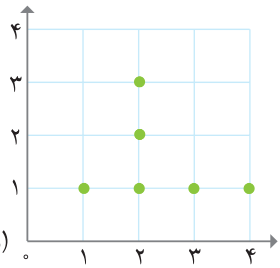
ج)



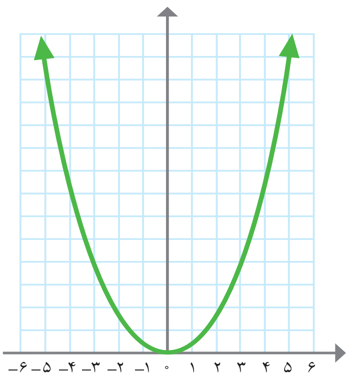
د)



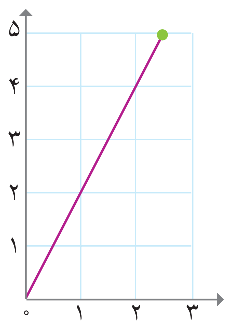
هـ)



و)



ز)



۲- تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنه‌ی آن تنها شامل دو عضو باشد.

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

ج) دامنه‌ی آن تنها یک عضو داشته باشد.

د) دامنه‌ی آن نامتناهی باشد ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

هـ) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

توابع خطی

نام‌گذاری توابع

همان‌گونه که مجموعه‌ها، بردارها، خطوط و بسیاری از مفاهیم ریاضی را نام‌گذاری می‌نماییم، برای رابطه‌ها و توابع نیز می‌توان نام‌هایی را انتخاب کرد. معمولاً رابطه‌ها را با حروفی مانند R و S و T و ... و توابع را با حروفی مانند f و g و h و ... نام‌گذاری می‌کنیم[۱]. به طور مثال :

$$R=\{(۱,۲)\ ,\ (۳,۵)\ ,\ (۱,۷)\}$$

$$S=\{(۰,-۲)\ ,\ (۴,۷)\}$$

R و S دو رابطه هستند. رابطه‌ی S تابع نیز هست ولی رابطه‌ی R تابع نیست.

همچنین f و g که به صورت زیر تعریف شده‌اند، دو تابع هستند :

$$f=\{(\frac{۱}{۲}\ ,\ -۳)\ ,\ (۴\ ,\ ۵)\ ,\ (۲\ ,\ ۲)\}$$

$$g=\{(۲\ ,\ ۵)\ ,\ (۳\ ,\ ۷)\ ,\ (۴,۹)\}$$

در سال گذشته در درس ریاضی ۱ با روابط خطی آشنا شده‌اید. رابطه‌ی بین بسیاری از پدیده‌ها، یک رابطه‌ی خطی است.

وقتی که آذرخش رخ می‌دهد، اندکی پس از دیدن نور آن، صدای آن را می‌شنویم. در جدول زیر زمان شنیده شدن صدای آذرخش پس از مشاهده نور آن و نیز فاصله‌ی ما، تا مکانی که آذرخش به وقوع پیوسته است، داده شده‌است. زمان را با t و مسافت را با h نمایش می‌دهیم.

t (ثانیه)	۰	۱	۲	$\frac{۵}{۲}$	۳	۴	۵	۶	۹	۱۲	...
h (کیلومتر)	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۵}{۶}$	۱	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	۲	۳	۴	...

الف) چه رابطه‌ای بین زمان و مسافت وجود دارد؟ این رابطه را با کلام خود توضیح دهید.

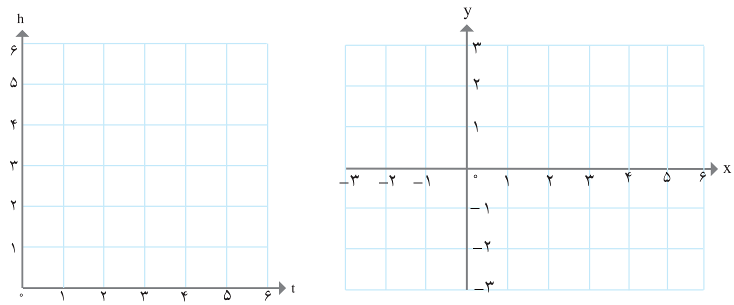
۱. R ابتدای کلمه انگلیسی Relation است که به معنی رابطه و f ابتدای کلمه function می‌باشد که به معنی تابع است.

ب) زمان‌های دیگری را مثال بزنید و فاصله‌ی (مسافت) متناظر را حساب کنید. به طور کلی به جای t چه اعدادی می‌توانیم قرار دهیم؟ آیا همه‌ی زمان‌های ممکن را می‌توان در جدول ارائه کرد؟

ج) به کمک آن چه که در ریاضی ۱ آموخته‌اید، معادله‌ی این رابطه را می‌توان به صورت $h=\frac{۱}{۳}t$ (یا $h=\frac{t}{۳}$) نمایش داد. نمودار این رابطه را در (شکل الف) رسم کنید و دامنه و برد آن را به‌دست آورید.

