

خطها و دایره‌های مماس

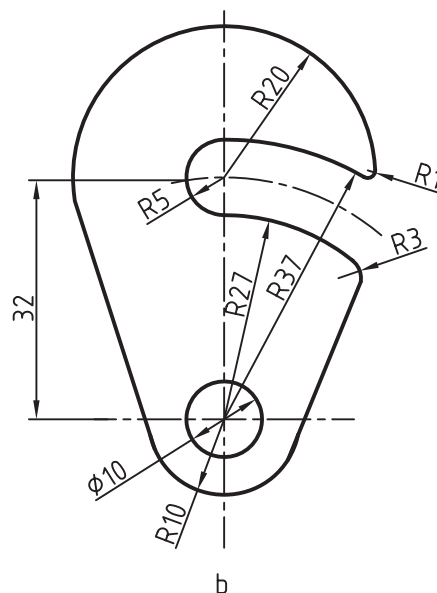
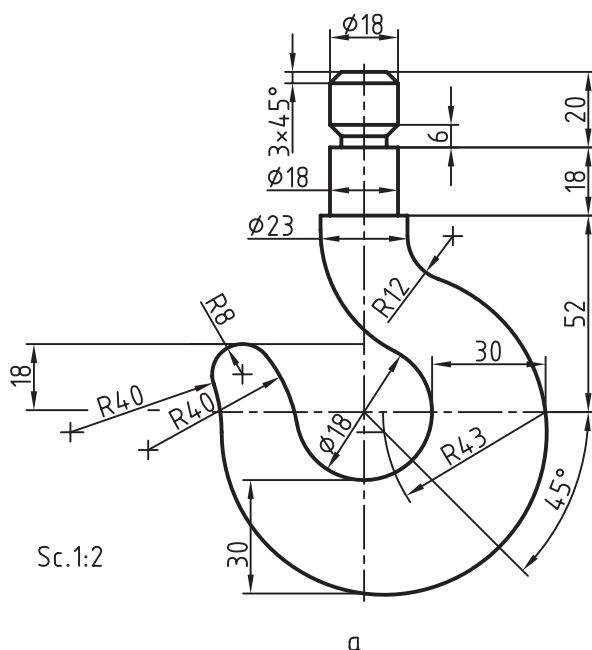
هدف‌های رفتاری : فراگیر پس از پایان این درس می‌تواند :

- ۱- هدف از بحث مماس ها را شرح دهد.
- ۲- دایره را در شرایط مختلف بر دو خط مماس کند.
- ۳- دایره را در شرایط مختلف بر خط و دایره مماس کند.
- ۴- دایره را در شرایط مختلف بر دو دایره مماس کند.

دارد. زیرا برای رسم بسیاری از شکل‌ها ناگزیریم خط‌ها و کمان‌های مختلف را برهم مماس کنیم.

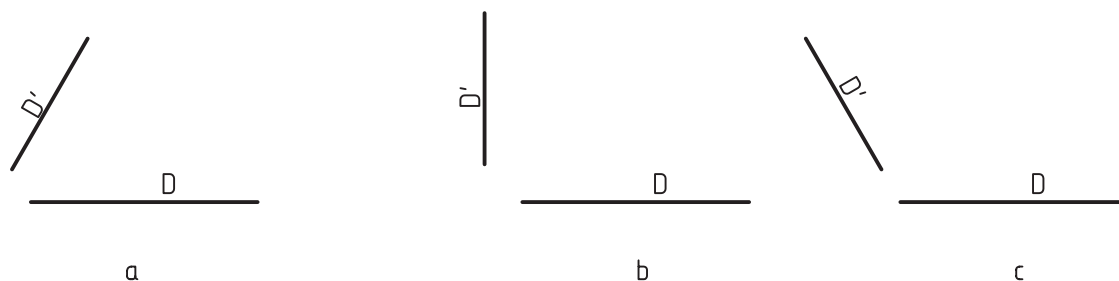
۱-۶۔ مماس ھا

بخش مهمی از رسم‌های هندسی به مماس‌ها اختصاص



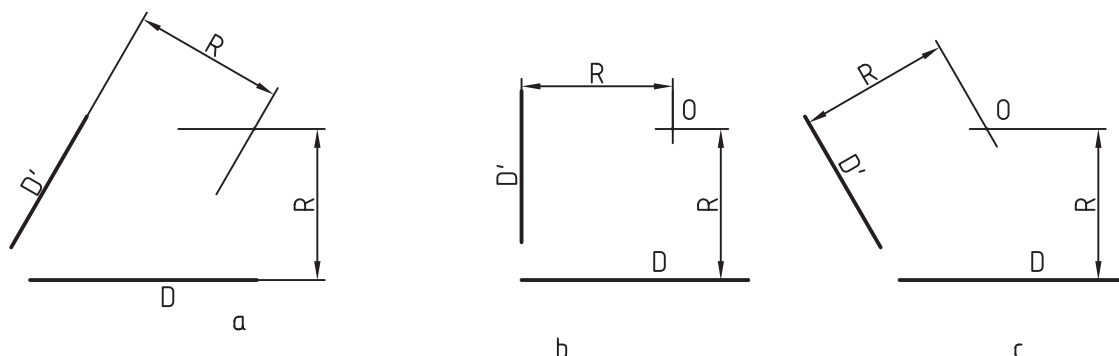
شکل ۱-۶- نمونه‌هایی از رسم مماس‌ها
a قلاب فولادی، b بست فولادی (ضامن)

با حل چند مسئله‌ی مقدماتی، این موضوع را بررسی می‌کنیم.
 مسئله‌ی ۱- دایره‌ای با شعاع معلوم R را بر دو خط معین مماس کنید (شکل ۶-۲).



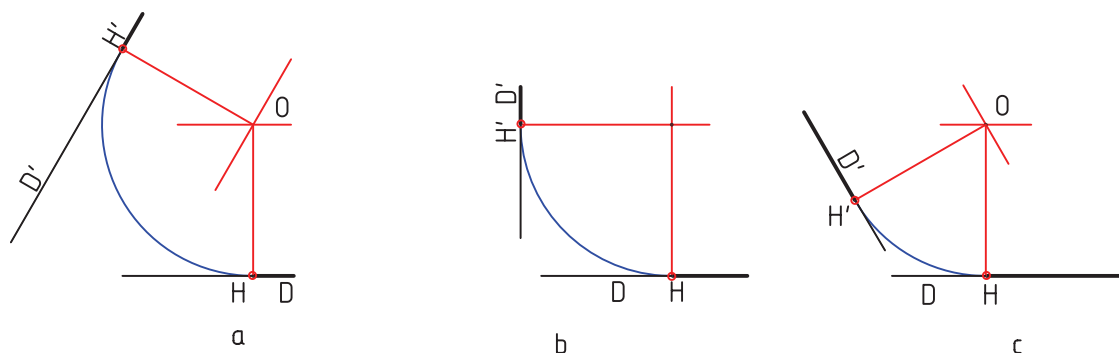
شکل ۶-۲- حالت‌هایی از دو خط در صفحه

روش کار دارند. روش حل مسئله در هر سه حالت یکی است. به شکل دیده می‌شود که دو خط D و D' نسبت به هم، سه حالت ۶-۳ توجه کنید.



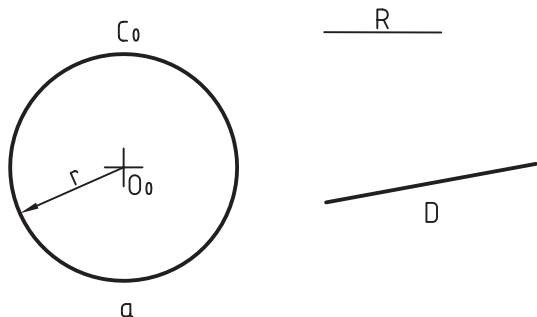
شکل ۶-۳- تعیین مرکز

— خطی به موازات D و به فاصله‌ی R از آن رسم شد.
 — خطی به موازات D' و به فاصله‌ی R از آن رسم شد.
 برای معین شدن نقطه‌های دقیق تماس، باید از O عمودهایی بر دو خط رسم کنیم. H و H' پای عمودهاست.



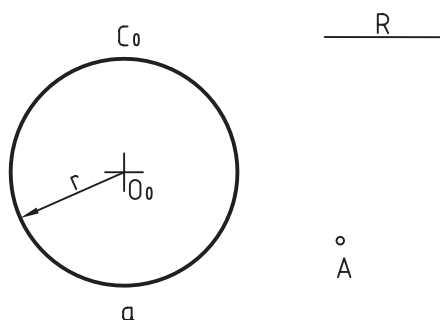
شکل ۶-۴- رسم کمان مماس بر دو خط

مسئله‌ی ۲- کمانی با شعاع معلوم R را بر خط D و دایره‌ی معلوم C_0 مماس کنید (شکل ۵-۶).
 روش کار
 - کمانی به شعاع $R+r$ و به مرکز O زدیم.
 - به مرکز O و به شعاع R کمان موردنظر رسم شد. H و H' نقطه‌های دقیق تماس هستند.



شکل ۵-۶- کمان مماس بر یک خط و یک دایره

مسئله‌ی ۳- دایره‌ای با شعاع معلوم R رسم کنید که از نقطه‌ی A بگذرد و بر دایره‌ی C_0 مماس شود (شکل ۶-۶).
 روش کار
 - به مرکز A کمانی با شعاع R زدیم.
 - به مرکز O_0 دایره‌ای با شعاع $R+r$ زدیم. نقطه‌ی O مرکز دایره است. در شکل، نقطه‌ی دقیق تماس یعنی H مشخص شده است.



