

فصل
ششم

اندازه گیری زاویه با وسایل ساده



هدف های رفتاری :

پس از آموزش و مطالعه این فصل از فراگیرنده انتظار می رود بتواند:

- ۱- راهکار کلی برای حل مسایل اندازه گیری زاویه ی افقی با قطب نما را بیان نماید.
- ۲- محاسبات مربوط به اندازه گیری زاویه ی افقی با قطب نما را انجام دهد.
- ۳- محاسبات مربوط به اندازه گیری زاویه ی افقی با قطب نما را با ماشین حساب کاسیو ۴۵۰۰ انجام دهد.
- ۴- بحث و بررسی های مربوط به اندازه گیری زاویه ی افقی با قطب نما را توضیح دهد.
- ۵- راهکار کلی برای حل مسایل اندازه گیری زاویه ی افقی با استفاده از متر (روش مثلث متساوی الساقین) را بیان نماید.
- ۶- محاسبات مربوط به اندازه گیری زاویه ی افقی با استفاده از متر (روش مثلث متساوی الساقین) را انجام دهد.
- ۷- محاسبات مربوط به اندازه گیری زاویه ی افقی با استفاده از متر (روش مثلث متساوی الساقین) را با ماشین حساب کاسیو ۴۵۰۰ انجام دهد.
- ۸- بحث و بررسی های مربوط به اندازه گیری زاویه ی افقی با استفاده از متر (روش مثلث متساوی الساقین) را توضیح دهد.
- ۹- راهکار کلی برای حل مسایل اندازه گیری زاویه ی افقی با استفاده از متر (روش مثلث نامشخص) را بیان نماید.
- ۱۰- محاسبات مربوط به اندازه گیری زاویه ی افقی با استفاده از متر (روش مثلث نامشخص) را انجام دهد.
- ۱۱- محاسبات مربوط به اندازه گیری زاویه ی افقی با استفاده از متر (روش مثلث نامشخص) را با ماشین حساب کاسیو ۴۵۰۰ انجام دهد.
- ۱۲- بحث و بررسی های مربوط به اندازه گیری زاویه ی افقی با استفاده از متر (روش مثلث نامشخص) را توضیح دهد.

قبل از مطالعه ی این فصل از فراگیرنده انتظار می رود با مطالب زیر آشنا باشد:

- ۱- آشنایی با فصل ششم کتاب «مساحی»

: مطالب پیش نیاز

- زاویه قسمتی از صفحه است که بین دو امتداد متقاطع قرار گرفته باشد.
- زاویه‌ی افقی زاویه‌ای است که بین دو امتداد روی صفحه‌ی افقی به دست می‌آید.
- زاویه‌ی قائم زاویه‌ای است که بین یک امتداد و امتداد افقی یا قائم بر محل روی صفحه‌ی قائم به دست می‌آید.
- دو روش ساده و معمول برای اندازه‌گیری زاویه‌ی افقی استفاده می‌شود:
 - ۱- استفاده از قطب نما
 - ۲- استفاده از متر که خود به دو روش مثلث متساوی الساقین و روش مثلث نامشخص تقسیم می‌شود.
- زاویه‌ی قائم به دو زاویه‌ی زینتی و شیب تقسیم می‌شود.
- زاویه‌ی شیب (α) زاویه‌ای است بین امتداد مورد نظر و خط افقی که در صفحه‌ی قائم اندازه‌گیری می‌شود.
- زاویه‌ی زینتی (Z) زاویه‌ای است بین امتداد مورد نظر و خط قائم محل که در صفحه‌ی قائم اندازه‌گیری می‌شود.
- متداول‌ترین روش به دست آوردن زاویه‌ی قائم با وسایل ساده، استفاده از شیب‌سنج است که به ما زاویه‌ی شیب (α) را نشان می‌دهد.
- با استفاده از زاویه‌ی شیب می‌توان زاویه‌ی زینتی را محاسبه کرد:

