۴

# چندجمله‌ای‌ها و اتحادها

# تفریق و قرینه‌ی اعداد

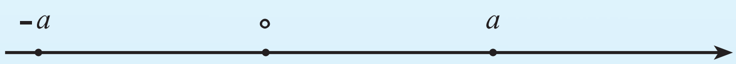
تفریق عمل متقابل عمل جمع است. در یک عمل جمع، مانند ۱۵=۴+۱۱، گوییم، اگر ۴ را به ۱۱ اضافه کنیم حاصل ۱۵ می‌شود، پس اگر ۴ را از ۱۵ کم کنیم، حاصل ۱۱ می‌شود : ۱۱=۴−۱۵.
این قاعده به‌طور کلی برای دو عدد $a$ و $b$ نیز صادق است. اگر $a+b=c$ ، گوییم حاصل تفریق $b$ از $c$ برابر $a$ است و می‌نویسیم $c-b=a$ .

## تمرین در کلاس

۱ــ اگر داشته باشیم $z=x+y$ ، دو تفریق از روی آن بنویسید.

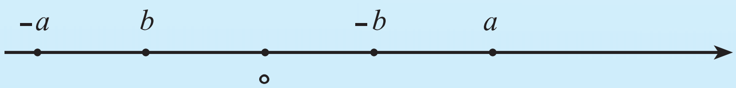
۲ــ پاره‌خطی را به طول $z$ رسم کنید و یک نقطه روی آن درنظر بگیرید. طول یکی از پاره‌خط‌ها را $y$ بنامید و نشان دهید که طول پاره‌خط باقی مانده برابر $z-y$ است.

هر عدد قرینه‌ای دارد که شما در فصل اول با آن آشنا شدید. قرینه یک عدد دلخواه مانند $a$ را با $-a$ نشان می‌دهند.




$-a$ نیز قرینه‌ای دارد که آن را با $-(-a)$ نشان می‌دهند.

## تمرین در کلاس




۱ــ با توجه به شکل بالا علامت (مثبت یا منفی بودن) $a$ و $b$ را تعیین کنید.

۲ــ درستی تساوی $-(-a)=a$ را از روی شکل نشان دهید.

۳ــ قرینه‌ی یک عدد مثبت چه علامتی دارد؟

۴ــ اگر $b=-۳$ ، $(-b)$ چه مقداری دارد؟ علامت $(-b)$ چیست؟ قرینه‌ی یک عدد منفی چه علامتی دارد؟

جمع هر عدد با قرینه‌ی خود صفر است، یعنی برای هر عدد a داریم $a+(-a)=0$ . برای دو عدد a و b می‌توان نشان داد $a-b=a+(-b)$ .

## تمرین در کلاس

الف) درستی تساوی‌های زیر را با ذکر چند مثال بررسی کنید.

۱) $-(a-4)=-a+4$

۲) $-(a-b)=-a+b$

۳) $x-(2+z)=(x-2)-z$

۴) $x-(y+z)=(x-y)-z$

۵) $x(y-z)=xy-xz$

۶) $(x-y)^2=(y-x)^2$

ب) تساوی‌های زیر را با زبان فارسی توضیح دهید.

۱) $-(a+b)=-a-b$

۲) $(-x)y=x(-y)=-xy$

۳) $(-x)(-y)=xy$

۴) $(-a)^2=a^2$

ج) تفاوت دو عبارت $-a^2$ و $(-a)^2$ را توضیح دهید.

## تقسیم و معکوس اعداد

تقسیم، یکی دیگر از اعمال بین اعداد حقیقی است که متقابل عمل ضرب است. در یک عمل ضرب مانند $۴\times۱۲=۴۸$ ، گوییم اگر ۴ را در ۱۲ ضرب کنیم ۴۸ می‌شود، پس اگر ۴۸ را بر ۴ تقسیم کنیم حاصل ۱۲ می‌شود و می‌نویسیم : $۱۲=\frac{۴۸}{۴}$ .

در تقسیم عدد a بر عدد b، به دنبال عددی می‌گردیم که اگر آن را در b ضرب کنیم حاصل برابر a شود. اگر b مخالف صفر باشد چنین عددی وجود دارد و آن را با استفاده از خط کسری به صورت $\frac{a}{b}$ نشان می‌دهیم. بنابراین، اگر $\frac{a}{b}=c$ ، این به معنای آن است که $bc=a$ .

تقسیم a بر b را به صورت $a\div b$ نیز نشان می‌دهیم، پس $a\div b=\frac{a}{b}$ . هر وقت از تقسیم برعددی سخن می‌گوییم فرض بر آن است که آن عدد مخالف صفر است.

معکوس یک عدد، عددی است که اگر در آن ضرب شود، حاصل ۱ شود. برای مثال، معکوس عدد ۴، عدد $\frac{۱}{۴}$ است، زیرا $۴\times\frac{۱}{۴}=۱$ . معکوس عدد $(-۳)$ ، عدد $(-\frac{۱}{۳})$ است، زیرا $(-۳)\times(-\frac{۱}{۳})=۱$ .

صفر معکوس ندارد و معکوس یک عدد مخالف صفر a، عدد $\frac{۱}{a}$ است.

$$\boxed{a\times\frac{۱}{a}=۱}$$

**تمرین در کلاس**

الف) تساوی‌های زیر را به زبان فارسی توضیح دهید. در عبارت‌های زیر فرض بر آن است که مخرج‌ها مخالف صفر هستند.

۱) $\frac{a}{b}=a\times\frac{۱}{b}$

۲) $c\times\frac{a}{b}=\frac{ca}{b}$

۳) $\frac{a}{b}=\frac{ca}{cb}$

۴) $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

۵) $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$

۶) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

ب) عبارت‌های زیر را به صورت یک کسر بنویسید.

۱) $۲+\frac{۱}{a}$

۲) $\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}$

۳) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

۴) $۲-\frac{۱}{x-۱}$

یکی از روش‌های بررسی تساوی دو عدد گویا، مانند $\frac{۶}{۹}$ و $\frac{۱۰}{۱۵}$، این است که مخرج هر کسر را در صورت کسر دیگر ضرب کنیم. با این عمل دو عدد به‌دست می‌آید که اگر مساوی بودند می‌توان نتیجه گرفت که این کسرها مساویند، در غیر این‌صورت این کسرها مساوی نیستند. در این مثال، چون $۶\times۱۵=۱۰\times۹$ این دو کسر مساویند.

به‌طور کلی این مطلب برای دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برقرار است، یعنی اگر $ad=bc$ ، این دو کسر مساوی‌اند و در غیراین‌صورت مساوی نیستند.