شکل ۶-۶- رسم کمان گذرنده از A و مماس بر دایره

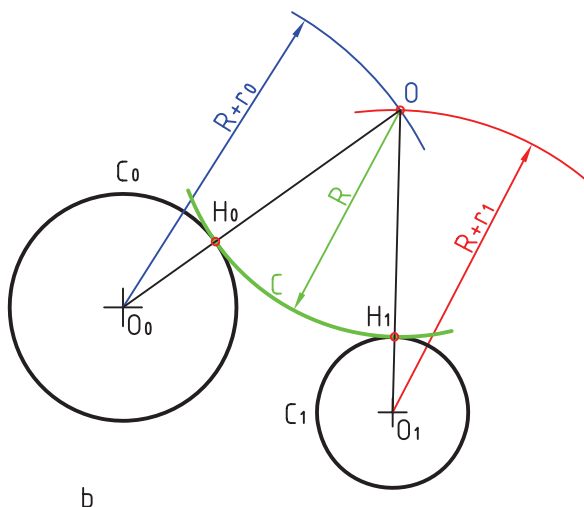
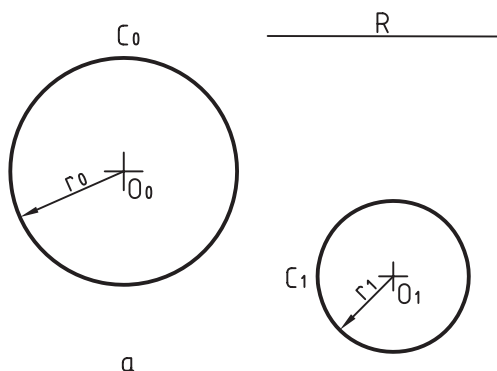
روش کار

- به مرکز O کمانی با شعاع $R+r$ زدیم.
 - به مرکز O_1 کمانی با شعاع $R+r_1$ زدیم، O معین شد.
 H_1 و H_2 هم نقطه‌های دقیق تماس هستند.

مسئله‌ی ۴- دایره‌ای با شعاع معلوم R بر دو دایره‌ی C_0 و C_1 مماس کنید.

مسئله را در سه حالت بررسی می‌کنیم:

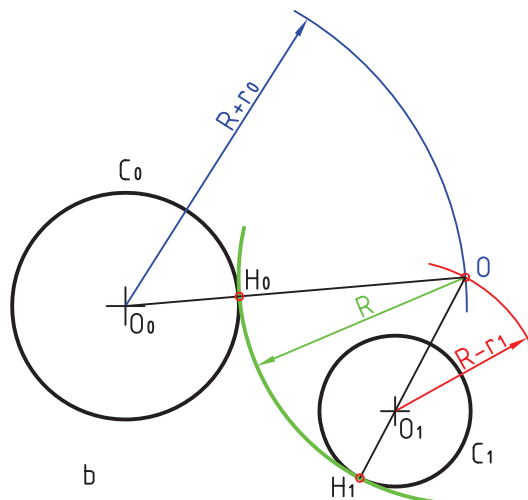
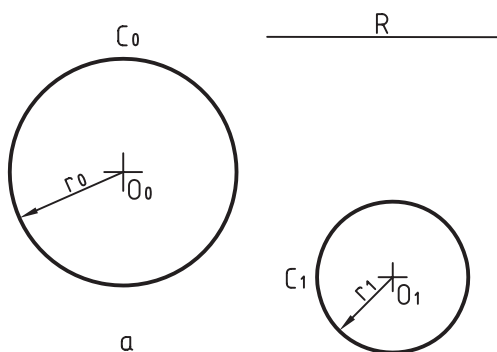
الف - دایره با شعاع R مماس خارجی بر دو دایره است (شکل ۷-۶).



شکل ۶-۷- رسم کمان مماس بر دو دایره در بیرون

– به شعاع $R-r_1$ کمانی زدیم، مرکز دایره به شعاع R به دست آمد. در شکل، H_0 و H_1 ، نقطه‌های تماس هستند. آن‌ها به ترتیب واقع بر $\overline{OO_0}$ و $\overline{OO_1}$ هستند.

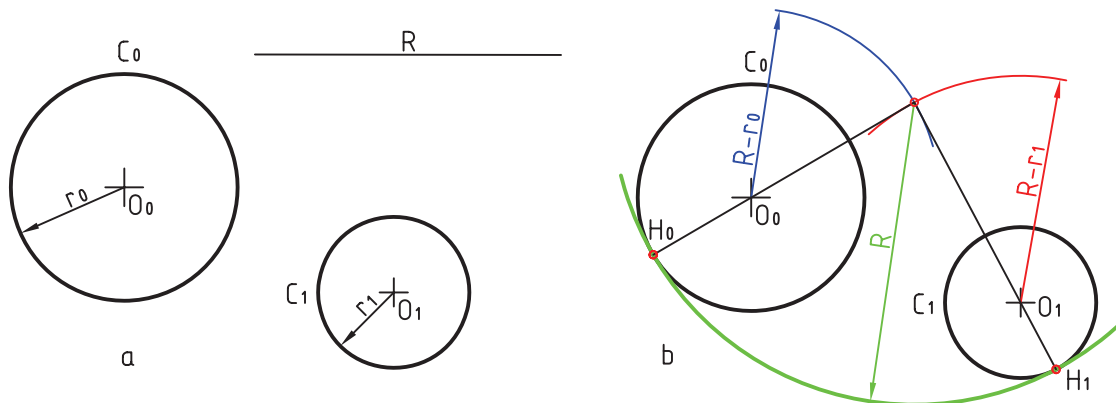
ب – دایره‌ای با شعاع R مماس خارجی بر C_0 و مماس داخلی بر C_1 رسم کنید (شکل ۶-۸).
روشن کار
– به شعاع $R+r_0$ کمانی زدیم.



شکل ۶-۸- رسم دایره‌ی مماس خارج و داخل

– کمانی با شعاع $R-r_1$ و به مرکز O_1 زدیم. نقطه‌ی O مشخص شد. نقطه‌های تماس؛ یعنی H_0 و H_1 هم تعیین شده‌اند.

پ – دایره‌ای با شعاع معلوم R مماس داخلی بر دو دایره‌ی C_0 و C_1 رسم کنید (شکل ۶-۹).
روشن کار
– کمانی با شعاع $R-r_0$ و به مرکز O_0 زدیم.



شکل ۹-۶- رسم دایره مماس داخلی

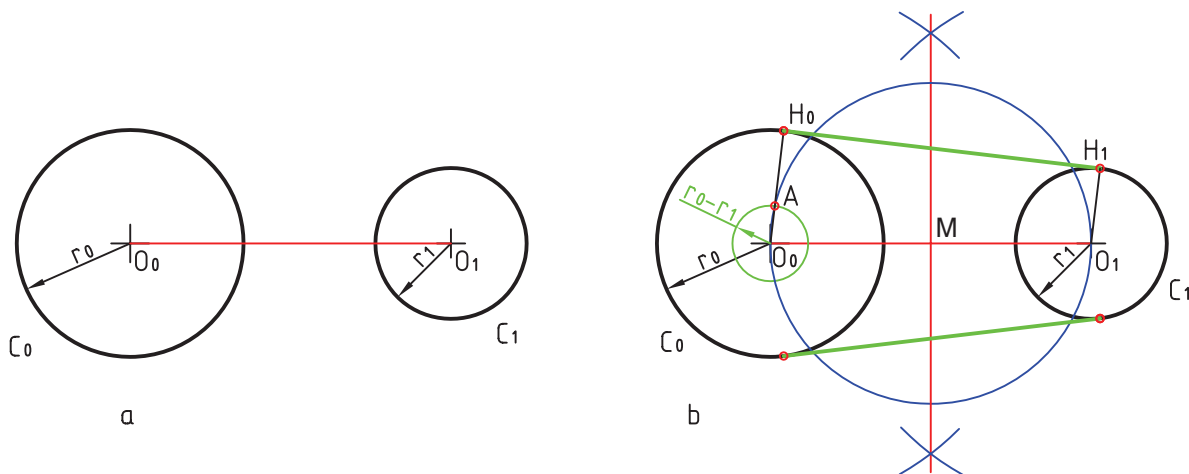
– به مرکز M و به قطر O_0O_1 دایره زدیم.
 – دایره‌ای به مرکز O_0 و به شعاع $r_0 - r_1$ زدیم، مشخص
 شد.
 – از O_0 به A وصل کردیم و امتداد دادیم. H_0 به دست
 آمد.

– از O_1 موازی با O_0H_0 رسم کردیم، H_1 به دست آمد.
 – H_0 را به H_1 وصل می‌کنیم.

مسئله ۵ – خطی بر دو دایره C_0 و C_1 مماس کنید.
 مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم.

الف – خط مماس خارجی بر دو دایره است (شکل ۱۰-۶).
 روش کار

– با رسم عمود منصف O_0O_1 ، نقطه‌ی M وسط O_0O_1 مشخص شد.



شکل ۱۰-۶- رسم مماس مشترک خارجی

ب – خطی مماس داخل و خارج بر دو دایره C_0 و C_1 آمد.

رسم کنید (شکل ۱۱-۶).

روش کار

– از O_0 به A وصل کردیم، H_0 مشخص شد.
 – از O_1 موازی با O_0A رسم کردیم، H_1 به دست آمد.
 – H_0 را به H_1 وصل کردیم.

– مانند مسئله‌ی قبل دایره به قطر O_0O_1 رسم شد.