د) از بین نمایش‌هایی که می‌شناسید، کدام نمایش رابطه‌ی داده شده را بهتر توصیف می‌کند؟ همان گونه که دیده می‌شود، رابطه‌ی داده شده یک تابع است.

هـ) نمودار خط $y=\frac{۱}{۳}x$ را (در شکل ب) رسم کنید و آن را با نمودار رابطه‌ی $h=\frac{t}{۳}$ که در شکل الف رسم کرده‌اید، مقایسه کنید. چه شباهت‌ها و تفاوت‌هایی بین دو نمودار مشاهده می‌کنید.



(الف) (ب)

تفاوت مهم این دو رابطه در آن است که برای t مقدارهای منفی را نداریم درحالی که برای x مقادیر منفی را نیز در نظر گرفته‌ایم. به جز این نکته، اگر به جای t، x و به جای h، y را قراردهیم رابطه‌ی داده شده برای زمان و مسافت آذرخش یعنی $h=\frac{۱}{۳}t$ ، به معادله‌ی $y=\frac{۱}{۳}x$ تبدیل می‌شود.

این‌چنین توابعی را توابع خطی می‌نامیم.

هر تابع که بتوان آن را به شکل $y=ax+b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می شود.

هر دو نمودار الف و ب در فعالیت قبل توابعی را مشخص می‌کنند که با معادله‌ی $y=\frac{۱}{۳}x$ قابل

نمایش هستند، اما دامنه‌های این دو تابع و برد آن ها نیزمتفاوتند. دامنه و برد تابع آذرخش، مجموعه اعداد حقیقی نامنفی است، در حالی‌که دامنه و برد تابع دیگر مجموعه اعداد حقیقی است.

۱- یک شمع ۲۰ سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی‌متر می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در طی ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)						

نمودار این تابع را رسم کنید.

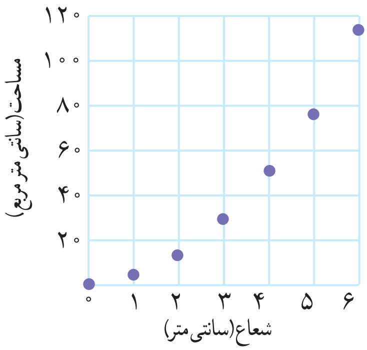
چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

۲- آیا خط $x = ۲$ را می‌توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ درمورد خط $y = ۵$ چه‌طور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

۳- معادله‌ای برای هر یک از توابع خطی داده شده با جدول‌های زیر بنویسید.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶

x	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
y	۶	۴	۲	۰	-۲	-۴



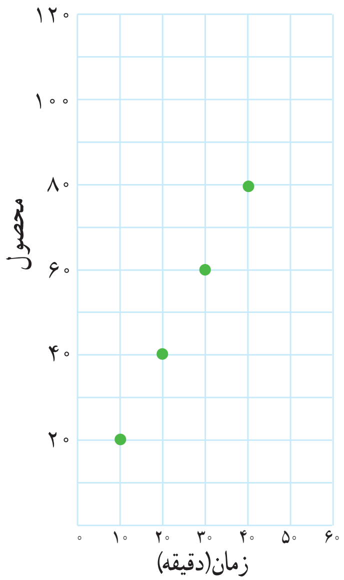
۱- نمودار مقابل رابطه‌ی بین شعاع و مساحت دایره را نشان می‌دهد.

درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های داده شده درمورد این نمودار را بررسی کنید.

الف) رابطه‌ی داده شده یک تابع است.

ب) رابطه‌ی داده شده یک تابع خطی است.

ج) با افزایش شعاع مساحت نیز افزایش پیدا می‌کند.



۲- نمودار مقابل تعداد تولید یک نوع اسباب بازی را در یک کارخانه در پایان فاصله‌های زمانی ۱۰ دقیقه نشان می‌دهد. پیش‌بینی شما برای تعداد اسباب‌بازی‌های تولید شده پس از یک ساعت چیست؟

الف) پس از پایان ۲۵ دقیقه مناسب‌ترین پیش‌بینی برای تعداد محصول چیست؟

ب) زمان‌های دیگری را مثال بزنید و تعداد محصول تولیدشده در پایان آن زمان را حدس بزنید.

ج) نمودار داده شده با نمودار چه خطی قابل مقایسه است؟ آیا می‌توانید رابطه‌ای ریاضی برای تعداد محصول تولیدی در هر دقیقه به‌دست آورید؟

د) توضیح دهید که چرا این نمودار تابعی را مشخص می‌کند.

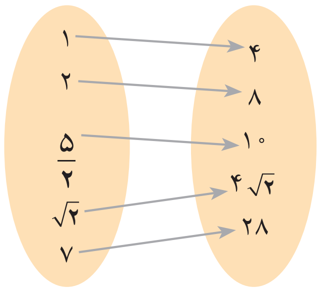
۳- سودی که از تولید یک کالا توسط یک شرکت حاصل می‌شود از معادله‌ی : $y=-۳۰۰+۶x$ به‌دست می‌آید. در این معادله، x تعداد کالای تولیدی و y سود حاصل برحسب تومان است.