**مثال:** دو کسر $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ برابرند زیرا حاصل‌ضرب صورت هر کسر در مخرج کسر دیگر، مقدارهایی مساویند.

## مسائل

۱ــ اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند و c مخالف صفر باشد، ثابت کنید $c(\frac{a}{c}+\frac{b}{c})=a+b$ . از این تساوی نتیجه بگیرید که : $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ .

۲ــ اگر a و b دو عدد مخالف صفر باشند، نشان دهید معکوس $\frac{a}{b}$ عدد $\frac{b}{a}$ است.

۳ــ اگر a و b و c و d چهار عدد باشند و b و c و d مخالف صفر باشند، با استفاده از مسئلهٔ (۲) نشان دهید که :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

۴ــ اگر a و b و c و d چهار عدد حقیقی باشند که b و d مخالف صفر باشند، نشان دهید که :

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

## عبارت‌های جبری

**فعالیت**

مستطیلی رسم کنید و طول و عرض آن را x و y بنامید.

۱ــ مساحت و محیط این مستطیل را برحسب x و y بنویسید.

۲ــ طول قطر این مستطیل را برحسب x و y بنویسید.

۳ــ قطر مستطیل، مستطیل را به دو مثلث مساوی تقسیم می‌کند. محیط و مساحت این مثلث‌ها را بنویسید.

در عبارت‌هایی که در بالا به دست آورده‌اید، نمادهای x و y به کار رفته‌اند که هر یک نشان‌دهنده‌ی عدد دلخواهی هستند.

نمادهایی که اعداد دلخواهی را نشان می‌دهند، متغیر می‌نامند، زیرا به جای آن‌ها هر عددی می‌توان قرار داد.

هرکدام ازعبارت‌هایی که در فعالیت بالا به‌دست آورده‌اید، به صورت محاسباتی روی متغیرهای x و y، از طریق اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و توان رسانی و ریشه‌گیری بوده است. این اعمال را **اعمال جبری** و عبارت‌های به‌دست آمده را **عبارت‌های جبری** می‌نامند. در حالت خاص، یک عدد را هم به عنوان یک عبارت جبری می‌پذیریم.

**مثال:** هریک ازعبارت‌های زیر، یک عبارت جبری هستند.

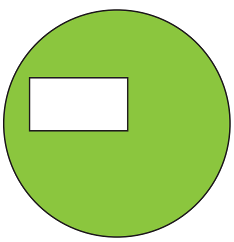
$$x+y \quad , \quad ۲x+۵a \quad , \quad \frac{۱}{۲} \quad , \quad \frac{۱}{۲}x-۴x^۲$$

$$\pi r^۲-xy \quad , \quad \sqrt{۳} \quad , \quad -۳y+\sqrt{۳}x^۲ \quad , \quad a+b+\sqrt{a^۲+b^۲}$$

هر عبارت جبری نشان‌دهنده عددی است که با جایگذاری مقدار متغیرهایش معین خواهد شد.

**مثال:** عبارت جبری $۲(a+b)$ دارای دو متغیر a و b است. اگر به جای a و b اعداد مثبتی قرار دهیم، مقدار این عبارت جبری نشان‌دهنده‌ی محیط مستطیلی است به طول a و عرض b. مقدار این عبارت جبری به ازای $a=۳$ و $b=۵$ برابر است با $۲\times(۳+۵)=۱۶$ و مقدار این عبارت جبری به ازای $a=۶$ و $b=۱۲$ برابر است با $۲\times(۶+۱۲)=۳۶$.

**مثال:** در شکل روبرو از سطح دایره‌ای به شعاع r ، سطح مستطیلی به طول x و عرض y برداشته شده است. مساحت قسمت رنگی یک



عبارت جبری با متغیرهای x و y و r به صورت $\pi r^۲ - xy$ است. توجه داشته باشید که $\pi$ یک عدد مشخص است و متغیر نیست.

مقدار این عبارت جبری به ازای $x=۲$ و $y=۵$ و $r=۱۰$ برابر است با $\pi \times ۱۰^۲ - ۲\times ۵ = ۱۰۰\pi - ۱۰$.

**مثال:** $a+b+\sqrt{a^۲+b^۲}$ یک عبارت جبری با متغیرهای a و b است. به ازای مقادیر مثبت برای a و b، این عبارت جبری، محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای را نشان می‌دهد که طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه‌ی آن a و b است. مقدار این عبارت جبری به ازای $a=۴$ و $b=۳$ برابر است با $۴+۳+\sqrt{۴^۲+۳^۲} = ۷+\sqrt{۲۵} = ۱۲$.

**مثال:** $x^۲ - y^۲ + z - ۲$ یک عبارت جبری است و به ازای $x=۱$ و $y=\sqrt{۲}$ و $z=-۳$ مقدار آن برابر است با $۱^۲ - (\sqrt{۲})^۲ - ۳ - ۲ = -۶$.

## یک جمله‌ای ها

ساده‌ترین نوع عبارت‌های جبری، آن‌هایی هستند که به صورت ضرب یک عدد در توان‌های صحیح نامنفی (عدد حسابی) از یک یا چند متغیر هستند. این‌گونه عبارت‌ها را **یک جمله‌ای** می‌نامند. برای مثال، عبارت‌های زیر یک جمله‌ای هستند.

$$xy \;,\; ۳ab^۲ \;,\; -۵y^۲z^۳ \;,\; \frac{۲}{۵}a^۳x^۲y \;,\; -\sqrt{۷}aby^۲ \;,\; ۶$$

توجه داشته باشید که یک عدد نیز به تنهایی یک جمله‌ای محسوب می‌شود.

برای مثال، عبارت‌های جبری زیر یک جمله‌ای نیستند.

$$۲x^۲+y \;,\; x\sqrt{y} \;,\; ۳x^۳y^{-۱} \;,\; ۲+x\sqrt{x^۲+۱} \;,\; \frac{x^۴y^۲}{z}$$

در یک جمله‌ای‌ها، عددی که در متغیرها ضرب شده است را **ضریب عددی** آن یک جمله‌ای می‌نامند.

در یک جمله‌ای $۲x^۳y^۴$ توان متغیر x عدد ۳ است، به همین خاطر گوییم درجه این یک جمله‌ای نسبت به متغیر x عدد ۳ است. همچنین درجه این یک جمله‌ای نسبت به متغیر y عدد ۴ است.

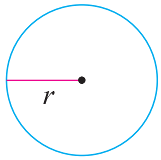
به‌طور کلی، توان متغیری را که در یک جمله‌ای وجود دارد درجه‌ی یک جمله‌ای نسبت به آن متغیر می‌نامند.