– به مرکز O_0 کمانی به شعاع $r_0 + r_1$ زدیم تا A به دست



شکل ۱۱-۶- رسم مماس مشترک داخلی

خلاصه‌ی مطالب مهم

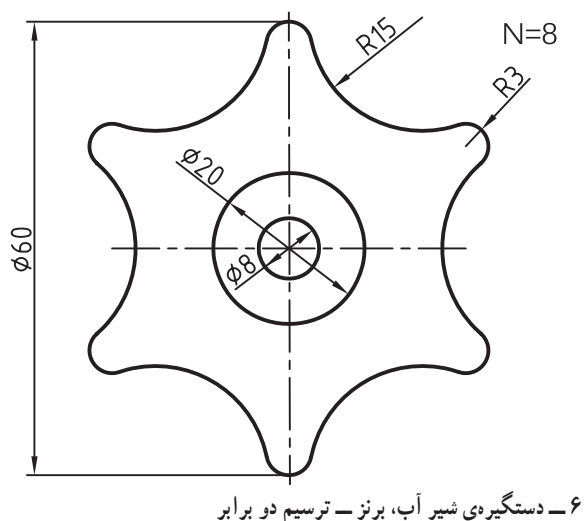
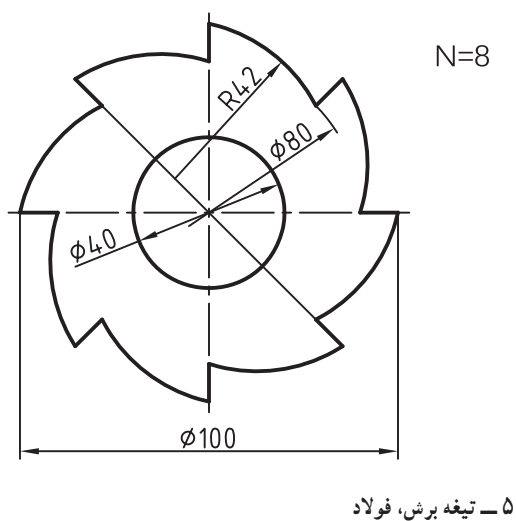
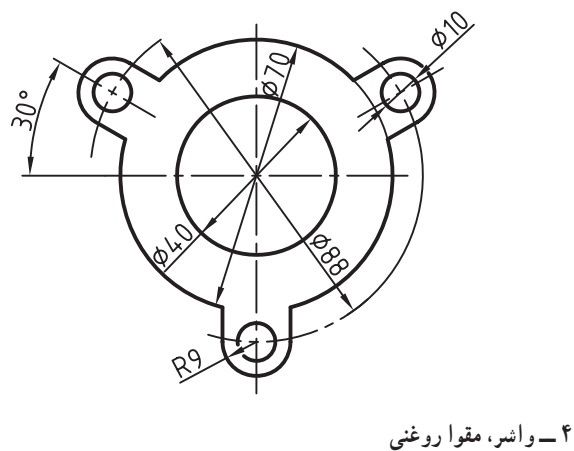
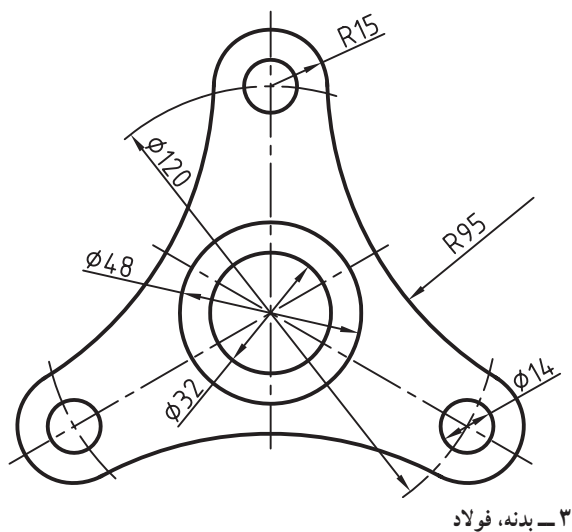
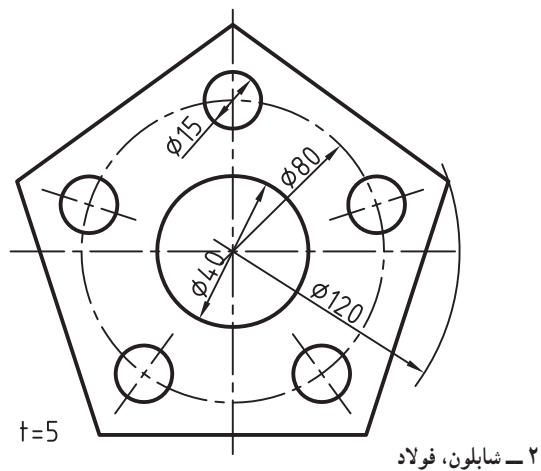
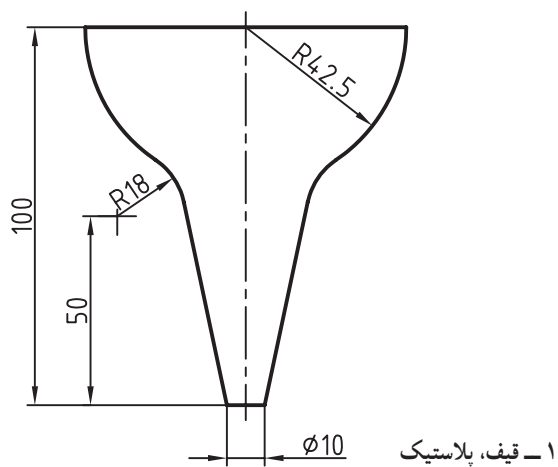
- ۱- مرکز کمان مماس بر دو خط، دارای فاصله‌ای مساوی از دو خط و برابر شعاع کمان است.
- ۲- یک کمان می‌تواند در حالت‌های مختلف بر دو دایره مماس شود.
- ۳- مماس مشترک دو دایره، خطی است که بر آن دو مماس شود.

خود را بیازمایید

- ۱- چگونگی رسم کماتی دایره‌ای، مماس بر دو خط معین، را شرح دهید.
- ۲- یک دایره، با شعاع R مماس بر یک دایره و گذرنده از نقطه‌ای معین، چگونه رسم می‌شود؟
- ۳- یک دایره، با شعاع R مماس بر یک خط و یک دایره، چگونه رسم می‌شود؟
- ۴- یک دایره در چند حالت می‌تواند بر دو دایره مماس شود؟
- ۵- چگونگی رسم دایره‌ی R مماس بر دو دایره را در حالت‌های مختلف شرح دهید.
- ۶- مماس مشترک دو دایره چیست؟
- ۷- مماس مشترک دو دایره، در حالات مختلف، چگونه رسم می‌شود؟

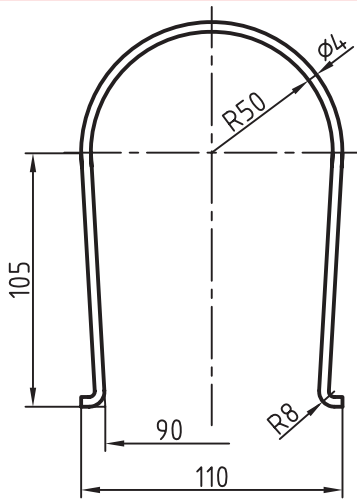
ارزش‌یابی عملی

- ۱- سه حالت رسم یک کمان مماس بر دو خط را رسم کنید. شعاع کمان را 2° در نظر بگیرید.
- ۲- دایره‌ای با شعاع 3° ، مماس بر دایره‌ای با شعاع 25° رسم کنید که از نقطه‌ی A بگذرد (فاصله‌ی A تا مرکز دایره به قطر 5° ، برابر 53°).
- ۳- خط دلخواهی رسم کنید. به فاصله‌ی 5° از آن، نقطه‌ی O را در نظر بگیرید. ابتدا دایره‌ای به مرکز O و به شعاع 23° رسم کنید. سپس دایره‌ای به شعاع 26° را بر آن‌ها مماس کنید.
- ۴- دو دایره به قطرهای 3° و 4° و به فاصله‌ی دو مرکز 5° رسم کنید. دایره‌ای به شعاع 46° را در سه حالت رسم کنید:
- مماس خارج، مماس داخل و خارج و مماس داخل بر آن‌ها.
- ۵- برای دو دایره، به قطرهای 34° و 47° و به فاصله‌ی دو مرکز 7° ، مماس‌های خارجی و نیز داخل و خارج را رسم کنید.
- ۶- موارد داده شده در شکل ۱۲-۶ را رسم کنید. هر مورد روی یک برگ $A4$.

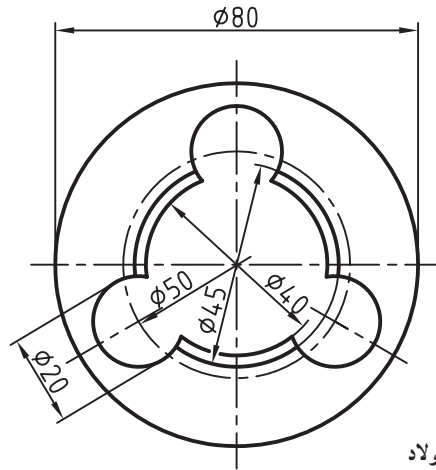


شکل ۱۲-۶- هر نقشه روی یک برگ A۴

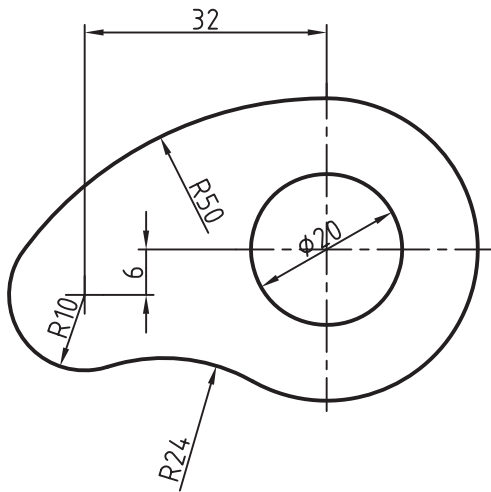
۷- موارد داده شده در شکل ۱۳-۶ را رسم کنید.



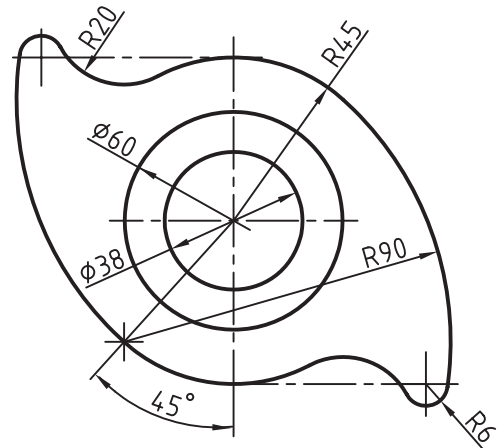
۱- مفتول فنری، فولاد



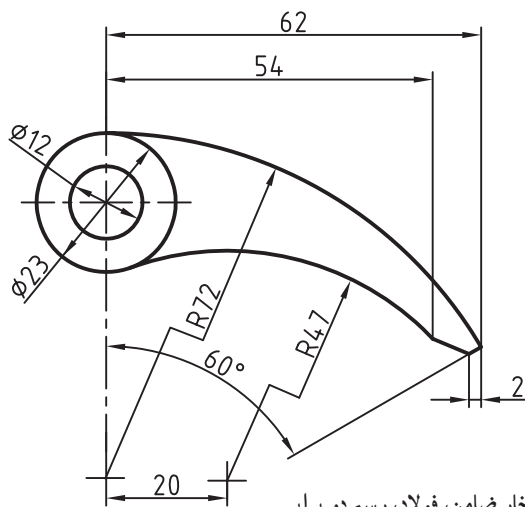
۲- حدیده، فولاد



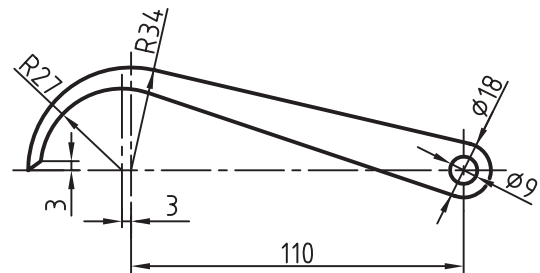
۳- بادامک، فولاد، رسم دو برابر



۴- بادامک، فولاد



۵- خار ضامن، فولاد، رسم دو برابر



۶- بازوی پرگار کج، فولاد

تصویر^۱

هدف‌های رفتاری : فراگیر پس از پایان این درس می‌تواند :

- ۱- مفهوم نقطه، خط و صفحه را بیان کند.
- ۲- تصویر را تعریف کند.
- ۳- صفحه‌های تصویر و فرجه را تعریف کند.
- ۴- تصویر نقطه، خط، سطح و جسم را رسم کند.
- ۵- فرجه‌ها را به هم تبدیل کند.