الف) نمودار این خط را رسم کنید.

ب) سود این شرکت را وقتی که تعداد کالاهای تولید شده برابر ۱۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ است به‌دست آورید.

ج) محل برخورد خط $y=-۳۰۰+۶x$ با محور xها چه چیزی را نشان می‌دهد؟ این شرکت باید حداقل چه تعداد از این کالا تولید کند، تا سود دهی آغاز شود؟

وارون یک رابطه



رابطه‌ی بین طول ضلع یک مربع و محیط آن را در نظر می‌گیریم. طول ضلع یک مربع چه اعدادی می‌تواند باشد؟ برای پنج طول ضلع متفاوت، این رابطه به صورت نمودار ون نشان داده شده است :

دامنه‌ی رابطه‌ی بالا مجموعه‌ی

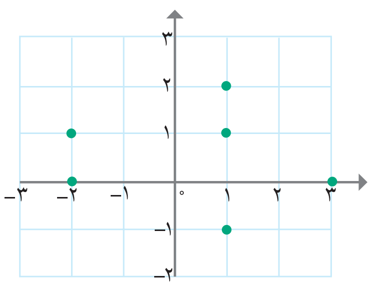
$$A=\{۱\ ,\ ۲,\ \frac{۵}{۲},\ \sqrt{۲}\ ,\ ۷\}$$

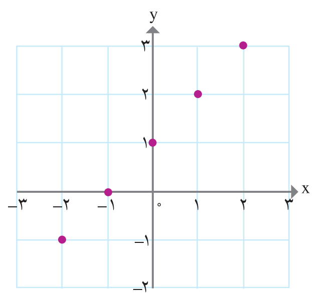
و برد آن مجموعه‌ی $B=\{۴\ ,\ ۸\ ,\ ۱۰\ ,\ ۴\sqrt{۲}\ ,\ ۲۸\}$ است. نمایش زوج مرتبی رابطه‌ی بالا عبارت است از : $R=\{(۱,۴)\ ,\ (۲,۸)\ ,(\frac{۵}{۲},۱۰)\ ,\ (\sqrt{۲},\ ۴\sqrt{۲})\ ,(۷,۲۸)\}$ اگر جای مؤلفه‌های اول و دوم را در هر یک از زوج‌های مرتب رابطه عوض کنیم، رابطه‌ای به‌دست می‌آید که به آن وارون رابطه داده شده می‌گویند و با نماد $R^{-۱}$ نمایش می‌دهند. بنابراین :

$$R^{-۱}=\{(۴,۱)\ ,(۸,۲),(۱۰,\frac{۵}{۲}),(۴\sqrt{۲},\ \sqrt{۲})\ ,(۲۸,۷)\}$$

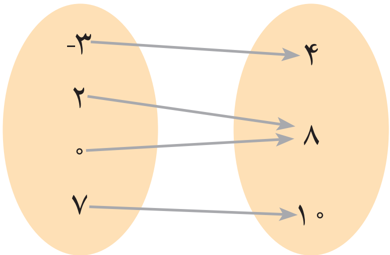
دامنه و برد $R^{-۱}$ به ترتیب با برد و دامنه‌ی R برابر است. همان‌طور که دیدید، وارون یک رابطه نیز، خود یک رابطه است.

هر یک از رابطه‌های زیر را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و سپس وارون آن را به‌دست آورید.





x	y
۱	۵
۲	۱۰
۳	۱۵
۴	۲۰
۵	۲۵



فعالیت

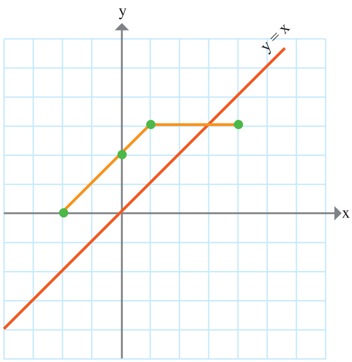
الف) وارون رابطه‌های داده شده در تمرین در کلاس قبل را با همان نمایش رابطه‌ی داده شده ارائه کنید.

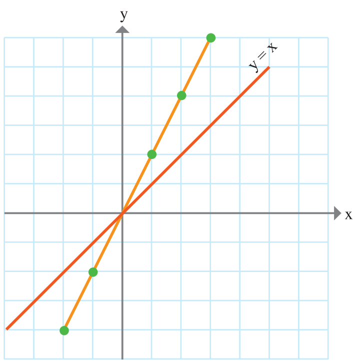
ب) در حالت کلی اگر یک رابطه به صورت نمودار ون یا جدول نمایش داده شده باشد، وارون آن چگونه به‌دست می‌آید؟

در حالتی که رابطه‌ای به صورت یک نمودار نمایش داده شده باشد، با پیدا کردن قرینه‌ی هر نقطه از نمودار نسبت به خط $y = x$ (یا همان نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم)، نمودار وارون آن رابطه به‌دست می آید.