**مثال:** اگر شعاع دایره‌ای را r بنامیم، مساحت این دایره $\pi r^۲$ است که یک، یک جمله‌ای با متغیر r و ضریب عددی $\pi$ است. درجه‌ی این یک جمله‌ای نسبت به r عدد ۲ است.

> در یک جمله‌ای‌هایی که فقط یک متغیر وجود دارد، توان آن متغیر را درجه‌ی آن یک جمله‌ای می‌گویند و نیازی به ذکر نام متغیر نیست.

محیط این دایره نیز برابر $۲\pi r$ است که آن هم یک جمله‌ای با متغیر r و ضریب عددی $۲\pi$ است. درجه‌ی

این یک جمله‌ای برابر ۱ است.




**توجه کنید**

اعداد مخالف صفر یک جمله‌ای‌های درجه صفر هستند.

## تمرین در کلاس

۱ــ کدام یک ازعبارت‌های زیر یک‌جمله‌ای هستند. ضریب عددی و درجه هر یک‌جمله‌ای را برحسب متغیر x تعیین کنید. نمادهای حرفی، همگی متغیر هستند.

$$\frac{ab}{x} \quad , \quad \frac{ab}{2} \quad , \quad a\sqrt{b} \quad , \quad 2\sqrt{2}xy \quad , \quad 5y^{-1}x \quad , \quad 4x^2y$$

۲ــ جدول زیر را کامل کنید.

| ضریب عددی | درجه نسبت به x | متغیرها | آیا یک جمله‌ای است؟ | عبارت جبری |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{3}$ | ۲ | x,y,z | بله | $\sqrt{3}x^2yz^3$ |
| | | | | $4xy^3$ |
| | | | | $-a^2x$ |
| | | | | $4\frac{xy}{a}$ |
| | | | | $\frac{4}{7}xa^2b$ |
| | | | | $6y\sqrt{x}$ |

## جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها

در فعالیت زیر می‌خواهیم چگونگی جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها را مورد بررسی قرار دهیم.

## فعالیت

به تساوی زیر توجه کنید :

$$5ax = (3+2)ax = 3ax + 2ax$$

۱ــ در تساوی بالا کدام خاصیت عمل ضرب مورد استفاده قرار گرفته است؟

۲ــ در طرف راست تساوی بالا، دو یک جمله‌ای وجود دارد. اختلاف این دو یک جمله‌ای در چیست؟

۳ــ طرف راست تساوی‌های زیر را مانند تساوی بالا بنویسید.

$$۹ma^۲x=(۷+۲)ma^۲x=\cdots$$

$$۴axy^۲=(۹-۵)axy^۲=\cdots$$

$$۱۲ab^۲x=(۸+۳+۱)ab^۲x=\cdots$$

۴ــ شباهت‌ها و تفاوت‌های یک جمله‌ای‌هایی را که در طرف راست تساوی‌ها به‌وجود می‌آیند مشخص کنید.

یک جمله‌ای‌هایی که قسمت نمادهای حرفی و توان‌های متناظر آن‌ها یکسان است، یک جمله‌ای‌های متشابه می‌نامند.

**مثال:** یک جمله‌ای‌های زیر متشابه‌اند.

$$۹yzx^۲\quad,\quad -x^۲yz\quad,\quad \sqrt{۳}zx^۲y\quad,\quad -\frac{۵}{۹}x^۲zy$$

**مثال:** یک جمله‌ای‌های زیر متشابه نیستند.

$$۲xy\quad,\quad ۵xz\quad,\quad -xya\quad,\quad ۵ab$$

### فعالیت

به تساوی‌های زیر توجه کنید.

$$۴a+۶a=(۴+۶)a=۱۰a$$

$$۷xy^۲-۳xy^۲=(۷-۳)xy^۲=۴xy^۲$$

$$-\frac{۳}{۵}x^۲+x^۲=(-\frac{۳}{۵}+۱)x^۲=\frac{۲}{۵}x^۲$$

۱ــ از کدام خاصیت جمع و ضرب در محاسبات بالا استفاده شده است؟

۲ــ آیا در هر تساوی، یک‌جمله‌ای‌های آن متشابه‌اند؟

۳ــ چه رابطه‌ای بین ضرایب یک‌جمله‌ای‌هایی که در طرفین تساوی‌ها می‌بینید وجود دارد؟

۴ــ با توجه به عملیات بالا، محاسبات مشابهی را برای عبارت‌های زیر انجام دهید.

$$۵x+۲x=\cdots$$

$$۹ab-۳ba=\cdots$$

$$۳xy^۲-۴xy^۲=\cdots$$

$$\frac{۱}{۵}y^۲-\frac{۲}{۷}y^۲=\cdots$$

$$۴xyz+۲yxz-yzx=\cdots$$

۵ــ آیا عبارت $۳ab+۲a$ را می‌توان به شکل یک جمله‌ای نوشت؟ چرا؟

از فعالیت‌های قبل می‌توان نتیجه گرفت :

- دو یا چند یک جمله‌ای متشابه را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد.
- برای جمع یا تفریق یک جمله‌ای‌های متشابه، کافی است ضرایب عددی آن‌ها را با هم جمع یا از هم کم کنیم.
- بین یک جمله‌ای‌هایی که متشابه نیستند نمی‌توان جمع و تفریق انجام داد.

**توجه کنید**

$$\boxed{3x + 5x \neq 8x^2 \quad , \quad 3x + 5y \neq 8xy}$$

## ضرب یک جمله‌ای‌ها

### فعالیت

به تساوی زیر توجه کنید :

$$4xy^3z \times 5x^2ya^3 = (4 \times 5)xx^2y^3zya^3 = 20x^{1+2}y^{3+1}za^3$$

۱ــ در این حاصل ضرب از کدام خاصیت عمل ضرب و قاعده‌ی توان‌رسانی استفاده شده است؟

۲ــ ضرایب عددی یک جمله‌ای‌های طرف چپ تساوی و ضریب عددی یک جمله‌ای طرف راست تساوی چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۳ــ توان‌های هریک از متغیرهای یک جمله‌ای‌های طرف چپ تساوی با توان همان متغیر در طرف راست تساوی چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴ــ محاسبات بالا را برای عبارت‌های زیر نیز انجام دهید.

$$4x^2y^3z^2 \times 2xy^4w = \cdots$$

$$-3x^2a \times \frac{1}{5}ya^2 = \cdots$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که :

در ضرب یک جمله‌ای‌ها، باید ضرایب عددی آن‌ها را در هم ضرب کنیم و توان‌های متغیرهای یکسان آن‌ها را با هم جمع کنیم و متغیرهای غیریکسان را در هم ضرب کنیم.