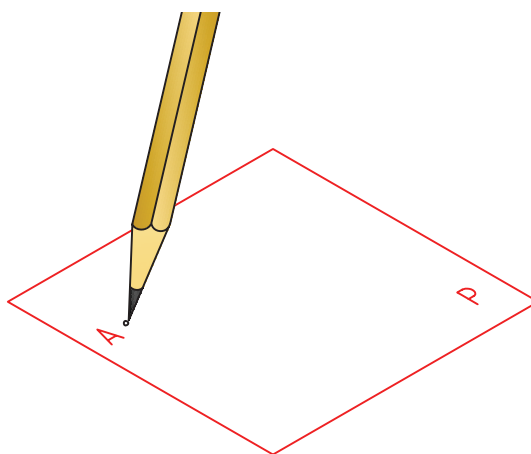
۷-۱- مفاهیم پایه

می‌توان آن را با اثر نوک تیز مداد و یک نام، مانند A روی کاغذ معرفی کرد (شکل ۷-۱).

۷-۱-۲ خط : می‌توان گفت، خط از حرکت نقطه به وجود می‌آید^۲. هر چه بتوان آن را نازک‌تر رسم کرد، به واقعیت خط نزدیک‌تر خواهد بود. خط می‌تواند راست یا شکسته یا خمیده

نقطه، خط و صفحه مفهوم‌های اولیه‌ای به شمار می‌آیند که به درستی قابل تعریف نیستند و باید آن‌ها را پذیرفت. با این حال به صورتی ساده می‌توان آن‌ها را معرفی کرد.

۷-۱-۱ نقطه^۲ : کوچک‌ترین جزء یک جسم است.



شکل ۷-۱- نقطه

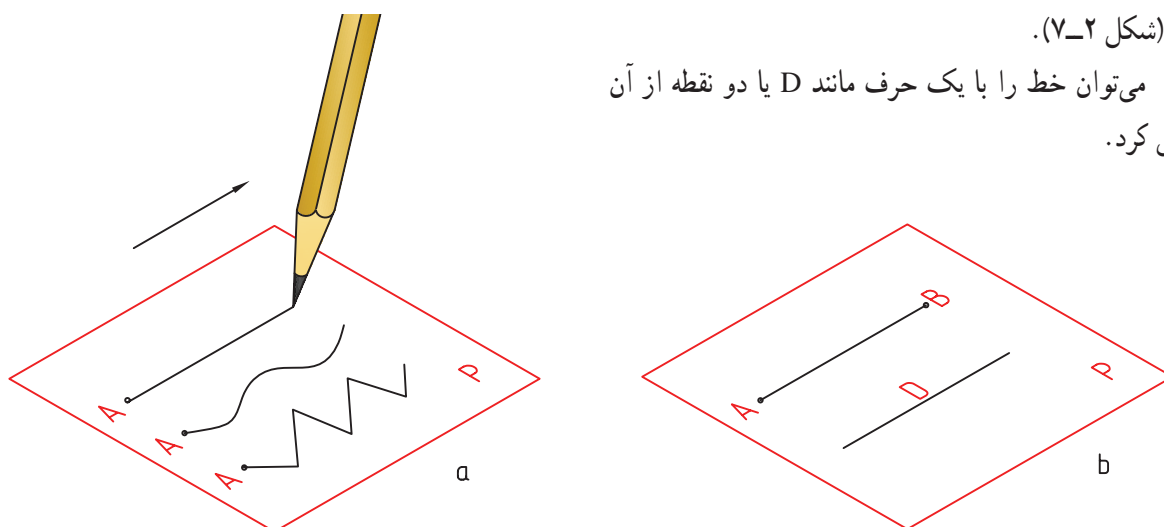
۱- تصویر، نما : Projection

۲- نقطه : Point

۳- خط : Line، می‌توان گفت خط از اتصال دو نقطه ایجاد می‌شود. قسمت محدودی از خط را پاره خط می‌گویند. همه‌ی خط‌ها در نقشه‌های ما در واقع پاره‌خط‌اند، که برای کوتاهی سخن همان واژه‌ی خط را به کار می‌بریم.

باشد (شکل ۷-۲).

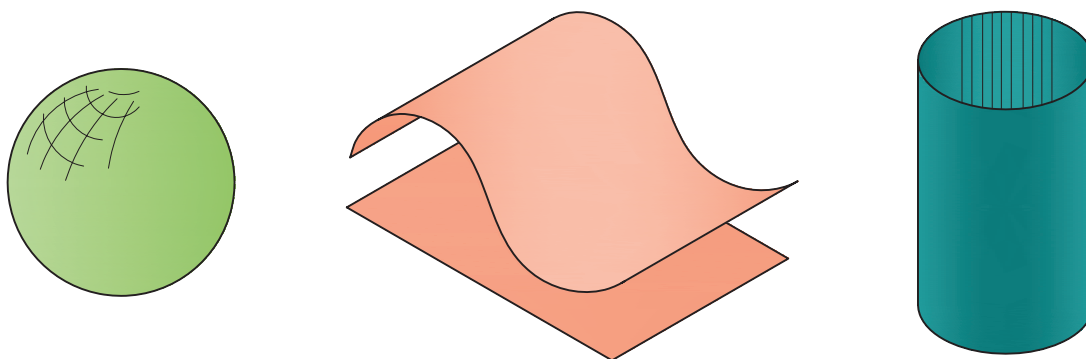
می‌توان خط را با یک حرف مانند D یا دو نقطه از آن معرفی کرد.



شکل ۷-۲ خط

صفحه را می‌توان با یک حرف مانند P معرفی کرد.
نکته : می‌توان گفت که از برخورد دو صفحه، خط به وجود می‌آید.

۳-۱-۷- صفحه^۱ : می‌توان گفت که صفحه از حرکت خط حاصل می‌شود. به هر حال صفحه سطحی است تخت یا دارای خم (شکل ۷-۳).



شکل ۷-۳ صفحه

می‌شوند، به گونه‌ای از این حجم‌ها یا ترکیبی از آنها باشند. زیرا آنها هم از نظر محاسبه و هم از نظر روش‌های شکل‌دهی و ساخت ساده‌ترین از نظر ساخت کدام است؟

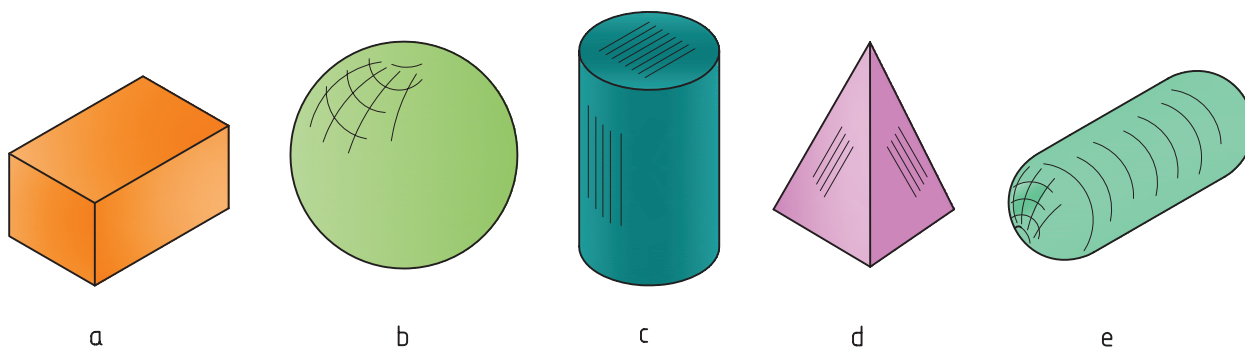
۴-۱-۷- حجم : مقداری از فضا است که به وسیله‌ی یک جسم^۲ اشغال می‌شود (شکل ۷-۴).
در شکل‌های آشنا‌ترین حجم‌ها را می‌بینیم.
معمولاً در صنعت کوشش می‌شود که قطعه‌هایی که ساخته

۱- صفحه : Surface - Plane

۲- حجم : Volume

۳- جسم : Object می‌توان گفت جسم قسمتی از فضا است که به وسیله‌ی مجموعه‌ای از صفحات محدود می‌شود. البته این مجموعه می‌تواند، یک تا بی‌شمار صفحه داشته

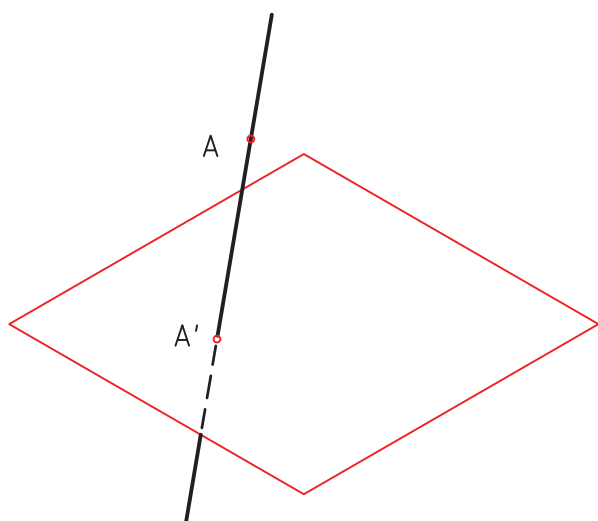
باشد.



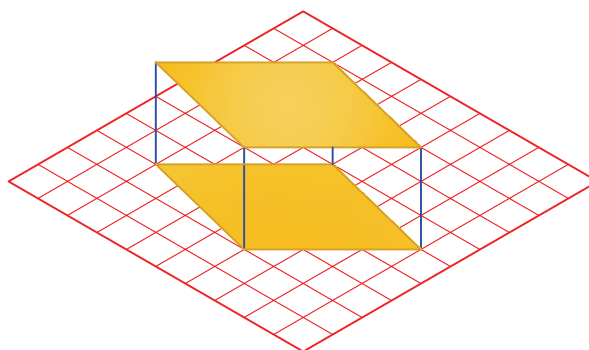
شکل ۴-۷- حجم‌های معروف

۷-۲- تصویر

نما یا تصویر در حقیقت سایه‌ای از یک نقطه، خط، سطح یا حجم است. سایه سطحی است سیاه، یعنی بدون نور (شکل ۷-۵).



