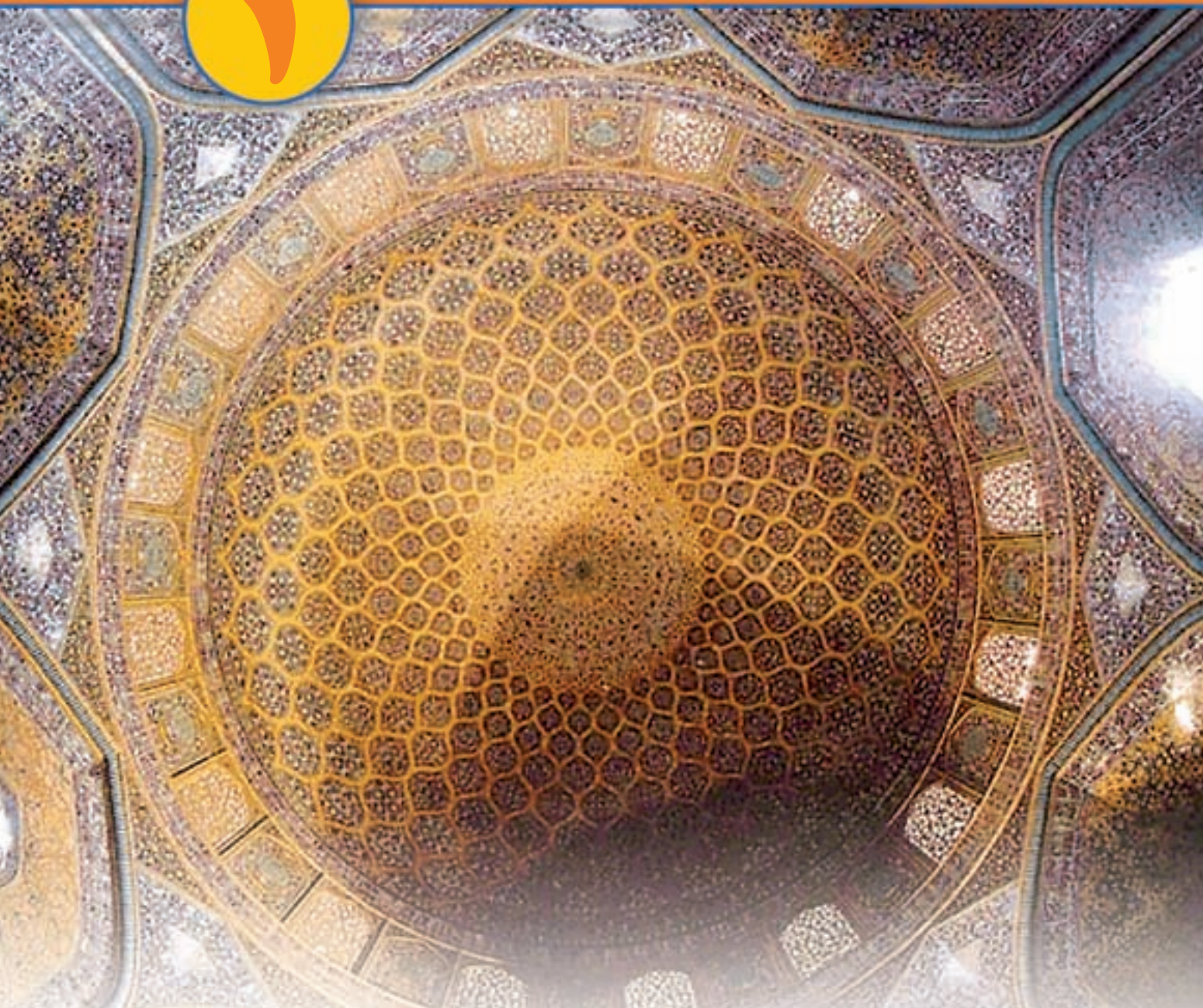
۱

اعداد و نمادها



عدد، هندسه، تقارن و تعالی

ریاضیات و کاربردهای آن بر دو پایه اساسی اعداد و هندسه و ارتباط بین این دو استوار است. علاوه بر استفاده های بی شمار اعداد و هندسه در علوم تجربی و علوم نظری، این مفاهیم در معماری و هنر نیز به کار می آیند. جایی که عظمت و ظرافت در هم می آمیزند و ما را به تعالی می رسانند.

اعداد طبیعی

عدد یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است. تعداد افراد، میزان سود و زیان، حجم اشیاء، وزن اجسام، مساحت زمین، طول قد، درجه‌ی حرارت و بسیاری چیزهای دیگر همگی با اعداد نشان داده می‌شوند. شناخت بشر از اعداد و نمایش آن‌ها، از ابتدا به‌گونه‌ای که امروز می‌بینیم نبوده است.

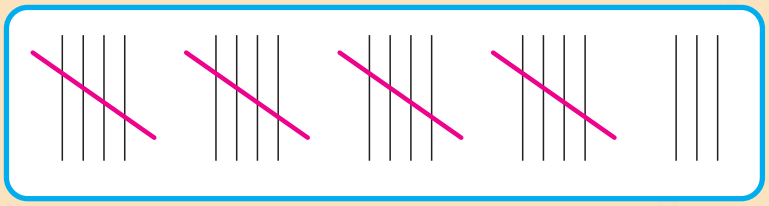
خواندنی‌ها

شمارش یکی از اولین نیازهای بشر بوده است. برخی از انسان‌های قبایل بدوی فقط اعداد ۱ و ۲ و ۳ را می‌شناختند و اعداد بزرگ‌تر از ۳ را «خیلی» می‌گفتند.