## تمرین در کلاس

عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت خلاصه کنید.

۱) $-۳x^۲ \times ۵y^۲ =$

۲) $۴x^۲y \times \frac{۱}{۲}xy^۲ =$

۳) $۶xy \times ۲y^۲ \times \frac{۱}{۳}x^۲y =$

## مسائل

۱ــ در عبارت‌های زیر تعیین کنید کدام عبارت یک جمله‌ای است و ضریب عددی آن و درجه‌ی آن را نسبت به هرکدام از متغیرهایش تعیین کنید.

الف) $۴ab^۲$ ، ب) $\frac{۲x}{yz}$ ، ج) $۴x^۲a\sqrt{y}$ ، د) $-\frac{۴}{۵}xyz$ ، هـ) $\frac{x^۲yz^۳}{۲}$

۲ــ در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف) $۹a^۲ = ۴a^۲ + \square$ ب) $۱۲ax = ۱۶ax + \square$

ج) $۲ax + \square = ax$ د) $\frac{ab}{۲} + \square = \frac{۳ab}{۲}$

۳ــ عبارت‌های زیر را در صورت امکان ساده کنید.

الف) $۴x^۲ - ۲x^۲$ ب) $۰/۵t - ۳/۵t$ ج) $۲xy^۲ - xy^۲ + ۵y^۲x$

د) $\frac{ab}{۲} - \frac{ba}{۳}$ هـ) $a^۲b + ۳b^۲a$ و) $۲xyz - ۰/۴yxz - ۱/۶zyx$

۴ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

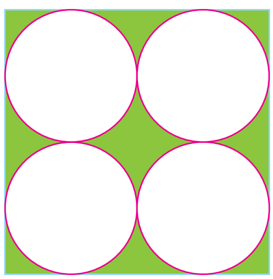
الف) $۴xy \times ۵x^۲y^۳$ ب) $۲xy \times \frac{۱}{۳}x^۲yz^۲$ ج) $(-\frac{۱}{۲}xy^۲)(-\frac{۱}{۳}x^۲y)^۲$

د) $۴x(۲y - ۳)$ هـ) $(۲x + ۴y)x$ و) $\frac{x}{۴}(a + b^۲)$

۵ــ اگر a و b اعدادی باشند به‌طوری که $a + ۲b = ۵$ و $c = ۳$ ، مقدار $a + ۲(b + c)$ چقدر خواهد بود؟

۶ــ از سطح مربع روبرو چهار دایره مساوی خارج شده است، نشان دهید که مساحت قسمت رنگی، به صورت یک‌جمله‌ای با متغیر a است. درجه و ضریب عددی این یک‌جمله‌ای را تعیین کنید.

$۴a$



## چندجمله‌ای‌ها

آن دسته از عبارت‌های جبری که به صورت جمع چند یک جمله‌ای غیرمتشابه هستند را **چندجمله‌ای** می‌نامند. یک جمله‌ای‌ها نیز چندجمله‌ای محسوب می‌شوند.

**مثال:** عبارت‌های زیر چندجمله‌ای هستند.

$$۱۲z^۲ - xy^۵ + \frac{\sqrt{۳}}{۵}yz^۳ - ۱ \quad , \quad -x + yz + ۵x^۲z^۲ + ۳ \quad , \quad ۳x^۲y + ۸xyz - \sqrt{۶}y^۳ + ۱$$

اگر متغیری مانند x در یک چندجمله‌ای وجود داشته باشد، بزرگ‌ترین توانی از x را که در آن چندجمله‌ای وجود دارد درجه‌ی آن چندجمله‌ای نسبت به x می‌نامند.

**مثال:** چندجمله‌ای‌های $x + ۲$ ، $۲xy - y^۲ + z - ۹$ و $\sqrt{۵}z^۳ - \frac{x}{۴}y^۲$ نسبت به x از درجه ۱ هستند.

چندجمله‌ای‌های $xy - x^۲ + ۲$ ، $x^۲ + y^۳ + z^۵ + ۵$ ، $۶zx^۲ + yx - ۳$ نسبت به x از درجه ۲ هستند.

چندجمله‌ای‌های $-۳x^۲y + yx^۳ + xyz + ۵$ ، $x^۳z^۲ - x - y^۲$ نسبت به x از درجه ۳ هستند.

برای نوشتن چندجمله‌ای‌های یک متغیره، روش استاندارد آن است که یک جمله‌ای‌هایی که درچندجمله‌ای‌وجود دارند به ترتیب از بزرگ‌ترین توان تا کوچک‌ترین توان نوشته شوند. این شیوه نوشتن چند جمله‌ای‌های یک متغیره را نمایش استاندارد چندجمله‌ای‌ها می‌نامند. برای مثال، نمایش استاندارد برخی چندجمله‌ای‌ها در زیر آمده است.

| نمایش استاندارد | چندجمله‌ای |
|---|---|
| $۳x^۲ - ۵x + ۱۰$ | $-۵x + ۱۰ + ۳x^۲$ |
| $-y^۵ + ۴y^۳ + y - ۳$ | $۴y^۳ - ۳ - y^۵ + y$ |
| $۲a^۶ + ۸a^۵ - a^۲ + ۱۵$ | $۱۵ - a^۲ + ۲a^۶ + ۸a^۵$ |

## جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها

از آن‌جا که چندجمله‌ای‌ها به‌صورت جمع چند یک جمله‌ای هستند، برای جمع چندجمله‌ای‌ها، کافی است جمله‌های متشابه آن‌ها را با هم جمع کنیم.

**مثال:** جمع دو چندجمله‌ای $xy^۲ + ۴yz - ۸$ و $-۵xy^۲ + z + ۶yz + ۵$ را بنویسید.

$$(xy^۲ + ۴yz - ۸) + (-۵xy^۲ + z + ۶yz + ۵) = xy^۲ - ۵xy^۲ + ۴yz + ۶yz + z - ۸ + ۵$$
$$= -۴xy^۲ + ۱۰yz + z - ۳$$

**مثال:** جمع دو چندجمله‌ای $۴a^۳b^۲ + ۴b - ۱۵$ و $-۴a^۳b^۲ - ۳b + ۷$ را بنویسید.

$$(۴a^۳b^۲ + ۴b - ۱۵) + (-۴a^۳b^۲ - ۳b + ۷) = ۴a^۳b^۲ - ۴a^۳b^۲ + ۴b - ۳b - ۱۵ + ۷ = b - ۸$$

برای ضرب چندجمله‌ای‌ها، ابتدا ضرب یک‌جمله‌ای‌ها در چندجمله‌ای‌ها را بررسی می‌کنیم.