شکل ۶-۷- تصویر هندسی



شکل ۵-۷- تصویر موازی

صفحه‌ی تصویر^۱ و شعاع تصویر^۲ را داشته باشیم. در شکل، AA' شعاع تصویر است.

اگر AA' بر P عمود باشد، تصویر را عمودی و در غیر این صورت، آن را مایل گویند. اگر شعاع‌های تصویر همه موازی باشند تصویر را موازی^۳ گویند مانند آنچه که از تابش نور خورشید حاصل می‌شود (شکل ۷-۷).

اما معمول نقشه‌کشی، شکلی است که همه‌ی نقطه‌ها و خط‌ها یعنی لبه‌های موجود در آن معرفی شوند. در هندسه، تصویر، تعریف بسیار دقیقی دارد.

۱- ۷-۲- تعریف تصویر: اگر خطی از نقطه‌ی A

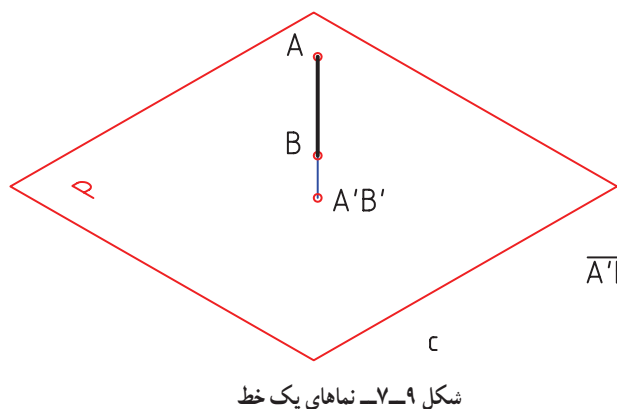
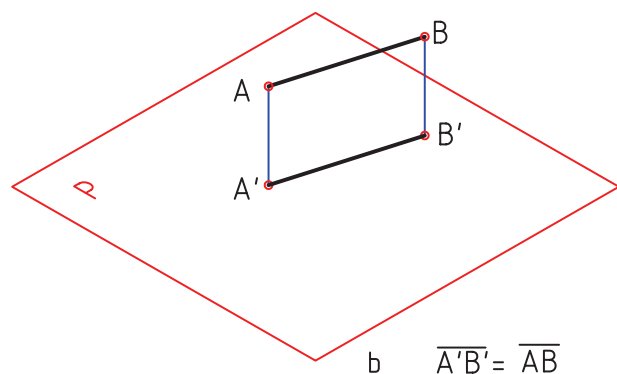
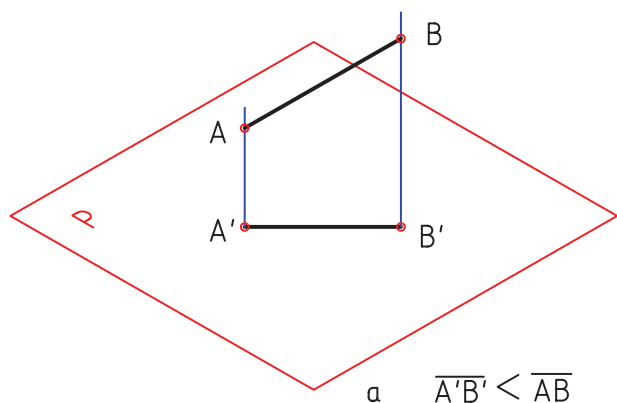
بگذرد و صفحه‌ی P را در A' قطع کند، بنا بر تعریف، A' را تصویر A نامند (شکل ۷-۶).

به گفته‌ای ساده، برای داشتن یک تصویر یا نقشه باید جسم،

۱- صفحه‌ی تصویر : Projection plane یا plane of projection

۲- شعاع تصویر : projector یا Projection line

۳- تصویر موازی : Parallel projection



شکل ۷-۹- نماهای یک خط

دیده می شود که به دلیل شیب AB نسبت به p، داریم :

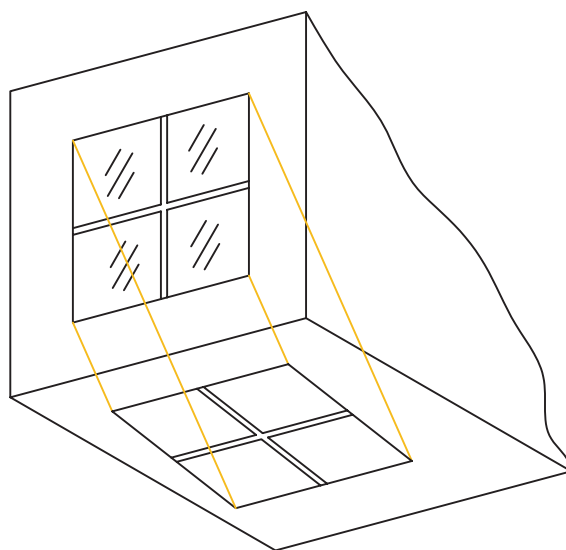
$\overline{A'B'} < \overline{AB}$ حالت های دیگر هم هست :

— اگر AB موازی با p باشد، داریم : $\overline{A'B'} = \overline{AB}$

— اگر AB عمود بر p باشد، داریم : $\overline{A'B'} = 0$

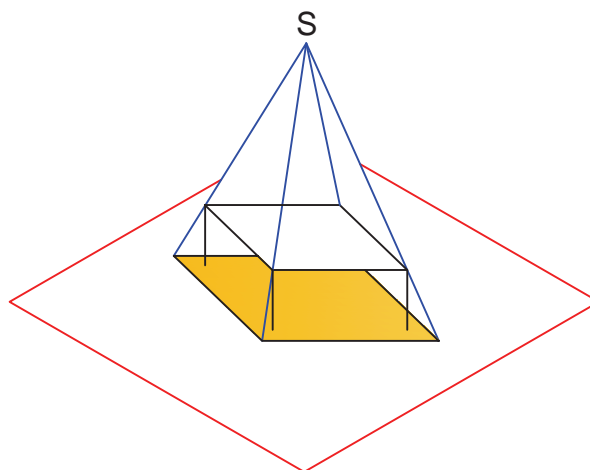
۷-۲-۳ — نمای صفحه : یک صفحه را می توان با

قسمت محدودی از آن معرفی کرد، مانند مثلث، مستطیل. با



شکل ۷-۷- نمای مایل

و اگر شعاع های نور از یک مرکز صادر شوند، تصویر را مرکزی^۱ نامند. مانند آنچه که از نور یک لامپ آویز به دست می آید (شکل ۷-۸).



شکل ۷-۸- نمای مرکزی، S مانند یک لامپ

۷-۲-۲ — نمای خط : برای به دست آوردن نمای یک

خط مستقیم کافی است که نمای دو نقطه از آن را داشته باشیم (شکل ۷-۹).

در ضمن، چون همه ی نقشه های صنعتی با روش عمودی

رسم می شوند، ما هم فقط به همین روش بسنده می کنیم.

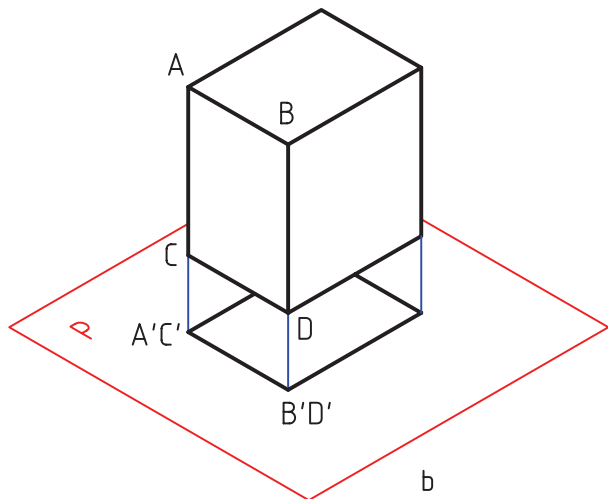
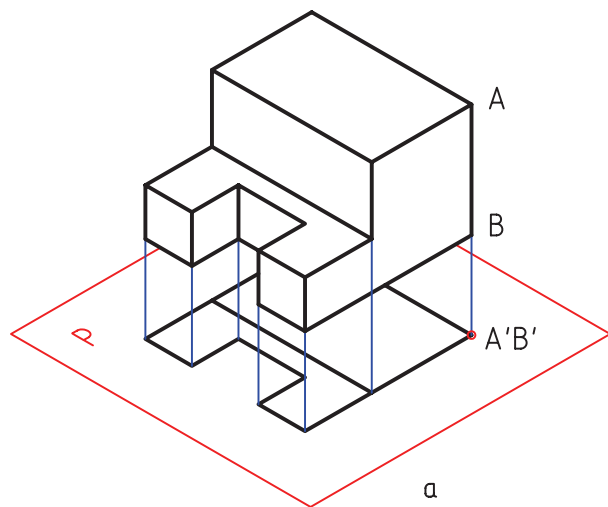
– اگر $ABCD$ موازی با p باشد، داریم

$$ABCD = A'B'C'D'$$

۴-۲-۷ – نمای جسم : به همین ترتیب یک جسم

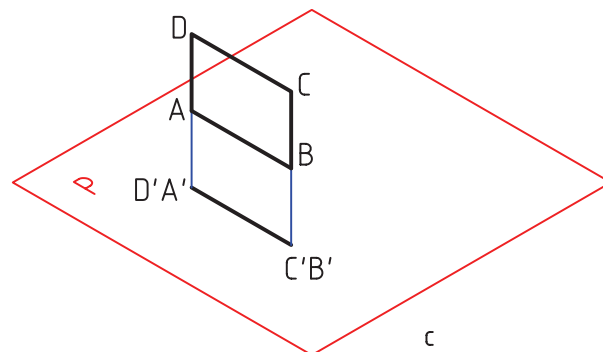
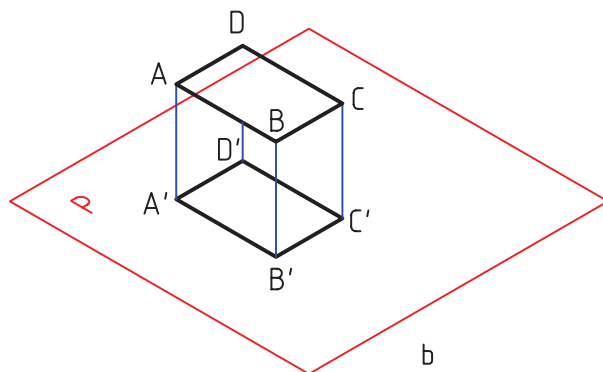
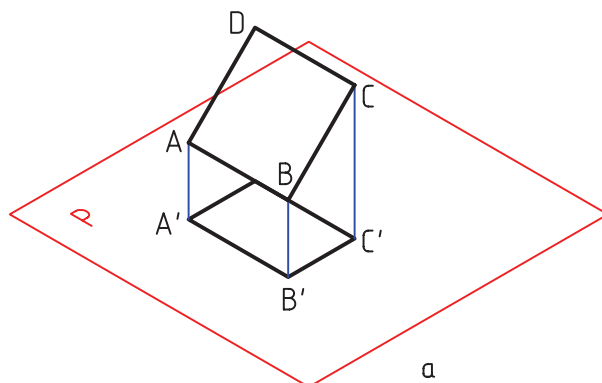
می تواند نماهای گوناگونی داشته باشد. معمول آن است که یک جسم را نسبت به صفحه ی تصویر، یعنی P در ساده ترین حالت ممکن در نظر بگیریم (شکل ۷-۱۱a).