با گذشت زمان، شناخت بشر از اعداد بیشتر شد و او راه‌هایی برای نمایش اعداد بزرگ‌تر کشف کرد.

به‌نظر شما، اگر فردی تعداد زیادی گوسفند می‌داشت، چگونه می‌توانست تعداد آن‌ها را به‌دست آورد و آن را در جایی ثبت کند؟ یک فرد چگونه می‌توانست تعداد روزهایی که در محلی حضور داشته است را ثبت کند؟

می‌توان گفت، احتمالاً او تعداد گوسفندان خود را با تعداد سنگ‌ریزه‌هایی که در تناظر با گوسفندان بودند نگهداری می‌کرد، به این شکل که با هر بار ورود یک گوسفند به آغل یا خروج یک گوسفند از آغل، یک سنگ‌ریزه را از یک کیسه به کیسه‌ی دیگر وارد می‌کرد. در مورد تعداد روزها هم از روش شیارکشیدن روی یک سنگ یا چوب استفاده می‌کرد. این روش امروزه نیز برای نمایش تعداد اشیاء به‌کار می‌رود.



شیارهای بالا عدد ۲۳ را نشان می‌دهند.

در حساب کردن، مسئله فقط ثبت و نمایش اعداد نبود، بلکه مسائل پیچیده‌تری مانند جمع و ضرب اعداد، در محاسبه‌ی محیط و مساحت زمین‌ها مطرح شد. جدول صفحه‌ی بعد نمونه‌هایی از شیوه‌های نمایش اعداد، توسط اقوام و تمدن‌های مختلف را نشان می‌دهد.

مایا	رومی	میخی	مصری	بابلی	عدد
	XXI				۲۱
	VIII				۸
	XXXVI				۳۶
	XCVII				۹۷
	CLXXIV				۱۷۴

آیا می‌توانید قواعدی که برای نمایش اعداد طبیعی با این روش‌ها به‌کار رفته است را کشف کنید؟ اگر قواعد عددنویسی رومی را کشف کردید، از یک تا بیست را با این روش بنویسید.

باید دانست که در تمام شیوه‌های عددنویسی اولیه، اعداد ۵ و ۱۰ و ۲۰ نقش اساسی داشتند. این سه عدد، به‌ترتیب تعداد انگشتان یک دست، دو دست و دو دست و دو پا هستند.

همان‌گونه که در جدول بالا می‌بینید تعدادی از این شیوه‌های نمایش اعداد، شبیه شیوه نمایش دهدهی مرسوم خودمان است، با این تفاوت که در این شیوه‌ها، نمایشی برای صفر وجود ندارد. همین موضوع باعث شده است که برای نمایش اعداد تعداد زیادی نماد وارد شود و کار در این شیوه‌ها را مشکل سازد.

وارد شدن صفر در اعداد یک انقلاب بود که ریاضیات را وارد مرحله‌ی جدیدی کرد. اولین بار هندیان بودند که صفر و نمایشی برای صفر را وارد نظام اعداد کردند و پس از آن مسلمانان آن را به جهانیان معرفی کردند. پیشگام این کار ریاضیدان بزرگ ایرانی محمدبن موسی خوارزمی بود.

با ورود صفر به نظام اعداد و قبول آن به‌عنوان یک عدد، نمایش دهدهی اعداد امکان‌پذیر شد. نمایش دهدهی اعداد، انجام چهار عملی اصلی را به شکل بسیار ساده‌ای درآورد. شما این اعمال را در دبستان فرا گرفته‌اید و خوب است توجه داشته باشید که صدها سال طول کشید تا نمایش اعداد و انجام چهار عمل اصلی روی آن‌ها به‌صورت کنونی آن درآید.

شیوه‌ای که امروزه برای نمایش اعداد به‌کار می‌رود، نمایش دهدهی اعداد نام دارد. در این شیوه‌ی نمایش، برای اعداد از صفر تا نُه، نمادهایی به‌عنوان نشانه‌ی این اعداد انتخاب می‌شود. در زبان فارسی این نمادها عبارتند از :

۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹

در زبان‌های دیگر نمادهای دیگری انتخاب شده است. به کمک این نمادها، با استفاده از قاعده دسته‌بندی‌های ده‌تایی، بقیه اعداد نیز نمایش داده می‌شوند. مثلاً، «۱۳۵» نشان‌دهنده تعداد یک دسته صدتایی و سه دسته ده‌تایی و پنج یکی است.

خوب است بدانید که بسیار طول کشید تا صفر کشف و به‌عنوان عدد شناخته شود، به‌همین خاطر، صفر را جزء اعداد طبیعی به‌حساب نمی‌آورند، اگرچه در نمایش دهدهی اعداد طبیعی، صفر نقش مهمی دارد.