$$Z + \alpha = 90^\circ \text{ یا } 100g$$

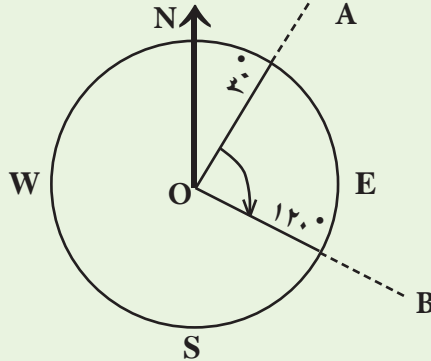
$$Z = 90 - \alpha$$

مثال ۶-۱



اندازه گیری زاویه ی افقی با استفاده از قطب نما

با قطب نما بر روی نقطه ی O مستقر می شویم و دو امتداد OA و OB را قرائت می کنیم. اعداد مربوط به دو امتداد را بر روی صفحه ی قطب نما بصورت زیر قرائت و یادداشت می کنیم:



زاویه ی AOB (زاویه ی بین دو امتداد) چند درجه است؟

راهکار کلی: همان طور که در شکل می بینید، زاویه ی AOB از تفاضل دو امتداد OB و OA تشکیل شده است. بنابراین:

$$\angle AOB = R_{OB} - R_{OA}$$

روش حل:

$$\angle AOB = R_{OB} - R_{OA}$$

$$\angle AOB = 120^\circ - 30^\circ$$

$$\angle AOB = 90^\circ$$

بحث و بررسی: • می دانیم در قطب نما همواره امتداد شمال یک امتداد ثابت است که این امتداد همان صفر قطب نما محسوب می شود و آن را مبدأ در نظر می گیریم.

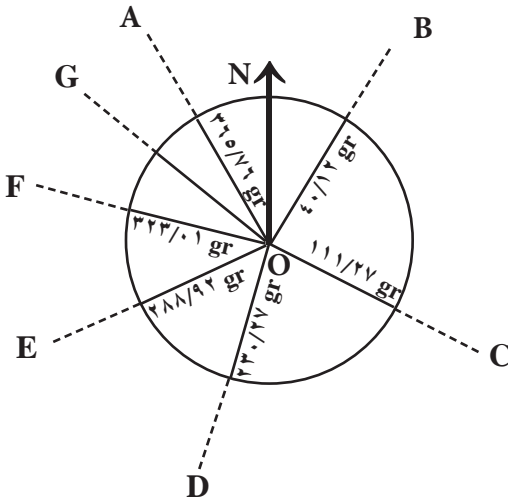
• هر امتداد نسبت به شمال زاویه ای می سازد. با ثابت بودن شمال در قطب نما می توانیم زوایا را نسبت به هم مقایسه کنیم.

• منظور از R_{OB} و R_{OA} اعداد قرائت شده روی امتداد های OA و OB با قطب نما ست.

• اگر مقدار به دست آمده برای زاویه عددی منفی شود، آن را چگونه توجیه می کنید؟ آیا می توان به زاویه مقادیر منفی نسبت داد؟

تمرین کلاسی مثال ۶ - ۱:

۱- شکل زیر صفحه‌ی یک قطب‌نما را نشان می‌دهد که در نقطه‌ی O مستقر گردیده و روی آن قرائت امتدادهای A تا G انجام شده است. زوایای خواسته شده را بر حسب گراد محاسبه کنید.