قاعده ی منشور با p موازی است، پس نمای دیواره ها همه تبدیل به خط خواهند شد و نمای جسم بر p یک مستطیل است (شکل ۷-۱۱b).



شکل ۷-۱۱ – نمای یک حجم

در نظر گرفتن مستطیل $ABCD$ ، تصویر آن $A'B'C'D'$ خواهد شد (شکل ۷-۱۰).



شکل ۷-۱۰ – نماهای یک سطح

دیده می شود که $A'B'C'D'$ نمای مستطیل است. اگر مستطیل نسبت به p حالت دل خواهی داشته باشد، داریم :
 $ABCD$ سطح < $A'B'C'D'$ سطح حالت های دیگر هم هست :

– اگر $ABCD$ عمود بر p باشد، تصویر فقط یک خط

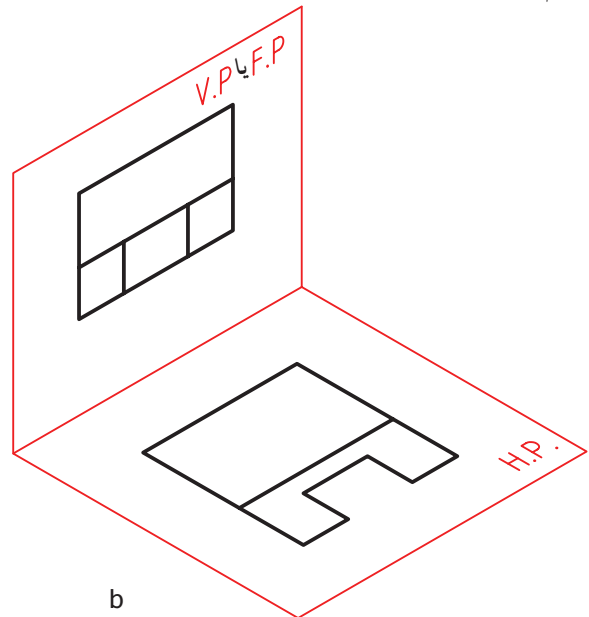
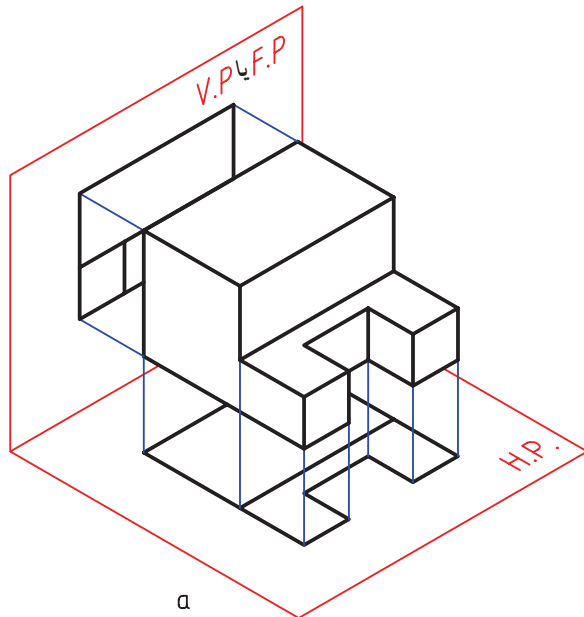
می شود.

۷-۳- صفحه‌ی تصویر

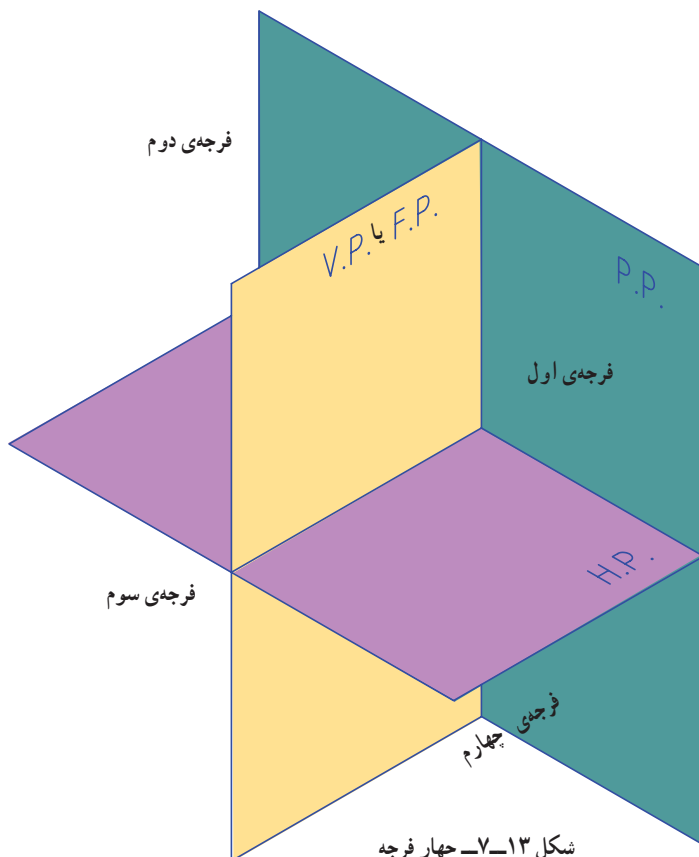
تجربه نشان می‌دهد که مغز انسان می‌تواند با ترکیب این

تصویرهای دوبعدی به یک حالت سه بعدی برسد، یعنی جسم را درک نماید. به شکل ۷-۱۲ توجه کنید :

در هندسه صفحه نامحدود است. برای رسم یک نقشه‌ی صنعتی لازم است از یک جسم در چند جهت مختلف تصویر رسم کنید.



شکل ۷-۱۲- نماهای یک حجم



شکل ۷-۱۳- چهار فرجه

اگر جسم را حذف کنیم و تنها به دو نمای داده شده روی یک صفحه‌ی افقی^۱، یعنی pH و یک صفحه‌ی عمودی^۲ رو به روی یعنی V.P. نگاه کنیم، جسم را درک می‌کنیم. البته این کار به مقداری تمرین نیاز دارد. تعداد این نماها، که می‌توانند در جهت‌های مختلف تهیه شود زیاد است ولی معمولاً به ۲ یا ۳ مورد آن‌ها بسنده می‌شود. علاوه بر این، نماها باید یک نظم درست داشته باشند. صفحه‌هایی که برای تصویر در نظر می‌گیرند ویژگی‌های زیر را خواهند داشت :

— برهم عمودند

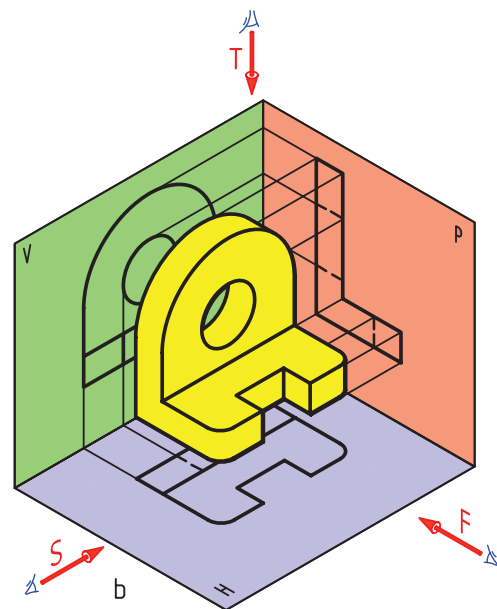
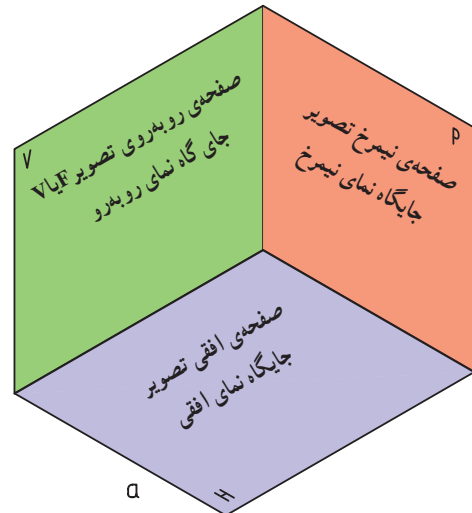
— در اصل نامحدودند (شکل ۷-۱۳)

۱- صفحه‌ی افقی : horizontal plane

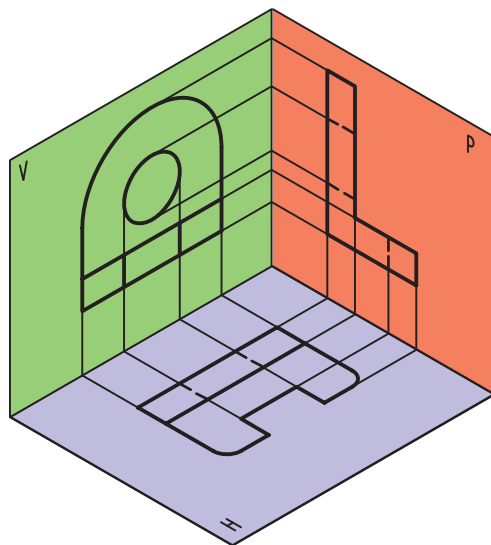
۲- صفحه‌ی عمودی و صفحه‌ی روبه‌رو : Frontal plane

با توجه به شکل، دیده می شود که سه صفحه ی V و H و p فضای مورد نظر ما را به چهار بازه یا ناحیه، یا فرجه^۱ تقسیم کرده اند. این چهار ناحیه را به ترتیب فرجه ی اول، فرجه ی دوم، فرجه ی سوم و فرجه ی چهارم می نامند. برای رسم نماها فقط از دو بازه ی اول و سوم استفاده می شود.