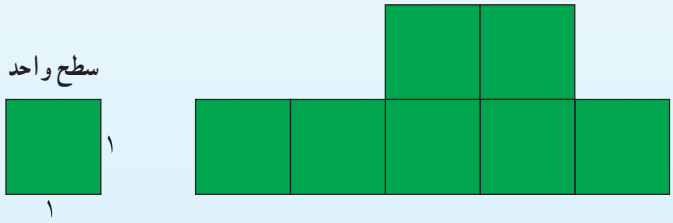
ملامحمدباقر یزدی

دانشمند، ریاضی‌دان، منجم وعالم دینی دوره‌ی صفویه بوده است. او در علوم متداول روزگار خود ازجمله جبر، هندسه و نجوم مهارت داشت به خصوص در علم ریاضی قواعد جدیدی ابداع کرد. ازجمله آثار او می‌توان به کتاب عیون‌الحساب اشاره نمود که در فصلی از این کتاب به محاسبه اعداد متحابه پرداخت (دو عدد را متحابه هم گویند هرگاه مجموع مقسوم‌علیه‌های هریک با دیگری برابر باشد. برای مثال ۲۲۰ و ۲۸۴ دو عدد متحابه‌اند). یزدی قبل از دکارت به این نتیجه رسید که دو عدد ۹۳۶۳۵۸۴ و ۹۴۳۷۰۵۶ متحابه‌اند. از آثار دیگر او می‌توان به حاشیه بر تحریر مخروطات آپولونیوس و شرح کتاب الاشکال الکنزیه و شرح المقالة العاشر من (تحریر) اصول اقلیدس اشاره نمود. او در سال ۱۰۵۶ ق در اصفهان درگذشت.

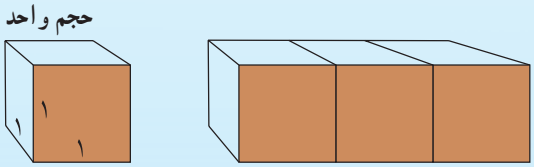
اندازه گیری با اعداد طبیعی

شمارش، یک نوع اندازه‌گیری است که تعداد اشیاء یا چیزها را معلوم می‌کند. هر نوع شمارشی با داشتن یک واحد آغاز می‌شود. به‌عنوان مثال، با انتخاب یک پاره‌خط به‌عنوان پاره‌خط واحد، طول آن را طول واحد درنظر می‌گیریم. با به‌دنبال هم قرار دادن چند پاره‌خط واحد، پاره‌خطی ساخته می‌شود که اندازه‌ی آن با یک عدد طبیعی بیان می‌شود. مثلاً، اندازه‌ی پاره‌خط زیر، با توجه به پاره‌خط واحد انتخاب شده، ۵ واحد طول می‌باشد.

با انتخاب یک طول واحد، مساحت مربعی که طول هر ضلع آن برابر طول واحد است، سطح واحد درنظر گرفته می‌شود و آن را مربع واحد می‌نامند. شکل‌هایی که با کنار هم گذاردن مربع واحد ساخته می‌شوند دارای مساحتی هستند که با اعداد طبیعی قابل اندازه‌گیری هستند. مثلاً، مساحت شکل زیر ۷ واحد سطح است.



با انتخاب طول واحد، حجم مکعبی که طول هر ضلع آن برابر طول واحد است، حجم واحد درنظر گرفته می‌شود. اجسامی که با کنار هم گذاردن مکعب واحد ساخته می‌شوند دارای حجمی هستند که با اعداد طبیعی قابل اندازه‌گیری هستند. مثلاً، حجم جسم زیر ۳ واحد حجم است.



تمرین در کلاس

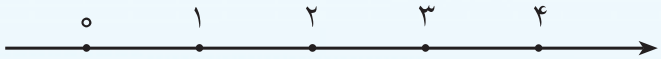
۱ــ کلیه‌ی مستطیل‌هایی که اندازه‌ی محیط آن‌ها ۲۰ سانتی‌متر است و طول و عرض آن‌ها برحسب سانتی‌متر، اعداد طبیعی هستند را رسم کنید.

۲ــ چند مستطیل رسم کردید؟ مساحت هرکدام چقدر است؟

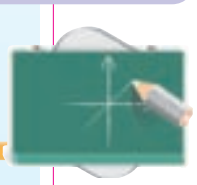
۳ــ کدام مستطیل بیشترین مساحت را دارد؟

اعداد صحیح

یک خط افقی به شکل زیر رسم و نقطه‌ای به عنوان مبدأ روی آن انتخاب می‌کنیم. یک جهت روی این خط انتخاب می‌کنیم و آن را جهت مثبت[1] می‌نامیم. روی این خط، نیم‌خط به ابتدای مبدأ در جهت مثبت را **نیم‌خط مثبت** و نیم‌خط مقابل آن را **نیم‌خط منفی** می‌نامیم. یک پاره‌خط واحد انتخاب می‌کنیم و آن را روی نیم‌خط مثبت، از مبدأ رسم می‌کنیم. با پشت سر هم قرار دادن پاره‌خط‌های واحد، نقاطی به‌دست می‌آیند که آن‌ها را نقاط نظیر اعداد طبیعی می‌نامند.



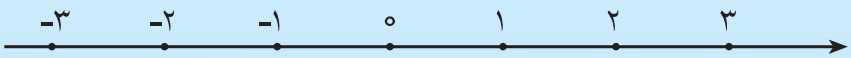
خطی که روی آن، یک مبدأ، یک جهت و یک پاره‌خط واحد انتخاب شده است را یک محور اعداد می‌نامند.