**مثال:** حاصل ضرب یک جمله‌ای $۲xy$ درچندجمله‌ای $x^۲y + ۳xy^۳$ را حساب کنید.

$$۲xy(x^۲y + ۳xy^۳) = ۲xy \times x^۲y + ۲xy \times ۳xy^۳ = ۲x^۳y^۲ + ۶x^۲y^۴$$

در محاسبه‌ی بالا، ابتدا با استفاده از خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع، عبارت به صورت ضرب بین یک‌جمله‌ای‌ها در آمده است، سپس از قاعده‌ی ضرب یک جمله‌ای‌ها استفاده شده است.

**مثال:** حاصل ضرب یک جمله‌ای $-۵a^۲x$ در چندجمله‌ای $x^۲-a^۲$ را حساب کنید.

$$-۵ax^۲(x^۲-a^۲)=(-۵ax^۲)\times x^۲+(-۵ax^۲)\times(-a^۲)=-۵ax^۴+۵a^۳x^۲$$

برای ضرب دو چندجمله‌ای در یکدیگر، تک‌تک جمله‌های یکی از چندجمله‌ای‌ها را درچند جمله‌ای دیگر ضرب می‌کنیم.

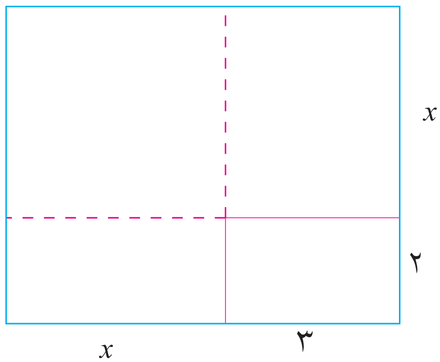
**مثال:** حاصل ضرب چندجمله‌ای $x+۲$ در چندجمله‌ای $x-۱$ را به‌دست آورید.

$$(x+۲)(x-۱)=x(x-۱)+۲(x-۱)=x^۲-x+۲x-۲=x^۲+x-۲$$

علت درستی محاسبه‌ی بالا، خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع است. $(x-۱)$ مانند یک عدد درنظر گرفته شده است و در $x+۲$ ضرب شده است.

**مثال:** مستطیلی با طول ۳ و عرض ۲ را درنظر بگیرید.

اگر طول و عرض این مستطیل را x واحد افزایش دهیم، مساحت آن چقدر می‌شود؟




طول و عرض مستطیل جدید عبارت است از $x+۳$ و $x+۲$. پس مساحت مستطیل جدید برابر است با $(x+۳)(x+۲)$ که ضرب دوچند جمله‌ای است.

$$(x+۳)(x+۲)=x(x+۲)+۳(x+۲)=x^۲+۲x+۳x+۶=x^۲+۵x+۶$$

**مثال:** حاصل ضرب چندجمله‌ای $xy+yz-۲$ در چند جمله‌ای $x^۲+y^۳-۱$ را به‌دست آورید.

$$(xy+yz-۲)(x^۲+y^۳-۱)=xy(x^۲+y^۳-۱)+yz(x^۲+y^۳-۱)-۲(x^۲+y^۳-۱)$$
$$=x^۳y+xy^۴-xy+x^۲yz+y^۴z-yz-۲x^۲-۲y^۳+۲$$

## ابوبکر محمدبن حسین کرجی

ریاضیدان مسلمان (نیمه‌ی دوم قرن چهارم قمری)، از نخستین کسانی بود که عملیات حسابی مانند جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ریشه‌یابی را برای ساختن و ساده کردن عبارات جبری به‌کار برد. او عبارات جبری هم‌چون «مال مال و چهارمکعب و شش کمتر» $(x^۴+۴x^۳-۶)$ را ساخت. کرجی توان‌های مختلف مجهولات در عبارات جبری را «مراتب» می‌نامید که ما نیز امروزه همین کار را می‌کنیم. کرجی دریافت که حاصل‌ضرب $x^n$ در $\frac{۱}{x^n}$ یک می‌شود. با این‌که او می‌دانست $a-(-b)=a+b$ ولی از قانون $-a-(-b)=-(a-b)$ بی‌خبر بود.

## مسائل

۱ــ طول ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع را a نامیده‌ایم. محیط این مثلث را برحسب a حساب کنید. آیا این عبارت یک جمله‌ای است؟ در این صورت ضریب عددی و درجه آن را مشخص کنید.

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(x+y)+(2x+3y)$

ب) $(2x^2+5y)-(x^2+y^2)$

ج) $2x^2+xy+3x^2+yx$

د) $(10k^2-3kt+4k^2)-(3k^2+5kt)$

۳ــ اگر داشته باشیم $A=1-2x^2$ و $B=3x^2-4x+1$ و $C=x^2-x$، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $A-B$ ب) $A+B$ ج) $(A+B)-3C$

د) $C^2$ هـ) $A^2$ و) $C^2-A^2$

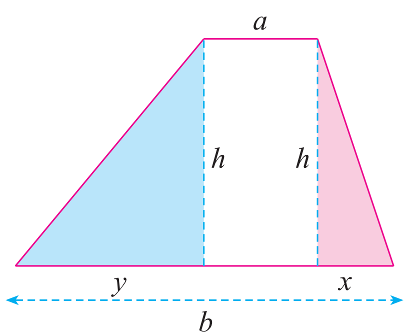
۴ــ حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $4(x+y)$

ب) $2x(x+3)+9x(x-4)$

ج) $(x+1)(x^2-x+1)$

۵ ــ با استفاده از شکل زیر و استفاده از مساحت مثلث‌ها و مستطیل، فرمول مساحت ذوزنقه را که به‌صورت $S=\frac{1}{2}(a+b)h$ است، پیدا کنید.



# اتحادها و تجزیه

### فعالیت

۱ــ به ازای مقادیر داده شده برای x جدول را کامل کنید.

| x | $x^{۲}$ | $۶x$ | $x^{۲}+۶x+۹$ | $(x+۳)^{۲}$ |
|---|---|---|---|---|
| $-۳$ | | | | |
| $-۲$ | | | | |
| ۰ | | | | |
| $\frac{۱}{۲}$ | | | | |
| | | | | |

۲ــ با مقایسه دو ستون آخر جدول چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر جدول را به ازای چند مقدار دیگر برای x ادامه دهیم، چه حدسی برای رابطه‌ی بین دو ستون آخر می‌زنید؟

۳ــ به دلخواه خود چند مقدار دیگر برای x درنظر بگیرید و حدس خود را آزمایش کنید.