۷-۳-۱- فرجه ی اول^۲: در شکل ۷-۱۴، تنها فرجه ی اول را در نظر گرفتیم.



شکل ۷-۱۴- صفحه و نما



شکل ۷-۱۵- سه نما

ناظر کسی است که می خواهد تصویر تهیه کند. پس او باید از سه سمت عمود بر سه صفحه ی تصویر، نگاه و نماهای لازم را تهیه کند.

- آن چه روی V قرار می گیرد نمای روبه رو^۳ است.
- آن چه روی H قرار می گیرد، نمای افقی^۴ است.
- آن چه روی P قرار می گیرد، نمای نیم رخ^۵ است.

مهم ترین تصویر، نمای روبه رو است که به آن نمای اصلی هم می گویند. جهت این نما را با F مشخص می کنیم.

اینک اگر جسم را حذف کنیم، شکل ۷-۱۵ را داریم.

این شکل سه بعدی و رسم آن مشکل می باشد. زاویه ها هم درست نیستند.

۷-۳-۲- گسترش فرجه : در عمل این سه صفحه را گسترش می دهند و بر سطح کاغذ منطبق می کنند (شکل ۷-۱۶).

این شکل دو بعدی و اندازه ها و زاویه های آن درست است. درستی جای نماها با خطهای ارتباطی نازک مورد تأیید قرار می گیرد.

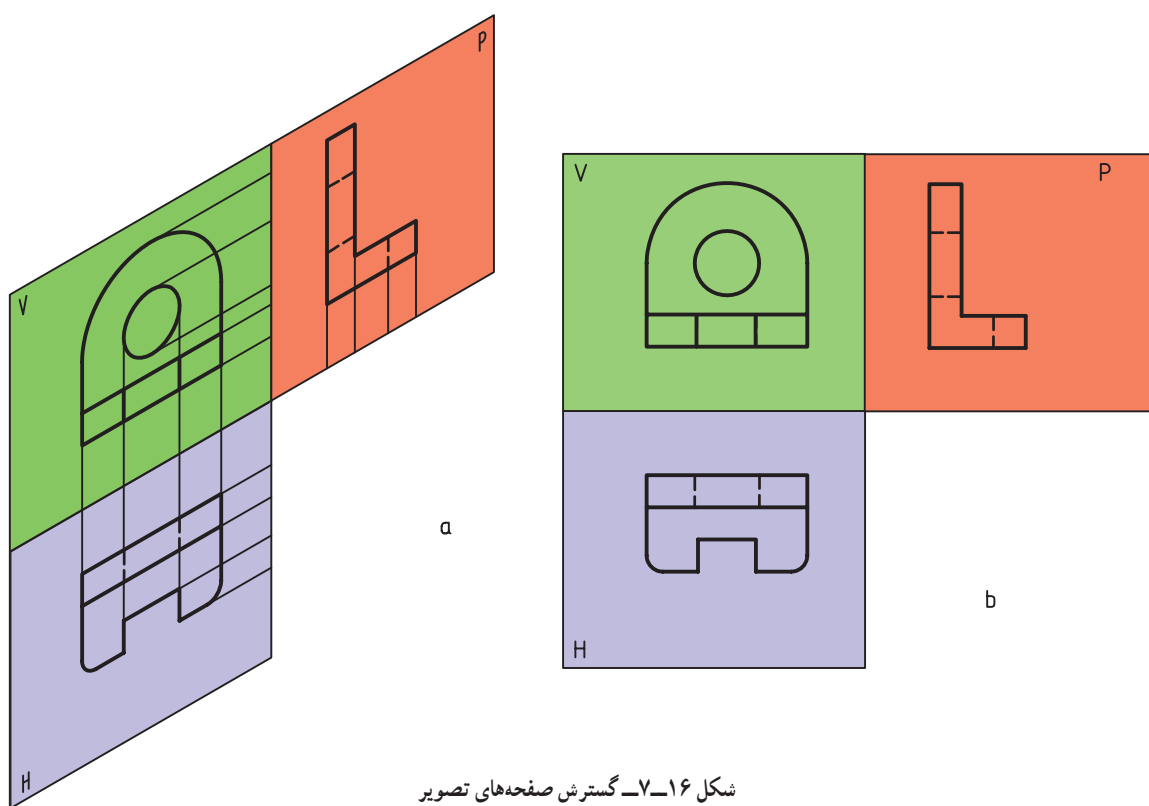
۲- فرجه ی اول، بازه ی اول First angle

۱- فرجه، بازه : angle

۴- نمای افقی؛ Horizontal view، به آن نمای از بالا، سر، سطحی هم گفته اند.

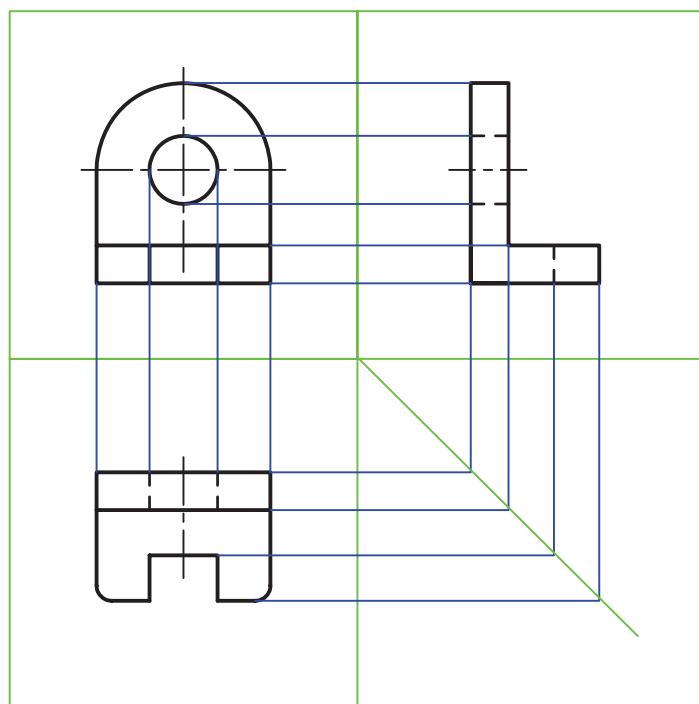
۳- نمای روبه رو : Frontal view به آن نمای از جلو یا قائم هم گفته اند.

۵- نمای نیم رخ : Side view، که به آن نمای جانبی، جنبی، دید از چپ هم می گویند. (Top view)



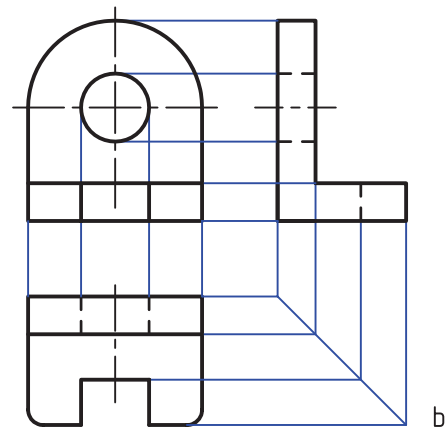
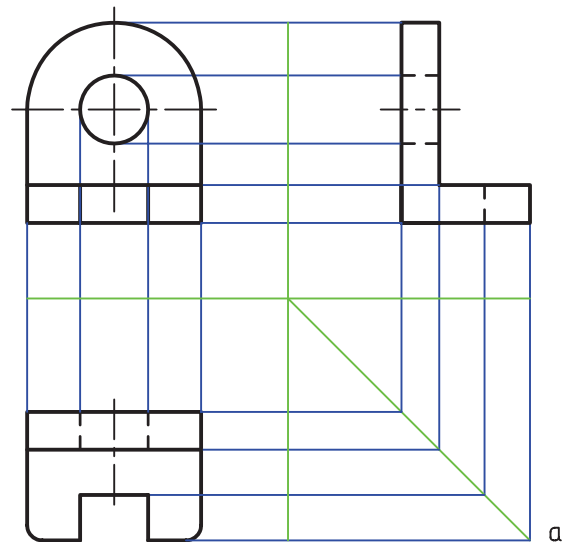
شکل ۷-۱۶- گسترش صفحه‌های تصویر

این خط‌های ارتباط را می‌توان مطابق شکل ۷-۱۷ هم در نظر گرفت.



شکل ۷-۱۷- خط‌های رابط

با کمی دقت دیده می‌شود که به دلیل نامحدود بودن صفحه‌های تصویر، ممکن است که خطوط حاشیه‌ی صفحه‌ها را حذف کرد (شکل ۷-۱۸a).



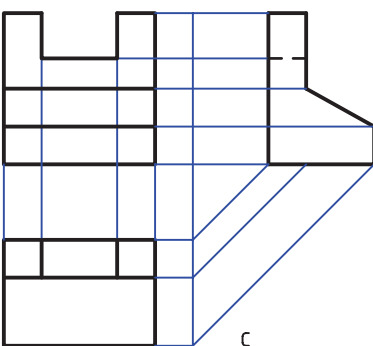
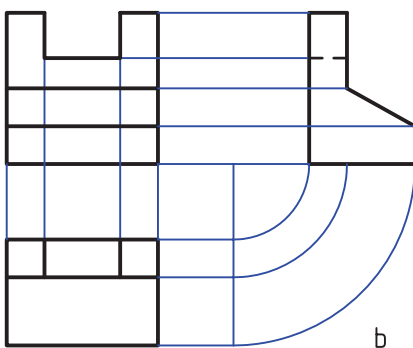
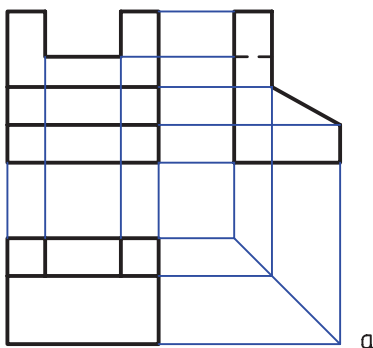
شکل ۷-۱۸- حذف محدودی صفحه‌ها

در شکل ۷-۱۸b، حتی خط‌های اشتراک صفحه را نیز حذف کردیم. می‌بینیم که شکل به دست آمده ساده‌تر است. فاصله‌ی نماها را هم می‌توان به دل خواه کم‌تر یا بیش‌تر در نظر گرفت که این امر تأثیری در شکل نماها نخواهد داشت.