تمرین در کلاس

A و B دو نقطه روی نیم‌خط مثبت هستند. A نظیر عدد ۴ و طول پاره‌خط AB برابر ۶ است. B نظیر کدام عدد طبیعی است؟

اگر پاره‌خط واحد را روی نیم‌خط منفی، از مبدأ رسم کنیم و این رسم را به‌دنبال هم تکرار کنیم، نقاطی به‌دست می‌آیند که آن‌ها را نقاطِ نظیرِ اعدادِ صحیحِ منفی می‌نامند. پس، به‌ازای هر عدد طبیعی، یک عدد صحیح منفی نیز وجود دارد که فاصله‌ی نقاط نظیر آن‌ها تا مبدأ با هم مساوی است. این اعداد را قرینه‌ی هم می‌نامند و قرینه‌ی هر عدد طبیعی به‌صورت همان عدد که علامت منفی «–»، پشت آن قرار گرفته است، نمایش داده می‌شود. مثلاً، قرینه ۲ عدد «۲ –» است و نقاط نظیر آن‌ها، تا مبدأ فاصله مساوی دارند.



۱ــ در خط‌هایی که به‌صورت افقی رسم می‌شوند معمولاً جهت سمت راست را به عنوان جهت مثبت انتخاب می‌کنند.

اعداد طبیعی، صفر و قرینه‌ی اعداد طبیعی با هم را اعداد صحیح می‌نامند. اعداد صحیح مثبت، همان اعداد طبیعی هستند و اعداد صحیح نامنفی همان اعداد طبیعی به همراه صفر هستند. اعداد صحیح نامنفی را اعداد حسابی نیز می‌نامند.

مسائل

۱ــ عملیات ریاضی زیر را انجام دهید.

الف) $۵-۶=$

ب) $۲\times(-۷+۵)=$

ج) $-(-۳)-۵=$

د) $(-۳)\times(-۶-۳)=$

هـ) $(-۳\times۲)\div(۴-۶)=$

۲ــ درآمد ماهیانه خانواده‌ای ۳۵۰،۰۰۰ تومان است، اگر مخارج سالانه‌ی این خانواده ۴،۰۰۰،۰۰۰ تومان باشد، آیا این خانواده می‌تواند پولی را پس‌انداز کند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

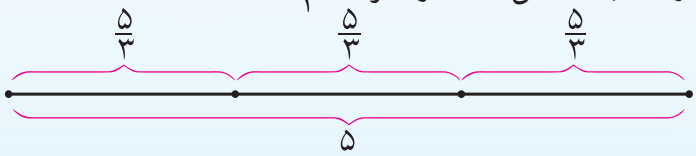
ابوجعفر محمدبن ایوب طبری

ریاضیدان ایرانی (متوفّی پس از ۴۸۵ هـ.ق) از مردم طبرستان (مازندران کنونی) بود. طبری در علم حساب به‌ویژه در تألیفات خود معتقد به معرفی جامع‌نگر فصل‌های گوناگون علم حساب و هندسه بوده است و از این کار هدف تعلیماتی داشته است. از آثار وی می‌توان به شمارنامه و مفتاح‌المعاملات اشاره کرد. یک نسخه خطی از کتاب مفتاح‌المعاملات در کتاب‌خانه ایاصوفیای استانبول موجود است.

اعداد گویا

در بسیاری از اندازه‌گیری‌ها، اعداد صحیح کافی نیستند. به‌عنوان مثال، در اندازه‌گیری وزن، وزن بسیاری از اجسام را نمی‌توان با یک عدد طبیعی نشان داد.

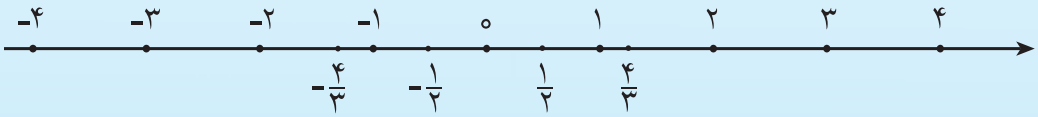
اگر پاره‌خط واحد را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم، طول هریک از دو پاره‌خط به‌دست آمده چقدر است؟ روشن است که طول این پاره‌خط‌ها برابر یک عدد طبیعی نیست و شما قبلاً آن را با $\frac{۱}{۲}$ نشان داده‌اید که نشان‌دهنده‌ی تقسیم ۱ بر ۲ است. همین‌طور اگر پاره‌خطی به طول ۵ را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم، سه پاره‌خط به‌دست می‌آید که طول هریک $\frac{۵}{۳}$ است.



اگر روی محور اعداد، پاره‌خط‌هایی به ابتدای مبدأ و انتهای یک عدد صحیح را درنظر بگیریم و آن‌ها را به چند قسمت مساوی تقسیم کنیم، نقاط تازه‌ای به‌دست می‌آیند که آن‌ها را **نقاطِ نظیرِ اعدادِ گویا** می‌نامند.

اعداد گویا را می‌توان به‌صورت تقسیم یک عدد صحیح بر یک عدد طبیعی نمایش داد.

تقسیم دو عدد بر هم را به‌صورت کسری نشان می‌دهند.



اگر به مکان دو عدد گویا روی محور اعداد توجه کنید، می‌بینید عددی که بزرگ‌تر است، سمت راست عدد کوچک‌تر قرار می‌گیرد. برای آن‌که تشخیص دهیم، از دو عدد گویای مثبت، کدام‌یک بزرگ‌تر است، کافی است آن‌ها را به شکلی بنویسیم که مخرج مساوی داشته باشند. سپس، صورت هرکدام که بزرگ‌تر بود، آن عددِ بزرگ‌تر است.