مسائل

۱- در شکل‌های زیر نمودار دو رابطه و خط $y = x$ رسم شده‌اند. به کمک نقاط مشخص شده، نمودار وارون این رابطه‌ها را رسم کنید. کدام‌یک از این رابطه‌ها و وارون آن هر دو تابع هستند؟





۲– الف) کدام‌یک از رابطه‌های داده شده در تمرین در کلاس، تابع هستند؟
ب) کدام‌یک از رابطه‌های تمرین در کلاس و وارون آن، هر دو تابع هستند؟
ج) اگر رابطه‌ای تابع باشد، آیا وارون آن رابطه هم تابع است؟

۳– وارون کدام‌یک از توابع مقابل، خود یک تابع است؟

$$f=\{(0,2),(1,5),(4,\frac{1}{2})\}$$

$$g=\{(7,2),(5,2)\}$$

همان‌طور که مشاهده کردید وارون هر رابطه، خود یک رابطه است. اما اگر رابطه‌ای تابع باشد، وارون آن رابطه لزوماً یک تابع نمی‌باشد.

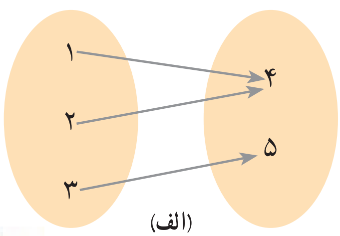
اگر وارون تابعی مانند f ،خود نیز یک تابع باشد، آن را «تابع وارون» f می‌نامیم (تابع معکوس) . در این صورت f را وارون پذیر (معکوس پذیر) می‌نامند. تابع وارون f را با نماد f^{-1} نمایش می‌دهیم.

توابع یک به یک

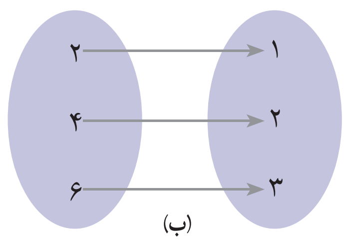
سؤال اساسی این‌است که چه توابعی وارون‌پذیرند؟ یعنی یک تابع باید چه شرطی داشته باشد تا وارون آن هم یک تابع باشد. واضح است که همه توابع چنین خاصیتی ندارند. به عبارت دیگر باید دنبال رابطه‌هایی بگردیم که علاوه بر تابع بودن، دارای ویژگی یا ویژگی‌های دیگری نیز باشند.

فعالیت

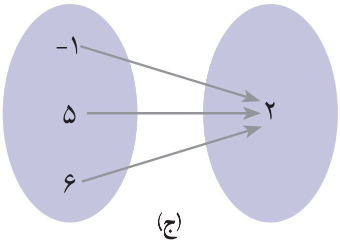
در ادامه تعدادی تابع به صورت نمودار ون داده شده‌اند.
الف) وارون کدام‌یک از آن‌ها تابع است؟
ب) ویژگی مشترک آن‌هایی که وارونشان نیز تابع است، چیست؟



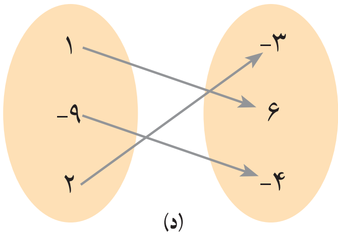
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

وارون هر یک از توابع داده شده را می‌توان (با عوض کردن جهت پیکان‌ها در نمودارهای ون) به‌دست آورد. همان‌گونه که دیدید، فقط وارون توابع داده شده در (ب) و (د) نیز، خود تابع می‌باشند و وارون توابع داده شده در (الف) و (ج) تابع نمی‌باشند (چرا؟).

در توابع (الف) و (ج) حداقل به عضوی از مجموعه‌ی دوم بیش از یک پیکان وارد شده است. این موضوع درباره‌ی توابع (ب) و (د) اتفاق نمی‌افتد. این ویژگی مشترک توابع(ب) و (د) است. یعنی در این توابع به هر عضو مجموعه‌ی دوم بیش از یک پیکان وارد نشده‌است. به چنین توابعی، توابع یک به یک می‌گویند.

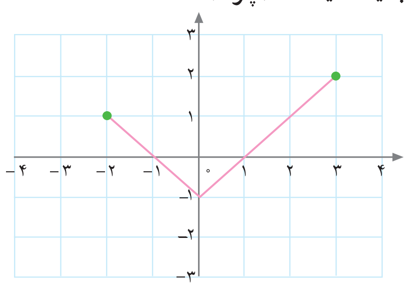
تابعی که بین دو مجموعه تعریف می‌شود، هنگامی یک به یک است که به هر عضو مجموعه‌ی دوم بیش از یک عضو از مجموعه‌ی اول نظیر نشود.