الف) $\angle BOD = ?$

ب) $\angle COF = ?$

ج) $\angle AOB = ?$

د) $\angle AOD = ?$

ه) اگر زاویه‌ی $\angle GOB$ قائمه باشد روی امتداد OG چه عددی قرائت شده است؟



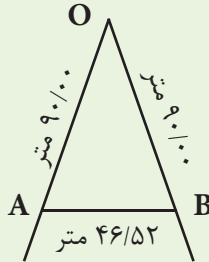
نکته‌ها:

پاکدامنی و استقامت از تمام پیمان‌ها و سوگندها محکم‌تر است.
«مادام نکر»



اندازه گیری زاویه‌ی افقی با استفاده از متر - روش مثلث متساوی الساقین

با توجه به شکل زیر اندازه‌ی زاویه‌ی AOB چند درجه است؟



راهکار کلی: چون دو طول OA و OB با هم برابر انتخاب شده‌اند در نتیجه مثلث AOB متساوی الساقین است، پس خواهیم داشت:

$$\angle \text{AOB} = 2 \arcsin\left(\frac{\text{AB}}{2\text{OA}}\right)$$

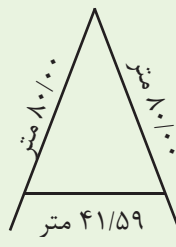
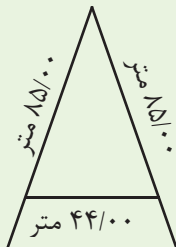
روش حل:

$$\angle \text{AOB} = 2 \arcsin\left(\frac{\text{AB}}{2\text{OA}}\right)$$

$$\angle \text{AOB} = 2 \arcsin\left(\frac{46/52}{2 \times (90)}\right)$$

$$\angle \text{AOB} = 29/95 = 29^\circ 57' 20''$$

بحث و بررسی: برای کنترل درست بودن اندازه‌ی زاویه‌ی AOB می‌توانیم طول‌های مساوی دیگری مانند شکل‌های زیر را روی دو امتداد OA و OB جدا کنیم و با اندازه‌گیری ضلع AB و استفاده از رابطه‌ی فوق مجدداً زاویه‌ی AOB را محاسبه کنیم.

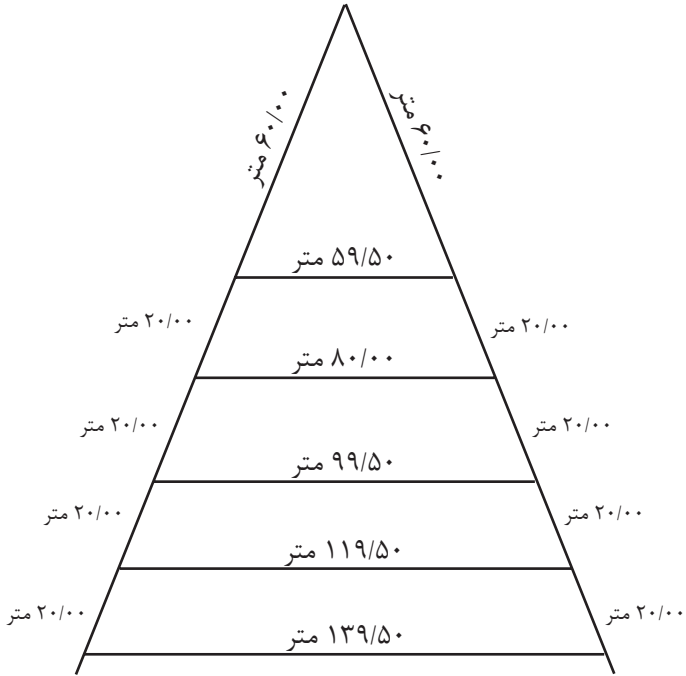


زوایای محاسبه‌شده‌ی جدید با زاویه‌ی AOB در حد چند دقیقه اختلاف دارند، زیرا اندازه‌گیری با متر دقت کمی دارد. بهترین مقدار برای زاویه، میانگین‌گیری از این چند عدد است