مثال: از دو عدد $\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۳}{۵}$ کدام بزرگ‌تر است؟

این اعداد گویا را به شکلی می‌نویسیم که مخرج مساوی داشته باشند. برای انجام این کار، کافی است

صورت و مخرج هرکدام را در مخرج دیگری ضرب کنیم.

$$\frac{۴}{۷}=\frac{۴\times۵}{۷\times۵}=\frac{۲۰}{۳۵} \qquad \frac{۳}{۵}=\frac{۳\times۷}{۵\times۷}=\frac{۲۱}{۳۵}$$

با مقایسه بین صورت کسرها نتیجه می‌شود که $\frac{۲۱}{۳۵}>\frac{۲۰}{۳۵}$ ، پس $\frac{۴}{۷}<\frac{۳}{۵}$.

تمرین در کلاس

الف) دو عدد $\frac{۴}{۳}$ و $\frac{۷}{۴}$ را روی محور اعداد مشخص کنید. کدام‌یک بزرگ‌ترند؟

ب) این دو عدد را به‌گونه‌ای بنویسید که مخرج مساوی داشته باشند و سپس تعیین کنید، کدام‌یک بزرگ‌ترند.

ج) از طریق نمایش روی محور اعداد و هم مخرج کردن، تعیین کنید که کدام‌یک از دو عدد $-\frac{۵}{۳}$ و $-\frac{۷}{۵}$ بزرگ‌ترند.

در فعالیت زیر می‌خواهیم نشان دهیم که بین هر دو عدد گویا می‌توان یک عدد گویای دیگر معرفی کرد.

فعالیت

۱ــ یک عدد گویا بین $\frac{۲}{۷}$ و $\frac{۵}{۷}$ نام ببرید.

۲ــ آیا می‌توانید یک عدد گویا بین $\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۵}{۷}$ نام ببرید؟ آیا با ضرب صورت و مخرج هر دو کسر در ۲ می‌توان یک عدد گویا بین آن‌ها معرفی کرد؟ بررسی کنید.

۳ــ یک عدد گویا بین $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۵}{۷}$ نام ببرید.

(**راهنمایی:** ابتدا این دو عدد را به‌گونه‌ای بنویسید که مخرج مساوی پیدا کنند.)

از این فعالیت نتیجه می‌شود که :

بین هر دو عدد گویای متمایز حداقل یک عدد گویای دیگر وجود دارد.

مثال: دو عدد گویا بین عددهای $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۲}{۵}$ بیابید.

صورت و مخرج این کسرها را در ۳ ضرب می‌کنیم. پس، باید بین $\frac{۹}{۱۵}$ و $\frac{۶}{۱۵}$ دو عدد گویا بیابیم. اعداد زیر بین $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۲}{۵}$ می‌باشند.

$$\frac{۷}{۱۵} , \frac{۸}{۱۵}$$

مثال: سه عدد گویا بین عددهای $\frac{۴}{۱۱}$ و $\frac{۵}{۱۱}$ بیابید.

صورت و مخرج این کسرها را در ۴ ضرب می‌کنیم. پس، باید بین $\frac{۱۶}{۴۴}$ و $\frac{۲۰}{۴۴}$ سه عدد گویا بیابیم. اعداد زیر بین $\frac{۴}{۱۱}$ و $\frac{۵}{۱۱}$ می‌باشند.

$$\frac{۱۷}{۴۴} , \frac{۱۸}{۴۴} , \frac{۱۹}{۴۴}$$

بیندیشیم

بین دو عدد گویای متمایز چند عدد گویا می‌توان پیدا کرد؟

مسائل

۱ــ عملیات زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{۲}{۵}-\frac{۳}{۵}=$

ب) $\frac{۴}{۳}+\frac{۲}{۵}=$

ج) $\frac{۵}{۶}-\frac{۵}{۴}=$

د) $۳\frac{۱}{۲}-۲\frac{۲}{۳}=$

هـ) $(۲\frac{۳}{۴})\times(-۳\frac{۱}{۳})=$

و) $(\frac{-۷}{۴}+\frac{۳}{۵})\div\frac{۲۰}{۳۷}=$

۲ــ $\frac{۲}{۵}$ از نصف یک میله‌ی یک متری چند سانتی‌متر است؟

۳ــ حمید دانش‌آموز منظمی است و برای خود برنامه‌ی روزانه دارد. او $\frac{۱}{۳}$ از شبانه‌روز را استراحت می‌کند، ۶ ساعت در مدرسه است، $\frac{۱}{۴}$ شبانه‌روز را به مطالعه‌ی درس‌های خود اختصاص می‌دهد و $\frac{۱}{۸}$ شبانه‌روز را به کارهای پیش‌آمده اختصاص داده است و بقیه‌ی زمان را هم به فعالیت‌های ورزشی می‌پردازد. حمید در یک شبانه‌روز چند ساعت فعالیت‌های ورزشی انجام می‌دهد؟

۴ــ بین هر دو عدد از عددهای گویای زیر، چهار عدد گویای دیگر به‌دست آورید.

الف) $\frac{۲}{۵} , \frac{۳}{۵}$

ب) $\frac{۱}{۳} , \frac{۱}{۲}$

ج) $-\frac{۲}{۳} , -\frac{۳}{۴}$

۵ــ اعداد گویای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{۱}{۳} , \frac{۵}{۲۴} , \frac{۳}{۷}$$

نمایش اعشاری و اعداد اعشاری

با اعداد طبیعی، صحیح و گویا و نمایش آن‌ها روی محور اعداد آشنا شده‌اید.