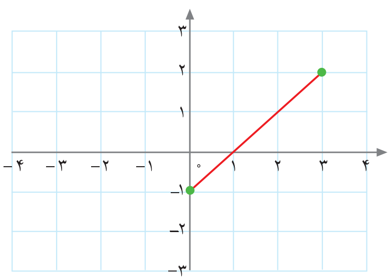
در این‌جا (الف) و (ج) توابعی یک به یک نمی‌باشند در حالی که (ب) و (د) توابعی یک به یک هستند. بنابراین :

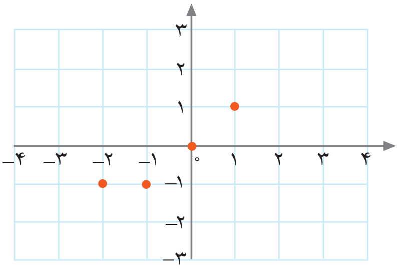
یک تابع در صورتی وارون‌پذیر است (یعنی وارون آن تابع است) که یک به یک باشد.

مثال

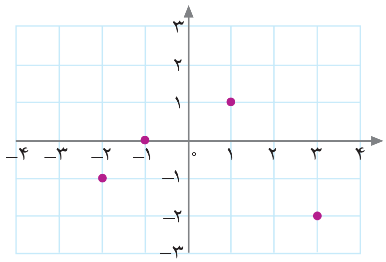
توابع داده شده در (الف) و (د) یک به یک هستند، در حالی که توابع داده شده در (ب) و(ج) یک به یک نیستند (چرا؟).


ب)


الف)



ج)



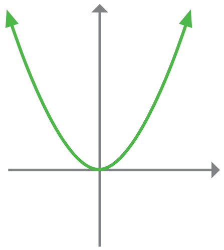
د)

الف) در حالت کلی روشی برای بررسی یک به یک بودن یک تابع با استفاده از نمودار آن ارائه کنید. از خطوطی که به موازات محور xها رسم می‌شوند، استفاده کنید.

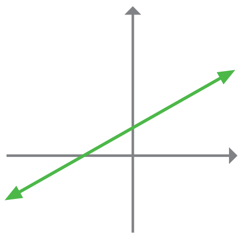
ب) نمودار تابع مربوط به سوختن شمع را به خاطر آورید. آیا این تابع یک به یک است؟ چگونه از روی نمودار تابع می‌توان به این موضوع پی برد. آیا تابع مربوط به مسیر پرواز پرنده یک به یک است؟

به طور کلی می‌توان گفت که یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور xها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

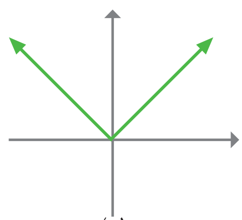
۱ــ کدام‌یک از توابع داده شده یک به یک هستند؟



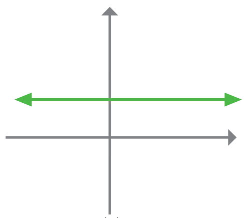
(الف)



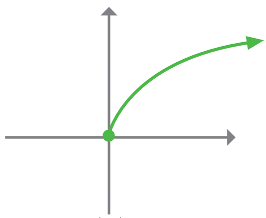
(ب)



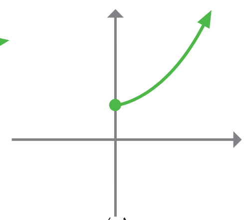
(ج)



(د)



(هـ)



(و)

ز) $f=\{(۱,۱),(-۱,۱),(۲,۴),(-۲,۴)\}$

ح) $g=\{(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}),(۰,۱),(۲,۳)\}$

۲ــ تابع زیر را در نظر می‌گیریم :

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶

الف) آیا این تابع یک به یک است؟ معادله‌ای برای آن بنویسید.
ب) وارون این تابع را به‌دست آورید. معادله‌ای برای وارون آن بنویسید.
پ) نمودار تابع و نمودار وارون آن را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۳ــ در تمرین ۱ کدام‌یک از توابع وارون‌پذیرند؟ نمودار تابع وارون را برای آن‌ها (در همان شکل) رسم کنید.

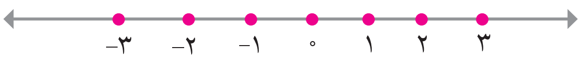
۴ــ فرض کنید به اعضای یک کلاس کد ملی آن‌ها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطه‌ی بین افراد و کد ملی آن‌ها تابعی یک به یک را معلوم می‌کند.