| مرحله | کلید | صفحه‌ی نمایش | توضیح |
|-------|---|---|--|
| ۱ |  |  | صفحه‌ی نمایش پاک می‌شود |
| ۲ |  |  | عدد ۲ به ماشین معرفی می‌شود |
| ۳ |  |  | ماشین وارد تابع arcsin شده و منتظر عدد مورد نظر است |
| ۴ |  |  | پرانتز را باز کرده تا در داخل آن اعداد مورد نظر را محاسبه کنیم |
| ۵ |  |  | عدد مربوط به ضلع مقابل به زاویه‌ی O را وارد می‌کنیم |
| ۶ |  |  | عمل تقسیم به ماشین معرفی می‌شود |
| ۷ |  |  | پرانتز را باز می‌کنیم |
| ۸ |  |  | اعداد به ماشین معرفی می‌شوند |
| ۹ |  |  | پرانتزهای باز شده را می‌بندیم |
| ۱۰ |  |  | جواب را دریافت می‌کنیم |
| ۱۱ |  |  | زاویه را بر حسب درجه، دقیقه و ثانیه به دست می‌آوریم |

تمرین کلاسی مثال ۶ - ۲:

۱- اندازه‌ی زاویه‌ی **B** را محاسبه کنید. سپس بهترین مقدار را برای این زاویه به دست آورید.

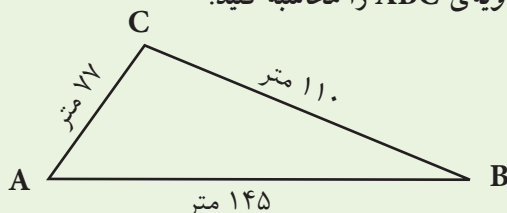


مثال ۳-۶



اندازه گیری زاویه‌ی افقی با استفاده از متر - روش مثلث نامشخص

مطابق شکل زیر اندازه‌ی زاویه‌ی ABC را محاسبه کنید.



راهکار کلی: همان‌طور که در کتاب هندسه (نقشه برداری) آموختید در حل مسائل مثلث که سه ضلع آن معلوم باشد، زوایا را از رابطه کسینوس‌ها محاسبه می‌کنیم، پس داریم:

$$\angle B = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \times a \times c}\right)$$

روش حل:

$$\angle B = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \times a \times c}\right)$$

$$\angle B = \arccos\left(\frac{110^2 + 145^2 - 77^2}{2 \times 110 \times 145}\right)$$

$$\angle B = 31^\circ 30' 40''$$

بحث و بررسی: وقتی می‌گوییم $\cos A = 0/5$ یعنی چه؟

زمانی که مقدار \sin ، \cos یا \tan زاویه‌ای برابر عددی شد آیا می‌توان مقدار آن زاویه را به دست آورد؟ چگونه؟

برای محاسبه‌ی زاویه‌ی A از رابطه‌ی $\cos A = 0/5$ کافی است معکوس آنرا محاسبه نماییم؛ یعنی:

$$\cos A = 0/5 \Rightarrow A = \arccos 0/5$$

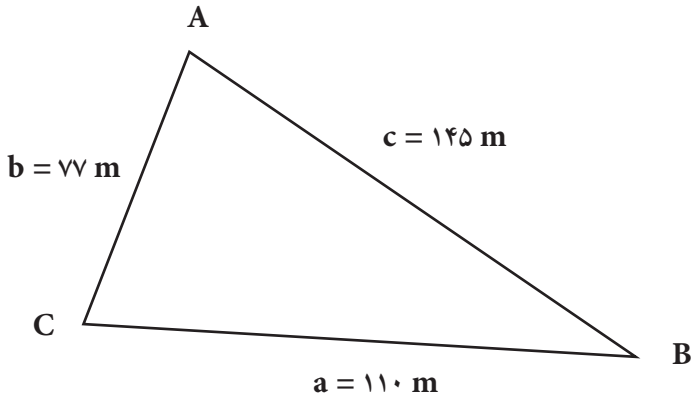
$$\Rightarrow A = 60^\circ$$

\arccos در ماشین حساب و بعضی از کتاب‌ها به صورت \cos^{-1} نوشته می‌شود.