امروزه برای نوشتن اعداد طبیعی از دستگاه دهدهی استفاده می‌شود. این شیوه از نمایش اعداد طبیعی را نمایش اعشاری اعداد طبیعی نیز می‌نامند. در این شیوه نمایش، هر رقم دارای ارزش مکانی است. مثلاً در عدد ۲۳۷، رقم ۷ در مرتبه یکان و رقم ۳ در مرتبه دهگان و رقم ۲ در مرتبه صدگان است. این به‌معنای آن است که

$$۲۳۷=۲\times۱۰^{۲}+۳\times۱۰+۷\times۱$$

در این شیوه نمایش، همه اعداد طبیعی را می‌توان نمایش داد. برای نوشتن (به نمایش درآوردن) اعداد کمتر از ۱ می‌توانیم ارزش‌های مکانی به اندازه $\frac{۱}{۱۰}$، $\frac{۱}{۱۰^{۲}}$، $\frac{۱}{۱۰^{۳}}$ و... را نیز درنظر بگیریم. برای مشخص کردن رقم‌هایی که در مرتبه $\frac{۱}{۱۰}$، $\frac{۱}{۱۰^{۲}}$،... دارند از علامت ممیز «/» استفاده می‌شود. مثلاً در عدد ۳/۴، رقم ۳ در مرتبه یکان و رقم ۴ در مرتبه $\frac{۱}{۱۰}$ است، یعنی

$$۳/۴=۳+۴\times\frac{۱}{۱۰}$$

به‌عنوان مثالی دیگر در عدد ۳۵/۴۲، رقم ۳ در مرتبه دهگان و رقم ۵ در مرتبه یکان و رقم ۴ در مرتبه $\frac{۱}{۱۰}$ و رقم ۲ در مرتبه $\frac{۱}{۱۰۰}$ است، یعنی

$$۳۵/۴۲=۳\times۱۰+۵\times۱+۴\times\frac{۱}{۱۰}+۲\times\frac{۱}{۱۰۰}$$

اعدادی را که بتوانیم با این شیوه نمایش بنویسیم اعداد اعشاری مثبت می‌نامیم. این اعداد و قرینه آن‌ها را اعداد اعشاری می‌نامند.

اعداد اعشاری بخشی مهم از اعداد گویا هستند. یک عدد اعشاری مثل ۲۵۷۳/۶۳ را می‌توان به‌عنوان عدد گویا به‌صورت زیر نوشت:

$$۲۵۷۳/۶۳=۲۵۷۳+۶\times\frac{۱}{۱۰}+۳\times\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۲۵۷۳۶۳}{۱۰۰}$$

در عدد اعشاری ۲۵۷۳/۶۳، ۲۵۷۳ را قسمت صحیح و ۰/۶۳ را قسمت اعشاری این عدد می‌نامند.

به‌طور کلی، در یک عدد اعشاری مثبت، عدد حسابی قبل از ممیز را قسمت صحیح آن عدد اعشاری می‌نامند و با قرار دادن صفر به‌جای قسمت صحیح، عدد اعشاری ساخته شده را قسمت اعشاری آن عدد می‌نامند.

به‌عنوان مثال، در عدد اعشاری ۲۱/۵۶۴، قسمت صحیح آن ۲۱ و قسمت اعشاری آن ۰/۵۶۴ است. توجه داشته باشید که اعداد طبیعی هم، از یک نظر، عدد اعشاری محسوب می‌شوند. به‌عنوان مثال، عدد طبیعی ۳۵ را می‌توانید به‌صورت ۳۵/۰۰ درنظر بگیرید. قسمت اعشاری اعداد طبیعی صفر است. در تمرین زیر با چند خاصیت مهم اعداد اعشاری آشنا می‌شوید.

تمرین در کلاس

۱ــ قسمت صحیح و قسمت اعشاریِ اعداد زیر را بیابید و هرکدام را به‌صورت یک عدد گویا بنویسید.

الف) ۸۶/۰۰۰ ب) ۴۵۲/۵۰۰ ج) ۰/۰۲۳ د) ۱۲/۱

۲ــ چه ویژگی مشترکی بین مخرج‌های اعداد گویای به‌دست آمده در بالا که یک عدد اعشاری هستند می‌یابید؟

۳ــ در زیر جاهای خالی را با یک عمل ضرب یا تقسیم، مانند نمونه، پر کنید.