بازه (فاصله)

مجموعه‌ی همه‌ی اعداد صحیح بین ۳- و ۳ به همراه خود این اعداد را می‌توان در مجموعه‌ای مانند A به شکل زیر نمایش داد :

$$A=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$$

نمایش هندسی مجموعه‌ی A به صورت زیر است :



حال اگر مجموعه‌ی همه‌ی اعداد گویا وگنگ بین ۳ - و ۳، یعنی همه‌ی اعداد حقیقی بین دو عدد ۳- و ۳ به همراه خود این دو عدد را در نظر بگیریم، می‌توانیم آن را به‌صورت زیر نمایش دهیم :

$$B=\{x \mid x\in\mathbb{R},-۳\le x\le ۳\}$$

نمایش هندسی مجموعه‌ی B به‌صورت زیر است :

در این‌گونه موارد برای سادگی از نماد دیگری به‌نام «بازه» یا فاصله استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم :

$$B=\{x \mid x\in\mathbb{R}, -۳\le x\le ۳\}=[-۳,۳]$$

$[-۳,۳]$ را بازه‌ی بسته از ۳- تا ۳ می‌خوانند و اعداد ۳- و ۳ را نقاط انتهایی بازه می‌نامند.
اگر به‌طور مثال از مجموعه‌ی B ، نقطه‌ی انتهایی ۳ را حذف کنیم ومجموعه‌ی به‌دست آمده را C بنامیم، داریم :

$$C=\{x \mid x\in\mathbb{R}, -۳\le x< ۳\}$$

مجموعه‌ی C را می‌توان با نماد $[-۳,۳)$ نمایش داد. در نمایش هندسی مجموعه‌ی C ، نقطه‌ی ۳ روی محور را تو خالی باقی می‌گذاریم.

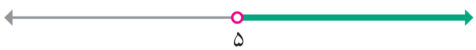
معمولاً بازه‌ی $[-۳,۳)$ را بازه‌ی «نیم باز» می‌نامند.

۱- به نظر شما تفاوت بازه‌های $(-۳,۳]$ و $(-۳,۳)$ در چیست؟ این بازه‌ها را به صورت مجموعه نمایش دهید.
همچنین نمایش هندسی این بازه‌ها را ارایه کنید . بازه‌ی $(-۳,۳)$ را یک بازه‌ی «باز» می‌نامیم.

اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۵ را در نظر می‌گیریم و آن‌را با F نمایش می‌دهیم :

$$F=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x>۵\}$$

نمایش هندسی F در شکل زیر ارایه شده است :

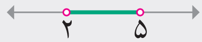
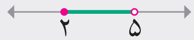


نمایش این مجموعه با نماد بازه به صورت $F=(۵,+\infty)$ است.

توجه داریم که $+\infty$ (بخوانید مثبتِ بی‌نهایت) یک نماد است و یک عدد حقیقی نیست. به طریق مشابه نماد $-\infty$ را نیز می‌توان به کار برد.

بازه‌ی $(۵,+\infty)$ را نیز یک بازه‌ی «باز» می‌نامند و به طریق مشابه بازه‌ی $[۵,+\infty)$ را یک بازه‌ی نیم باز می‌نامند.

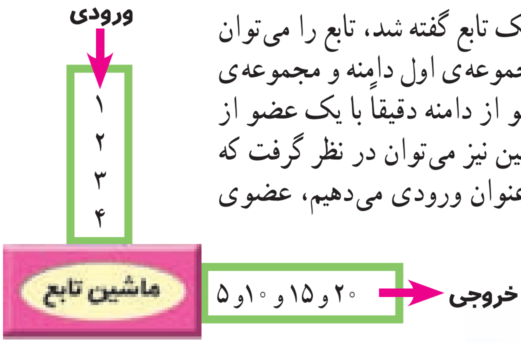
۲- جدول زیر را کامل کنید.

نمایش هندسی	نمایش به صورت مجموعه	نمایش با نماد بازه	نوع بازه
	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, ۲ < x < ۵\}$	$(۲,۵)$	باز
...	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, ۲ \leq x \leq ۵\}$	...	...
	...	...	نیم باز
...	...	$(۲,۵]$	...
	...	...	...
...	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq ۲\}$	...	...
...	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < ۵\}$	...	...
...	...	$(-\infty\ ,\ ۵]$	...
...	...	$[۰\ ,\ +\infty)$	...
...	...	$(-\infty\ ,\ ۰)$	...
...	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > ۰\}$	...	...
...	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq ۰\}$	...	...
...	...	$(-\infty\ ,\ +\infty)$	...

آخرین سطر نمایانگر مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. چهار سطر ماقبل آخرین سطر چه مجموعه‌هایی را نمایش می‌دهند؟

۲- اگر a, b دوعدد حقیقی باشند و $a < b$ ، جدول فوق (به جز پنج سطر آخر) را با a, b تکرار کنید.

مقدار تابع در یک نقطه – نمایش جبری تابع



با توجه به آن‌چه که درمورد دامنه و برد یک تابع گفته شد، تابع را می‌توان تناظری بین دو مجموعه در نظر گرفت که مجموعه‌ی اول دامِنه و مجموعه‌ی دوم برد نامیده می‌شود، به قسمی که هر عضو از دامنه دقیقاً با یک عضو از برد نظیر می‌شود. تابع را به عنوان یک ماشین نیز می‌توان در نظر گرفت که هنگامی که یک عضو از دامنه را به آن به عنوان ورودی می‌دهیم، عضوی (منحصربفرد) از برد را به عنوان خروجی به ما می‌دهد.