توجه کنید: ابتدا دید روبه‌رو رسم می‌شود. سپس نمای افقی زیر آن و نمای نیم‌رخ در سمت راست آن، رسم خواهد شد.

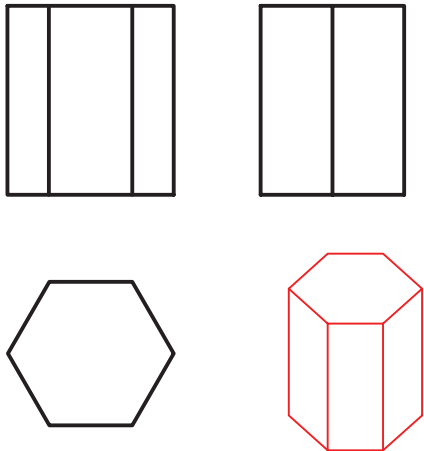
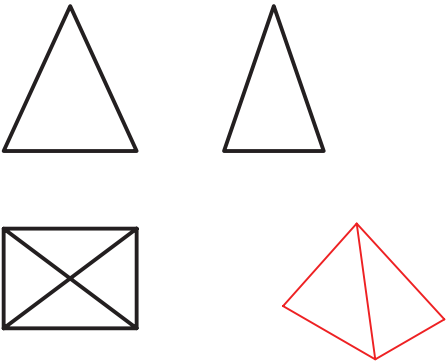
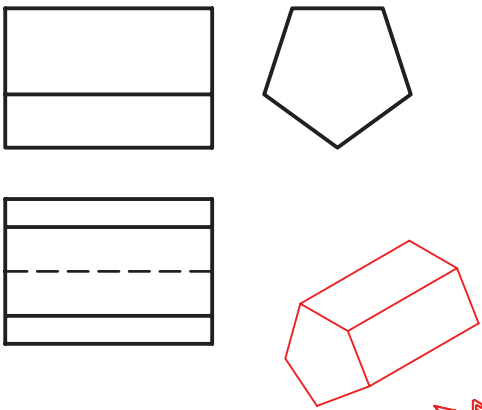
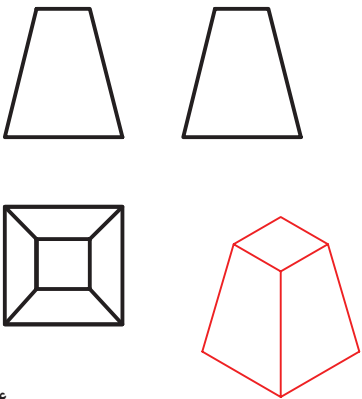
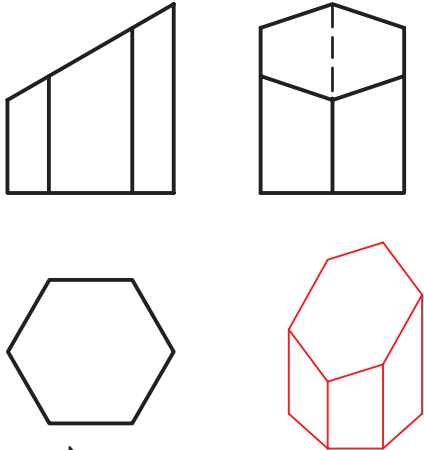
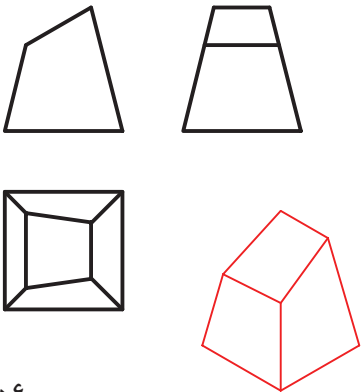
۳-۳-۷- ارتباط بین نماها: همان‌گونه که در شکل‌های قبل دیده شد، می‌توان اجزای هر نما را با نمای دیگر، به کمک خط‌های رابط نازک به هم مربوط کرد و به این ترتیب درک بهتری به دست آورد و در ضمن از اشتباه هم جلوگیری کرد. پس هر نقطه در یک نما باید با نقطه‌ای در نمای دیگر توجیه شود.

ارتباط بین نمای رو به رو و افقی یا رو به رو و نیم‌رخ، مستقیم است ولی ارتباط بین نمای افقی و نیم‌رخ باید به کمک خط کمکی ۴۵ درجه برقرار شود. محل خط ۴۵ درجه دل خواه است و تغییر جای آن فقط باعث تغییر جای نمای نیم‌رخ خواهد شد. این ارتباط به شکل‌های گوناگون امکان دارد (شکل ۷-۱۹).

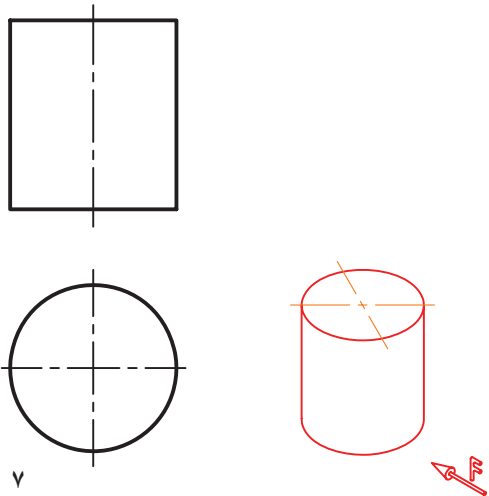
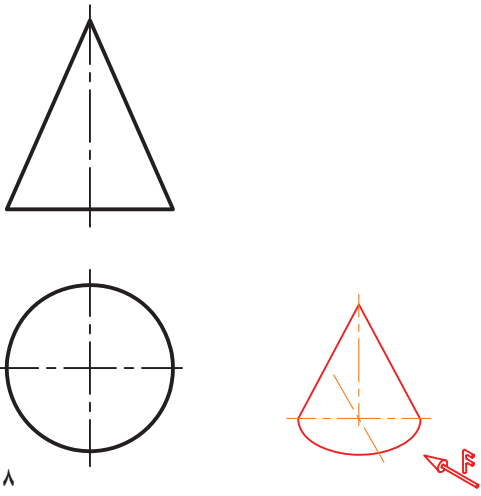
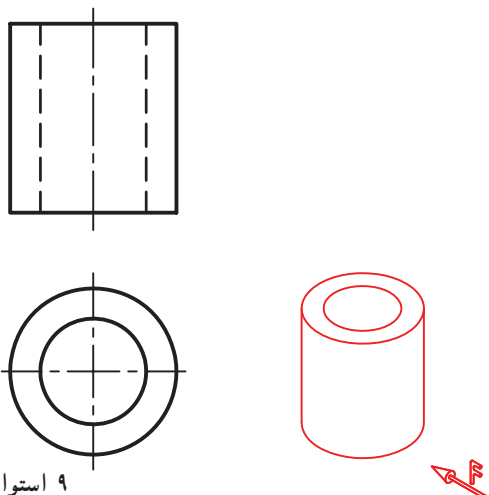
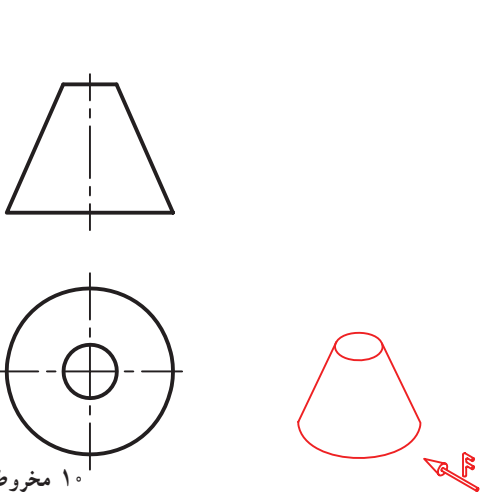
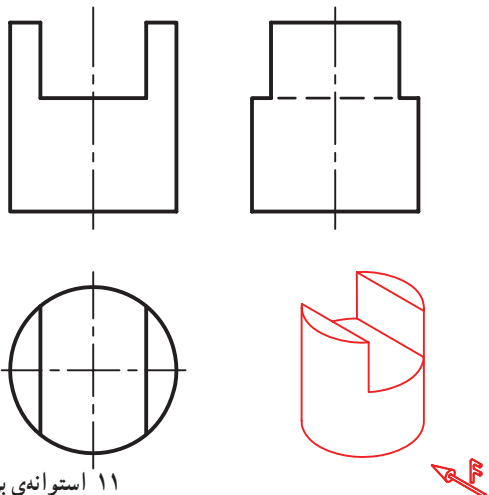
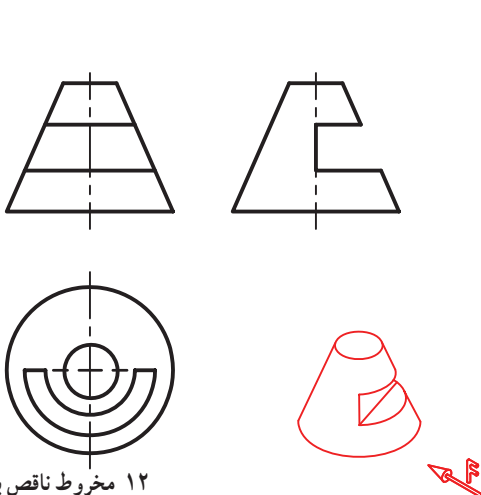


شکل ۷-۱۹- روش‌های گوناگون رسم رابط

در جدول ۷-۱ سه نما از چند جسم مهم هندسی داده شده است.

 <p>۱ منشور</p>	 <p>۲ هرم</p>
 <p>۳ منشور</p>	 <p>۴ هرم ناقص</p>
 <p>۵ منشور برش‌دار</p>	 <p>۶ هرم برش‌دار</p>

در جدول های ۷-۲ و ۷-۳ تعداد دیگری از احجام آشنا در دو یا سه نما دیده می شوند.

 <p>۷ استوانه</p>	 <p>۸ مخروط</p>
 <p>۹ استوانه، لوله</p>	 <p>۱۰ مخروط ناقص</p>
 <p>۱۱ استوانه‌ی برش‌دار</p>	 <p>۱۲ مخروط ناقص برش‌دار</p>