۰/۰۳۲۷ $\boxed{\times ۱۰}$ = ۰/۳۲۷	۵۶۲۹۴ $\boxed{\div ۱۰}$ = ۵۶۲۹/۴
۰/۰۳۲۷ $\boxed{}$ = ۳۲/۷	۵۶۲۹۴ $\boxed{}$ = ۵۶/۲۹۴
۰/۰۳۲۷ $\boxed{}$ = ۳/۲۷	۵۶۲۹۴ $\boxed{}$ = ۵۶۲/۹۴
۰/۰۳۲۷ $\boxed{}$ = ۳۲۷	۵۶۲۹۴ $\boxed{}$ = ۵/۶۲۹۴

۴ــ اعداد ۲۴/۳۷، ۲۴/۳۷۰، ۲۴/۳۷۰۰، ۲۴/۳۷۰۰۰ و ۲۴/۳۷۰۰۰۰ را با هم مقایسه کنید. آیا تفاوتی با هم دارند؟ به‌طور کلی در یک عدد اعشاری، در مورد رقم‌های صفر بعد از ممیز که بعد از آن‌ها رقم غیرصفر دیگری قرار ندارد، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

می‌دانید که برای جمع دو عدد اعشاری، آن دو عدد را به‌گونه‌ای زیر هم می‌نویسیم که ممیزهای این اعداد زیر هم قرار بگیرند ؛ سپس، طبق قواعد جمع اعداد طبیعی، با حفظ ممیز در جای خود، عمل جمع را انجام می‌دهیم. مثلاً، برای جمع دو عدد اعشاری ۲۳/۶۷۲ و ۵/۰۸ داریم :

$$\begin{array}{r} ۲۳/۶۷۲ \\ +\ \ ۵/۰۸۰ \\ \hline ۲۸/۷۵۲ \end{array}$$

با نوشتن این دو عدد اعشاری به‌صورت اعدادی گویا با مخرج‌های مساوی که توانی از ۱۰ باشند، درستی روش بالا را می‌توان نشان داد.

تمرین در کلاس

می‌خواهیم حاصل‌ضرب دو عدد اعشاری ۲/۰۷۲ و ۴۶/۳۴ را به‌دست آوریم.

۱ــ دو عدد بالا را به‌صورت اعداد گویایی که مخرج آن‌ها توانی از ۱۰ است بنویسید و به‌صورت دو عدد گویا در یکدیگر ضرب کنید.

۳ــ حاصل‌ضرب به‌دست آمده در بالا را به‌صورت یک عدد اعشاری بنویسید.

۴ــ یک روش برای ضرب اعداد اعشاری پیشنهاد کنید.

در ضرب دو عدد اعشاری کافی است نخست ممیز این اعداد را نادیده بگیریم و آن‌ها را مانند دو عدد طبیعی در هم ضرب کنیم. سپس، به اندازه‌ی مجموع تعداد ارقام بعد از ممیز آن‌ها، در عدد به‌دست آمده، رقم‌های سمت راست را بعد از ممیز قرار دهیم.

مثال: حاصل‌ضرب ۳۲/۰۲۵×۱۴/۱ را به‌دست آورید.

ممیزها را در این اعداد نادیده می‌گیریم و حاصل‌ضرب زیر را حساب می‌کنیم.

$$۳۲۰۲۵\times۱۴۱=۴۵۱۵۵۲۵$$

با توجه به آن‌که اولین عدد، سه رقم و دومین عدد، یک رقم اعشار (بعد از ممیز) دارد برای حاصل‌ضرب به‌دست آمده چهار رقم اعشار درنظر می‌گیریم. پس،

$$۳۲/۰۲۵\times۱۴/۱=۴۵۱/۵۵۲۵$$

در کتاب مفتاح‌المعاملات، مراحل ضرب دو عدد مخلوط، $۲\frac{۱}{۴}$ و $۳\frac{۱}{۳}$ به شکل زیر بیان شده است :

$$۲\frac{۱}{۴}\times۳\frac{۱}{۳}$$

$$۲\frac{۱}{۴}\times۳=۶\frac{۳}{۴}$$

$$۲\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$۶\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۱۲}=۷\frac{۱}{۲}$$

آیا می‌توانید دلیل درستی این روش را بیان کنید؟

مسائل

۱ــ اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$۹/۸۹\times۱۰^{۴} \quad ، \quad ۹۹۰۰۰ \quad ، \quad ۱\times۱۰^{۵} \quad ، \quad ۹۸\times۱۰^{۳}$$

۲ــ اعداد زیر را از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

$$۰/۴۶ \quad , \quad \frac{-۲۶}{۵۰} \quad , \quad ۰/۴۷ \quad , \quad \frac{-۱}{۲} \quad , \quad ۰/۴۸۸ \quad , \quad \frac{۵۰۵}{۱۰۰۰}$$

۳ــ محاسبات زیر را بدون استفاده از ماشین‌حساب انجام دهید. درستی محاسبات خود را با ماشین‌حساب کنترل کنید. (در صورت داشتن ماشین‌حساب)

۱) $۰/۵۵-۰/۱۹=$

۲) $۰/۸۴-۰/۰۰۳=$

۳) $-۲+۰/۴=$

۴) $۰/۰۴\times۱۲=$

۵) $۲/۵۵\times۱/۲=$

۶) $۲۲۰\div۰/۰۵=$

۷) $۳/۶\times۱۰^{۲}-۲/۵\times۱۰^{۲}=$

۸) $۸/۶۵\times۱۰^{۳}+۲/۹۲\times۱۰^{۳}=$

اعداد حقیقی

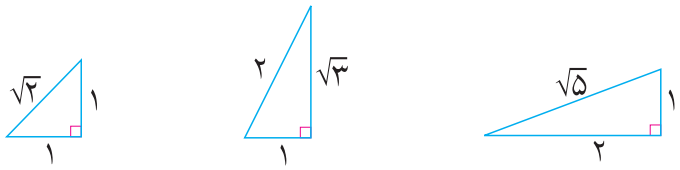
نزدیک به ۲۵۰۰ سال پیش، فیثاغورس، دانشمند یونانی، مکتبی را بنیان نهاد که برای اعداد صحیح اهمیت بسیاری قائل می‌شد. بنا به اعتقاد فیثاغورسیان طول هر پاره‌خطی باید یک عدد گویا باشد. روزی یکی از آن‌ها متوجه شد که طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول دو ضلع دیگر آن ۱ است، طبق قضیه‌ی فیثاغورس $\sqrt{۲}$ است که عددی گویا نیست. این برای فیثاغورسیان ابداً خوشایند نبود، با این‌حال $\sqrt{۲}$ طول یک پاره‌خط بود.