۴ــ $(x+۳)^{۲}$ همان حاصل‌ضرب $(x+۳)(x+۳)$ است. این عمل ضرب را انجام دهید و حاصل را با چندجمله‌ای $x^{۲}+۶x+۹$ مقایسه کنید. آیا این بررسی، حدس شما را تأیید می‌کند؟

تساوی $x^{۲}+۶x+۹ = (x+۳)^{۲}$ به ازای هر مقداری از x برقرار است. این‌گونه تساوی‌ها را اتحاد می‌نامند.

> اگر دو عبارت جبری به‌گونه‌ای باشند که به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان، مقدارهای یکسانی داشته باشند، عبارت حاصل از تساوی بین آن‌ها را اتحاد می‌نامند.

### تمرین در کلاس

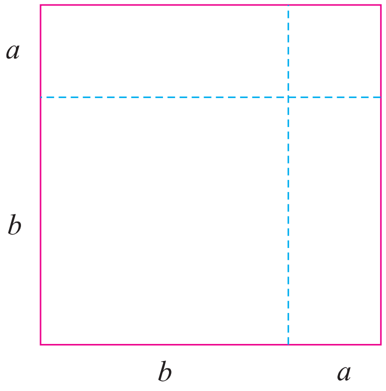
۱ــ توان رسانی را در عبارت $(x+۵)^{۲}$ انجام دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

۲ــ توان رسانی را در عبارت $(۲x-۶)^{۲}$ انجام دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

۳ــ توان رسانی را در عبارت $(a+b)^{۲}$ انجام دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

## فعالیت

یک مربع رسم کنید و ضلع آن را به دو پاره‌خط تقسیم کنید و طول این پاره‌خط‌ها را a و b بنامید.
مساحت این مربع را یک‌بار مستقیماً از طریق طول ضلع آن، و بار دیگر به صورت مجموع مساحت‌های مربع‌ها و مستطیل‌های کوچک‌تر محاسبه کنید و آن‌ها را مساوی یکدیگر قرار دهید.
چه نتیجه‌ای به دست می‌آورید؟




برای هر دو عدد a و b، با محاسبه $(a+b)(a+b)$ نتیجه می‌شود تساوی زیر به ازای هر مقداری برای a و b برقرار است.

$$(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$$

تساوی بالا یک اتحاد است و آن را اتحاد «مربع دوجمله‌ای» می‌نامند.
از آن‌جا که در یک اتحاد، تساوی به ازای هر مقداری ازمتغیرها برقرار است، اگر به جای متغیرها، عبارت‌های جبری نیز قرار دهیم باز هم تساوی برقرار خواهد بود. این عمل را **جایگذاری** می‌نامند.
**مثال:** در اتحاد $(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$ ، به جای a ، xy و به جای b، ۳ قرار می‌دهیم. در نتیجه :

$$(xy+۳)^{۲}=(xy)^{۲}+۲(xy)\times۳+۳^{۲}$$

پس از ساده کردن، تساوی بالا به شکل $(xy+۳)^{۲}=x^{۲}y^{۲}+۶xy+۹$ درمی‌آید. این تساوی نیز یک اتحاد است.

## تمرین در کلاس

اتحاد مربع دو جمله‌ای $(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$ را درنظر بگیرید.

۱ــ در طرفین تساوی، به جای a عبارت ۲x و به جای b عبارت ۳y قرار دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید.

۲ــ در طرفین تساوی، به جای a مقدار (۱−) و به‌جای b عبارت $y^{۲}$ قرار دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید.

۳ــ در طرفین تساوی، به‌جای a عبارت xz و به جای b عبارت (y−) قراردهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید.

اگر در اتحاد مربع دوجمله‌ای $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ به جای b ، $(-b)$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود :

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

این تساوی نیز یک اتحاد است و آن را نیز اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌نامند.

با جایگذاری عبارت‌های دلخواه روی متغیرهای یک اتحاد، اتحادهای دیگری ساخته می‌شوند که آن‌ها را نمونه‌ای از اتحاد اولیه می‌نامند. برای مثال، اتحادهای زیر همگی نمونه‌ای از اتحاد مربع دوجمله‌ای هستند.

$$(x-1)^2=x^2-2x+1 \quad , \quad (xy+4z)^2=x^2y^2+8xyz+16z^2 \quad , \quad (\sqrt{5}-2t)^2=5-4\sqrt{5}t+4t^2$$

## تمرین در کلاس

الف) با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای محل‌های نقطه‌چین را با عبارت مناسب پرکنید.

$(a+1)^2=a^2+\cdots+1$

$(1+b)^2=\cdots+2b+\cdots$

$(x-6y)^2=\cdots$

$(ax-3)^2=\cdots-6ax+\cdots$

$(x^2-yz)^2=\cdots$

ب) محاسبه زیر را درنظر بگیرید و درستی هر مرحله را توضیح دهید.

$(a+b)(x+y)=a(x+y)+b(x+y)=ax+ay+bx+by$

ج) محاسبه بالا را از آخرین تساوی به اولین تساوی مجدداً بنویسید و درستی هر مرحله را توضیح دهید.

اگر اتحاد مربع دوجمله‌ای را به صورت $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ بنویسیم، مانند آن است که یک چندجمله‌ای را که به صورت مجموعی از یک جمله‌ای‌هاست به صورت ضرب دو چندجمله‌ای درآورده‌ایم.

اگر بتوان یک چندجمله‌ای را به صورت ضرب دو یا چند، چندجمله‌ای نوشت به‌طوری که درجه آن‌ها کمتر باشد، گوییم آن چندجمله‌ای را تجزیه کرده‌ایم.

تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها عکس عمل ضرب چندجمله‌ای‌ها است. در عمل ضرب، عبارت‌هایی را که به صورت حاصل ضرب هستند، با انجام عمل ضرب، به صورت جمع چند یک جمله‌ای درمی‌آوریم. ولی در تجزیه، یک چندجمله‌ای را که به صورت جمع چند یک جمله‌ای است، به صورت حاصل ضرب دو یا چند، چند جمله‌ای دیگر درمی‌آوریم.

اگرچه عمل ضرب ساده است ولی عمل تجزیه آسان نیست و فقط در حالت‌های خاص می‌توان آن را انجام داد.

**مثال:** عبارت $x^2-8x+16$ را تجزیه کنید.

این عبارت نمونه‌ای از اتحاد مربع دو جمله‌ای است و داریم $x^2-8x+16=(x-4)^2$ .

اتحادها نقش مهمی در تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها دارند. هر اتحادی در واقع نشان‌دهنده‌ی یک عمل تجزیه است و با استفاده از نمونه‌های این اتحادها می‌توان برخی از تجزیه‌ها را انجام داد.