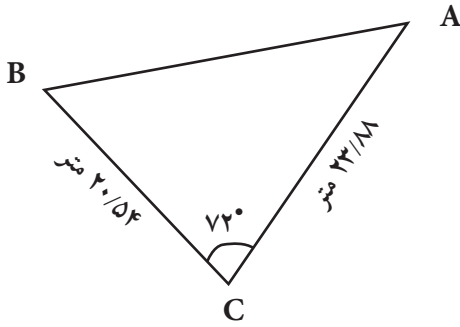
| مرحله | کلید | صفحه‌ی نمایش | توضیح |
|-------|---|---|---|
| ۱ |  |  | صفحه‌ی نمایش آماده می‌شود |
| ۲ |  |  | اعداد به ماشین معرفی می‌شود |
| ۳ |  |  | جواب را دریافت می‌کنیم |
| ۴ |  |  | اعداد به ماشین معرفی می‌شود |
| ۵ |  |  | جواب را دریافت می‌کنیم |
| ۶ |  |  | عدد حاصل را تقسیم بر اعداد دیگر می‌کنیم |
| ۷ |  |  | جواب را دریافت می‌کنیم |
| ۸ |  |  | جواب را در کلید k ذخیره می‌کنیم |
| ۹ |  |  | ماشین وارد تابع arccos شده و منتظر عدد مورد نظر است |
| ۱۰ |  |  | عدد ذخیره شده در k را فرامی‌خوانیم |
| ۱۱ |  |  | جواب را دریافت می‌کنیم |
| ۱۲ |  |  | زاویه را بر حسب درجه، دقیقه و ثانیه به دست می‌آوریم |

تمرین‌های کلاسی مثال ۶ - ۳:

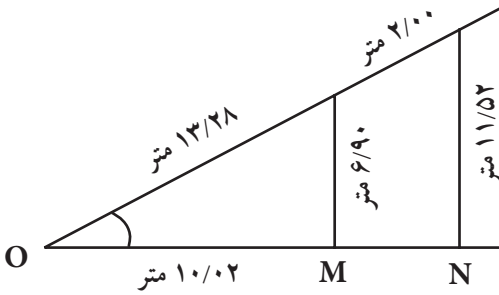
۱- در شکل زیر زوایای مثلث غیرمشخص ABC را با استفاده از اندازه‌ی اضلاع a ، b و c محاسبه کنید.



۲- در شکل زیر طول AB چند متر است؟

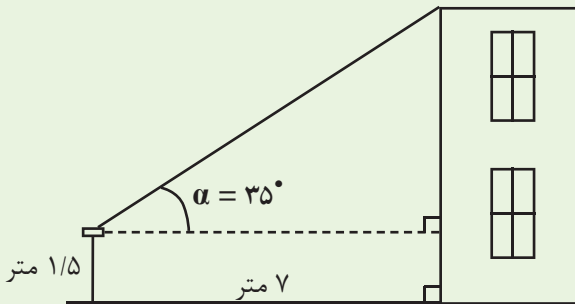


۳- زاویه ی رأس O چند درجه است؟





اندازه‌گیری اختلاف ارتفاع با استفاده از زاویه‌ی شیب و فاصله‌ی افقی مطابق شکل یک شیب‌سنج را در ارتفاع ۱/۵ متری روی یک ژالن ترازشده مستقر کرده و به بالای ساختمانی نشانه‌رو می‌کنیم.



اگر فاصله‌ی افقی ژالن تا پای ساختمان ۷ متر و زاویه‌ی قرائت شده روی شیب‌سنج ۳۵ درجه باشد، ارتفاع ساختمان چند متر است؟
راهکارکلی: برای حل این مسئله با داشتن فاصله‌ی افقی ژالن تا پای ساختمان و اندازه‌گیری زاویه‌ی شیب به وسیله‌ی شیب‌سنج می‌توانیم از رابطه‌ی $\tan \alpha$ در مثلث شیب، ارتفاع بالای ساختمان تا سطح موازی شیب‌سنج (h_1) را محاسبه کنیم.