مثال

۱– تابع $f=\{(۱,۵),(۲,۱۰),(۳,۱۵),(۴,۲۰)\}$ را در نظر می‌گیریم. دامنه‌ی این تابع $\{۱,۲,۳,۴\}$ و برد آن $\{۵,۱۰,۱۵,۲۰\}$ است. ورودی‌های تابع f عبارتند از ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و خروجی‌ها ۵ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۰ هستند. به عبارت دقیق‌تر عضو ۱ از دامنه به عضوِ ۵ از برد نظیر می‌شود. به جای این عبارت، می‌توان با یک قرار داد، کار را ساده‌تر کرد. معمولاً می‌نویسند $f(۱)=۵$ و گفته می‌شود که مقدار تابع f در نقطه‌ی ۱ برابر ۵ است. بنابراین $f(۲)=۱۰$ به این معنی است که عدد ۲ توسط تابع f به ۱۰ نظیر می‌شود، یا این‌که مقدار تابع f در نقطه‌ی ۲ برابر ۱۰ است. به همین ترتیب می‌توان نوشت: $f(۳)=۱۵$ و $f(۴)=۲۰$. این گونه نمایش تابع را در جدول زیر می‌توان خلاصه کرد که جدولی آشنا به حساب می‌آید:

x	۱	۲	۳	۴
f(x)	۵	۱۰	۱۵	۲۰

رابطه‌ی بین دامنه و برد را می‌توان به صورت یک رابطه‌ی ریاضی به شکل $f(x)=۵x$ نوشت.

۲– اگر تابع g به صورت مقابل داده شده باشد: $g=\{(۳,۲),(-۷,۰),(۵,۲)\}$

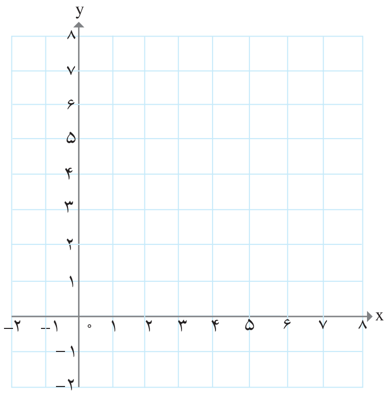
می‌توان نوشت: $g(۳)=۲\,,\ g(-۷)=۰\,,\ g(۵)=۲$

x	۳	-۷	۵
g(x)	۲	۰	۲

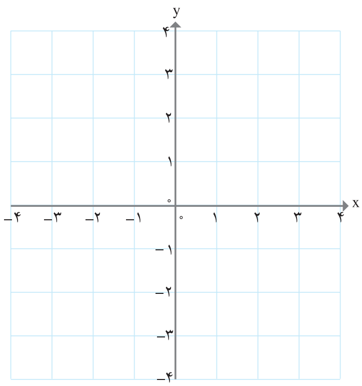
فعالیت

جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی که در جدول، توصیف شده‌اند را رسم کنید.

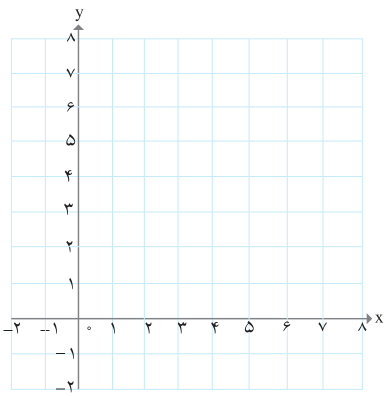
تابع	(د) $y = ۲x$	(ج) $h(x) = ۲x$	(ب) $g(x) = ۲x$	(الف) $f(x) = ۲x$
دامنه	مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی	$[۲ , ۳]$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی	$\{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$
برد	؟	؟	مجموعه‌ی اعداد حقیقی	؟



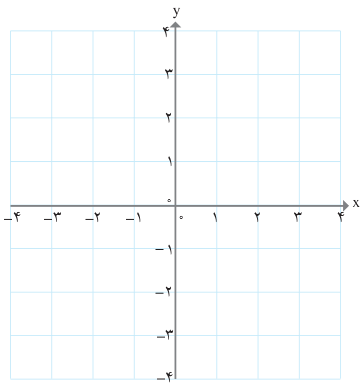
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

گاهی اوقات یک تابع را می‌توان بر حسب یک عبارت جبری از یک متغیر نمایش داد. این گونه نمایش تابع را نمایش جبری یا ضابطه‌ی تابع می‌نامند.