## تمرین در کلاس

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$x^۲+۱۰x+۲۵\ ,\ \ ۴a^۲+۴ax+x^۲\ ,\ \ x^۲y^۲-۸xy+۱۶\ ,\ \ x^۴-۲x^۲yz+y^۲z^۲$

## مسائل

۱ــ با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$(x+۱)^۲=$ $\qquad (x-۱)^۲=$ $\qquad (۲a+b)^۲=$

$(a-۳b)^۲=$ $\qquad (۲a-۳b)^۲=$ $\qquad (۴a-۲)^۲=$

$(۲x+\frac{۱}{۲})^۲=$ $\qquad (x+۲)^۲-(x-۱)^۲=$

۲ــ عبارت‌های زیر را به صورت حاصل ضرب دو عبارت بنویسید.

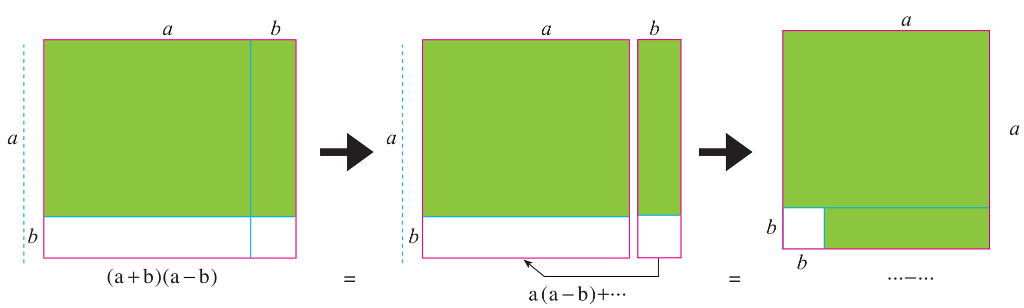
$a^۲+۴a+۴=$ $\qquad y^۲-۶y+۹=$

$۹x^۲-۶x+۱=$ $\qquad x^۲+۲xy+y^۲=$

## فعالیت

دو عدد مثبت a و b را با شرط b < a درنظر بگیرید.

۱ــ از روی شکل زیر در محل‌های نقطه‌چین مساحت قسمت‌های رنگی را بنویسید.




۲ــ اتحادی را که به دست آورده‌اید، بنویسید.

۳ــ عمل ضرب $(a+b)(a-b)$ را انجام دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید. اتحادهای به‌دست آمده را با هم مقایسه کنید.

با محاسبه‌ی مستقیم نتیجه می‌شود :

$$(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$$

این یک اتحاد است و آن را «اتحاد مزدوج» می‌نامند. از این اتحاد نیز در تجزیه‌ی عبارت‌های جبری استفاده می‌شود.

**مثال:**

$$x^۲-۴=x^۲-۲^۲=(x+۲)(x-۲)$$

$$-۲a^۲+۹b^۲=(۳b)^۲-(\sqrt{۲}a)^۲=(۳b-\sqrt{۲}a)(۳b+\sqrt{۲}a)$$

توجه داشته باشید که در تجزیه چندجمله‌ای‌ها، رادیکالی شدن ضرایب عددی اشکالی ندارد و در تجزیه فقط باید چندجمله‌ای‌های با درجه کوچک‌تر به‌دست آوریم.

## تمرین در کلاس

۱ــ با استفاده از اتحاد مزدوج در محل‌های نقطه‌چین عبارت‌های مناسب بگذارید.

$$(x+۴)(x-۴)=x^۲-\cdots$$

$$(۲x+۳)(۲x-۳)=\cdots-۹$$

$$(ab+x)(ab-x)=\cdots$$

$$(x+\cdots)(x-\cdots)=x^۲-\frac{۱}{۴}$$

۲ــ با استفاده از اتحاد مزدوج چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^۲y^۴-۹z^۲ \quad , \quad \frac{x^۲}{۴}-\frac{z^۲}{۹} \quad , \quad ۴x^۲-y^۲ \quad , \quad x^۲-۹$$

استفاده از اتحادها برخی محاسبات با اعداد بزرگ را ساده‌تر می‌کند.

**مثال:** مقدار $۹۹۹^۲$ را حساب کنید.

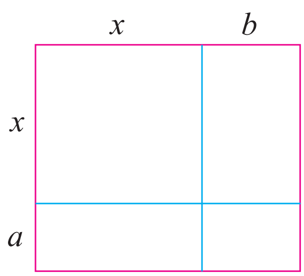
$$۹۹۹^۲=(۱۰۰۰-۱)^۲=(۱۰۰۰)^۲+۱-۲\times۱۰۰۰=۱۰۰۰۰۰۱-۲۰۰۰=۹۹۸۰۰۱$$

**مثال:** مقدار $۹۹۸\times۱۰۰۲$ را حساب کنید.

$$۹۹۸\times۱۰۰۲=(۱۰۰۰-۲)(۱۰۰۰+۲)=(۱۰۰۰)^۲-۲^۲=۱۰۰۰۰۰۰-۴=۹۹۹۹۹۶$$

## فعالیت

برای سه عدد مثبت x و a و b ، مستطیلی به طول x + a و عرض x + b مانند روبه‌رو رسم شده است.




۱ــ مساحت این مستطیل را یک بار از طریق طول و عرض آن و یک بار از طریق مساحت مربع و مستطیل‌های داخل آن حساب کنید و مساحت‌های به‌دست آمده را مساوی قرار دهید. اتحاد

به‌دست آمده را بنویسید.

۲ــ عمل ضرب $(x+a)(x+b)$ را انجام دهید و اتحاد به‌دست آمده را بنویسید. این اتحاد را با اتحاد به‌دست آمده در بالا مقایسه کنید.

با انجام عمل ضرب $(x+a)(x+b)$ نتیجه می‌شود :

$$(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$$

این یک اتحاد است و آن را اتحاد «یک جمله‌ی مشترک» می‌نامند.