$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\text{ارتفاع بالای ساختمان تا سطح موازی شیب‌سنج}}{\text{فاصله‌ی افقی ژالن تا پای ساختمان}} = \frac{h_1}{D_h}$$


سپس با اندازه‌گیری فاصله‌ی شیب‌سنج تا زمین بر روی ژالن و اضافه‌کردن این مقدار به ارتفاع h_1 می‌توانیم ارتفاع ساختمان را محاسبه کنیم.

$$h_{\text{ساختمان}} = h_1 + h_{\text{شیب‌سنج}}$$

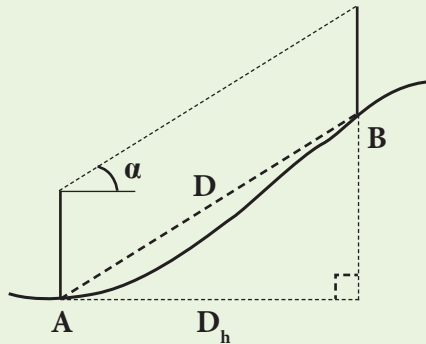
$$\tan \alpha = \frac{h_v}{D_h} \Rightarrow \tan 35^\circ = \frac{h_v}{4} \Rightarrow h_v = 4/9 \cdot m$$

$$h = h_v + 1/5 = 4/9 \cdot 0 + 1/5 = 6/4 \cdot m$$

بحث و بررسی: در هنگام قرائت با شیبسنج باید دقت کرد که شیبسنج درجه‌ای است یا گرادی. 

- در حین عملیات ژالنی که شیبسنج را روی آن قرار داده‌ایم باید کاملاً تراز و عمود بر زمین باشد. می‌دانید چرا؟ 
- فاصله‌ی بین ژالن تا پای ساختمان باید کاملاً افقی بوده و با رعایت اصول مترکشی اندازه‌گیری شود.
- همان‌طور که در فصل سوم ملاحظه کردید گاهی اوقات ممکن است به جای محاسبه‌ی ارتفاع به وسیله‌ی شیبسنج بخواهند فاصله‌ی افقی را با اندازه‌گیری طول مایل و زاویه‌ی شیب محاسبه کنند که در این صورت از رابطه‌ی زیر برای به‌دست‌آوردن فاصله‌ی افقی استفاده می‌کنیم:

$$D_h = D \times \cos \alpha$$



تمرین‌های کلاسی مثال ۶ - ۴:

۱- فاصله‌ی مایل بین دو نقطه‌ی A و B برابر با $102/46$ متر و شیب بین آن‌ها ۲۵ درصد است. فاصله‌ی افقی بین آن‌ها چند متر است؟

۲- اگر زاویه‌ی شیب و طول مورب AB به ترتیب ۶ درجه و ۱۲۰ متر باشند، فاصله‌ی افقی AB چند متر است؟

۳- زاویه‌ی شیب بین دو نقطه ۳۰ درجه است. اگر فاصله‌ی افقی بین این دو نقطه $150\sqrt{3}$ باشد، اختلاف ارتفاع این دو نقطه چه قدر است؟

۴- فاصله‌ی مایل بین دو نقطه ۶۰ متر و اختلاف ارتفاع آن‌ها ۳۰ متر است. زاویه‌ی شیب بین این دو نقطه چند درجه است؟

۵- اختلاف ارتفاع بین دو نقطه $13/5$ متر و زاویه‌ی شیب آن‌ها به وسیله‌ی شیب‌سنج ۳۶ گراد قرائت شده است. فاصله‌ی افقی بین دو نقطه را محاسبه کنید.