۳– همه‌ی نمایش‌های زیر جبری به حساب می‌آیند.

$$f(x)=\frac{۲}{۵}x-۳ \qquad g(x)=x^{۲} \qquad h(x)=\frac{(x+۱)}{(x+۲)} \qquad k(x)=\sqrt{x}$$

همان گونه که در فعالیت قبل مشاهده کردید، در هنگام نمایش جبری تابع نه تنها عبارت جبری که تابع را نمایش می‌دهد مهم است، بلکه دامنه و برد تابع نیز مهم است. هرچند همه توابع را نمی‌توان با یک عبارت جبری نمایش داد، با این حال تعداد زیادی از آن‌ها با یک عبارت جبری قابل نمایش هستند. در بسیاری از موقعیت‌ها کار با نمایش جبری یک تابع ساده‌تر و مناسب‌تر از کار با دیگر نمایش‌های تابع است. به طور مثال درمورد تابع (خط) $f(x)=۲x$ از نمایش تابع به صورت مجموعه زوج‌های مرتب کم‌تر استفاده می‌شود. البته به جای معادله‌ی $y=۲x$ می‌توانیم از $f(x)=۲x$ استفاده کنیم. در مثال سوختن شمع معادله‌ی تابع را می‌توان به صورت $f(x)=-۴x+۲۰$ یا $y=-۴x+۲۰$ نوشت. همچنین توابع داده شده در مثال ۳ را به صورت زیر نیز نمایش می‌دهیم:

$$y=\frac{۲}{۵}x-۳ \qquad y=x^{۲} \qquad y=\frac{(x+۱)}{(x+۲)} \qquad y=\sqrt{x}$$

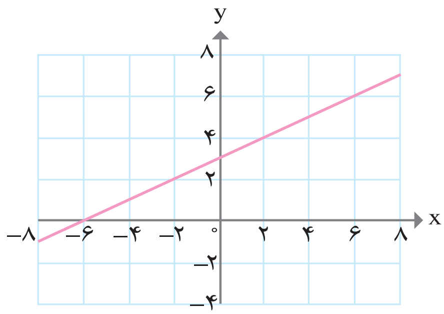
مسئله

۱– اگر تابع f با معادله‌ی $f(x)=۲x-۵$ داده شده باشد، مطلوب‌است:

الف) رسم نمودار تابع f

ب) $f(۲)$, $f(۳)$, $f(۰)$, $f(-۷)$, $f(\frac{۵}{۲})$, $f(\sqrt{۷})$

۲– نمایش جبری تابع صفحه‌ی بعد را که نمودار آن ارائه شده است به‌دست آورید.
از بین نمایش‌های مختلفی که برای نمایش این تابع می‌شناسید، کدام‌یک را مناسب‌تر می‌دانید؟



۳– جدول زیر دمای سنگ‌های زیرزمین را در عمق‌های متفاوت زیر سطح زمین نشان می‌دهد :

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی‌گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به‌دست می‌دهد و نمودار آن را رسم کنید.
ب) معادله‌ای برای این تابع به‌دست آورید.
ج) دمای یک سنگ که در عمق ۱۰ کیلومتری زیرزمین است را بیابید.

۴– تابع $f(x) = -۳$ را رسم کنید و مقادیر $f(۲)$ و $f(۱۰۰)$ و $f(-۵)$ را به‌دست آورید.

۵– برای یک تابع خطی می‌دانیم که : $f(۲) = ۱۱$ و $f(۰) = ۷$

نمودار این تابع را رسم کنید و معادله‌ی آن (نمایش جبری تابع) را بنویسید.

چرا این تابع وارون‌پذیر است؟ رابطه‌ای ریاضی برای وارون این تابع به‌دست آورید.

۶– آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

۷– علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت ۰/۲ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی که علی در t دقیقه طی می‌کند را با f(t) نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به‌دست می‌دهد؟

الف) $f(t) = t - ۰/۲$ ب) $f(t) = ۰/۲t$

ج) $f(t) = t + ۰/۲$ د) $f(t) = ۰/۲ - t$

۸– اگر در مورد تابع g داشته باشیم: $g(۰) = ۲ , g(۱) = ۵ , g(-۲) = \frac{۱}{۳} , g(۴) = ۳$

g را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. آیا g یک به یک است؟

۹– نمایش جبری تابع زیر را به‌دست آورید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۴	۶
f(x)	۱۳	۱۱	۹	۷	۱	-۳

آیا این تابع یک به یک است؟

۱۰– برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطه‌ی $F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲$ به یک‌دیگر وابسته هستند.

الف) ۲۰– درجه‌ی سانتی‌گراد برحسب فارنهایت چه‌قدر می‌شود؟

ب) ۱۰۴ درجه‌ی فارنهایت چند سانتی‌گراد است؟

ج) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت به‌دست دهد.

د) آیا رابطه‌ی بین این دو واحد یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟

۱۱– طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

۱۲– آیا تابعی یک به یک می‌توان یافت که دامنه‌ی آن شامل سه عضو و برد آن تنها از دو عضو تشکیل شده باشد؟

۱۳- اگر $h(x) = ۲x + ۱$ در هر یک از حالت‌های زیر نمودار $h(x)$ را رسم کنید.

الف) دامنه‌ی h برابر مجموعه‌ی $A = \{-۵ , ۲ , ۱ , ۰\}$ باشد.

ب) دامنه‌ی h برابر مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت باشد.

پ) دامنه‌ی h برابر همه‌ی اعداد حقیقی باشد.

۱۴- در یک تابع خطی که نمودار آن از مبدأ مختصات می‌گذرد، داریم: $f(۳)=۱۵$، رابطه‌ای ریاضی برای وارون این تابع به‌دست آورید.