**مثال:** چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^۲+۵x+۴=x^۲+(۴+۱)x+۴\times۱$$
$$=(x+۴)(x+۱)$$
$$x^۲-۵x+۶=x^۲+(-۲+(-۳))x+(-۲)\times(-۳)$$
$$=(x-۲)(x-۳)$$

**مثال:** چندجمله‌ای $۲x^۲-۵x-۳$ را تجزیه کنید.

با بررسی این چندجمله‌ای می‌توان فهمید که دو برابر این چندجمله‌ای را راحت‌تر می‌توان تجزیه کرد. اگر این چندجمله‌ای را $A$ بنامیم، داریم :

$$۲A=۴x^۲-۱۰x-۶=(۲x)^۲-۵(۲x)-۶=(۲x+۱)(۲x-۶)$$
$$A=\frac{(۲x+۱)(۲x-۶)}{۲}=(۲x+۱)(x-۳)$$

تمرین در کلاس

۱ــ با استفاده از اتحاد یک جمله‌ی مشترک حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$(x+۱)(x+۲)=$

$(۲x-۱)(۲x+۴)=$

$(ax+۵)(ax+b)=$

$(x-a)(x-b)=$

۲ــ با استفاده از اتحاد یک جمله‌ی مشترک چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$x^۲+۴x+۳ \quad , \quad x^۲+x-۲ \quad , \quad x^۲-۶x+۸$

۳ــ چندجمله‌ای زیر را تجزیه کنید.

$۳x^۲+۵x-۲$

## فعالیت

۱ــ محاسبه‌ی زیر را انجام دهید و از طریق آن یک اتحاد بنویسید.

$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=$$

۲ــ در اتحاد به‌دست آمده در بند (۱) به‌جای b، $(-b)$ قرار دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

۳ــ محاسبه‌ی زیر را تکمیل کنید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

$$(a+b)^۳=(a+b)^۲(a+b)=$$

۴ــ در اتحاد به‌دست آمده در بند (۳) به‌جای b، $(-b)$ قرار دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

تساوی‌های زیر به‌ازای هر مقداری از a و b برقرارند و آن‌ها را اتحادهای تفاضل و مجموع مکعب دو جمله می‌نامند.

$$a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$$
$$a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$$

تساوی‌های زیر به‌ازای هر مقداری از a و b برقرارند و آن‌ها را اتحاد مکعب دوجمله‌ای می‌نامند.

$$(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳$$
$$(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$$

**مثال ۱:** $(۲x-۱)(۴x^۲+۲x+۱)=(۲x)^۳-۱^۳=۸x^۳-۱$

**مثال ۲:** $(a+۲b)(a^۲-۲ab+۴b^۲)=a^۳+(۲b)^۳=a^۳+۸b^۳$

**مثال ۳:**
$$(۲a-۳b)^۳=(۲a)^۳+۳(۲a)^۲(-۳b)+۳(۲a)(-۳b)^۲+(-۳b)^۳$$
$$=۸a^۳-۳۶a^۲b+۵۴ab^۲-۲۷b^۳$$

**مثال ۴:**
$$(\frac{a}{۳}-\frac{b}{۲})^۳=(\frac{a}{۳})^۳-۳(\frac{a}{۳})^۲(\frac{b}{۲})+۳(\frac{a}{۳})(\frac{b}{۲})^۲-(\frac{b}{۲})^۳$$
$$=\frac{a^۳}{۲۷}-\frac{a^۲b}{۶}+\frac{ab^۲}{۴}-\frac{b^۳}{۸}$$

**مثال ۵:** عبارت $x^۶-۱$ را تجزیه کنید.

$$x^۶-۱=(x^۲)^۳-۱$$
$$=(x^۲-۱)(x^۴+x^۲+۱)$$
$$=(x-۱)(x+۱)(x^۴+x^۲+۱)$$

## تمرین در کلاس

۱ــ با استفاده از اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$(x+2)(x^2-2x+4)=$

$(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)=$

$(x+5)^3=$

۲ــ با استفاده از اتحادها چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$x^3+8 \quad , \quad 27x^3-\frac{1}{8} \quad , \quad a^6-64b^6$

## مسائل

۱ــ کدام یک از تساوی‌های زیر اتحاد هستند؟

$x+x=2x$

$x+x=x^2$

$x^4-x^2=x^2(x-1)(x+1)$

۲ــ با استفاده از اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$(2x-4)(2x+3)=$ 　 $(x-1)(x+5)=$ 　 $(x+1)(x+2)=$

$(\frac{1}{2}-x)(\frac{1}{2}+x)=$ 　 $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=$

۳ــ به کمک اتحادها عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$4x^2-9=$ 　 $2-a^2=$ 　 $x^2-a^2=$

$a^2x^2-b^2y^2=$ 　 $16x^2-36y^2=$ 　 $\frac{x^2}{4}-\frac{1}{25}=$

$x^2+2\sqrt{2}\,x+2=$ 　 $x^2-7x+12=$ 　 $x^2-(a+b)x+ab=$

۴ــ حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

$(x+3)(x^2-3x+9)=$ 　 $(x-2)(x^2+2x+4)=$

$(x+1)^3=$ 　 $(2x+1)(4x^2-2x+1)=$

$(a-2)^3=$ 　 $(2a+1)^3=$

۵ــ به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را به صورت ضرب دو یا چند عبارت بنویسید.

$x^{۳}+۱=$

$x^{۳}-۲۷=$

$x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱=$

$a^{۳}+۸b^{۳}=$

$y^{۳}-۶y^{۲}+۱۲y-۸=$

۶ــ چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$x^{۸}-۱$

$x^{۴}-۲x^{۲}+۱$

$x^{۴}+x^{۲}-۲$

$x^{۶}-۳x^{۴}+۳x^{۲}-۱$

۷ــ برای اعداد مثبت a ، b و c، با رسم یک شکل ثابت کنید :

$$(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲ab+۲ac+۲bc$$

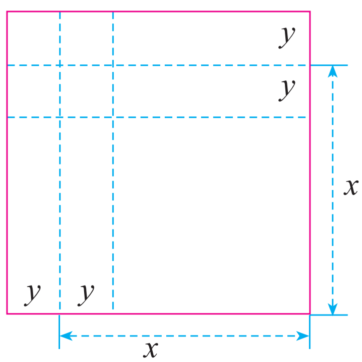
این تساوی را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای ثابت کنید. اگر به جای b ، $(-b)$ قرار دهیم نتیجه بگیرید :

$$(a-b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}-۲ab+۲ac-۲bc$$

۸ــ با استفاده از اتحاد مزدوج، تساوی زیر را ثابت کنید :

$$(x+y)^{۲}-(x-y)^{۲}=۴xy$$

تساوی بالا را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای ثابت کنید. در حالتی که x و y اعداد مثبتی باشند، و $x>y$ ، تساوی بالا را به کمک شکل زیر ثابت کنید.




ابوبکر محمدبن حسین کرجی فرمول زیر را اثبات کرده است :

$$\sqrt{A+B}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^{۲}-B^{۲}}}{۲}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^{۲}-B^{۲}}}{۲}}$$

آیا می‌توانید به کمک اتحادها این فرمول را ثابت کنید؟ (A و B اعدادی مثبت هستند و $B<A$)