نظیر هر عدد گویا نقطه‌ای روی محور اعداد می‌توان یافت. آیا هر نقطه روی محور اعداد نظیر یک عدد گویا است؟ بر روی محور اعداد نقاطی وجود دارند که نظیر هیچ عدد گویایی نیستند. این‌گونه نقاط، اعدادی را نشان می‌دهند که آن‌ها را **اعداد گنگ** می‌نامند. اعداد گنگ و اعداد گویا را با هم، «**اعداد حقیقی**» می‌نامند.

با استفاده از نماد $\sqrt{\ }$ (رادیکال) که به معنای جذرگیری است، اعداد گنگ بسیاری را می‌توان معرفی کرد. برای مثال، $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ اعدادی گنگ هستند. π نیز عددی گنگ است.

تمرین در کلاس

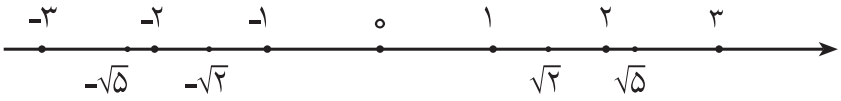
۱ــ توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلث‌های قائم‌الزاویه زیر را رسم کرد و پاره‌خط‌هایی با طول‌های $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ ساخت.



۲ــ با استفاده از رسم‌های بالا، روی محور اعداد، نقاط نظیر اعداد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ را بیابید.

اگر دو نقطه، یکی روی نیم‌خط مثبت و یکی روی نیم‌خط منفی انتخاب کنیم به‌طوری که فاصله‌ی آن‌ها تا مبدأ مساوی باشند، اعداد نظیر این نقاط را دو عدد قرینه هم می‌نامند. هر نقطه روی نیم‌خط منفی نشان‌دهنده‌ی یک عدد حقیقی منفی است و قرینه‌ی یک عدد حقیقی مثبت می‌باشد. قرینه هر عدد حقیقی

را مانند اعداد گویا با گذاشتن علامت منفی «−»، در سمت چپ آن نشان می‌دهند. اعداد حقیقی مثبت را به همراه صفر، اعداد حقیقی نامنفی می‌نامند.



در تمرین زیر می‌خواهیم با محور اعداد حقیقی بیشتر آشنا شویم.

تمرین در کلاس

۱ــ یک محور اعداد حقیقی رسم کنید و روی آن، نقاط متناظر اعداد ۱، ۲، ۳، $\frac{۱}{۲}$، $۱+\sqrt{۵}$، $۱-\sqrt{۵}$، $-۱-\sqrt{۵}$ و $-۱-\sqrt{۵}$ را بیابید.

۲ــ اگر عددی از عدد دیگری بزرگ‌تر باشد، مکان هریک از آن دو روی محور اعداد نسبت به دیگری چگونه است؟ اگر عددی را با عدد مثبتی جمع کنیم، مکان آن روی محور اعداد چه تغییری می‌کند؟ حاصل از عدد قبلی بزرگ‌تر می‌شود یا کوچک‌تر؟

۳ــ اعداد بند اول همین تمرین را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

برای بیان این‌که یک عدد از عدد دیگر کوچک‌تر است از علامت «<» یا «>» استفاده می‌کنیم. برای مثال برای بیان این‌که ۲ از ۳ کوچک‌تر است، می‌نویسیم ۳>۲. این مطلب را به‌صورت ۲<۳ نیز می‌توانیم بنویسیم.

گاهی اوقات برای سادگی در نوشتن دو نامساوی مانند ۵>۴ و ۴>۱، هر دوی آن‌ها را همزمان به‌صورت ۵>۴>۱ نیز می‌نویسیم.

فعالیت

۱ــ نقاط نظیر اعداد ۳ و ۵ و ۱۲ را روی محور اعداد درنظر بگیرید. فاصله‌ی این نقاط تا مبدأ چقدر است؟

۲ــ چه رابطه‌ای بین فاصله‌ی این اعداد تا مبدأ و خود این اعداد مشاهده می‌کنید؟

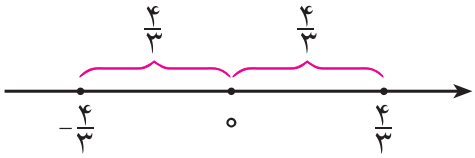
۳ــ نقاط نظیر اعداد (−۳) و (−۵) و (−۱۲) را روی محور اعداد درنظر بگیرید. فاصله‌ی این نقاط تا مبدأ چقدر است؟

۴ــ چه رابطه‌ای بین فاصله‌ی این اعداد تا مبدأ و خود این اعداد مشاهده می‌کنید؟

۵ــ نتیجه‌ای که به‌دست آورده‌اید را برای یک عدد دلخواه مثبت و یک عدد منفی دلخواه جداگانه بیان کنید.

فاصله‌ی نقطه‌ی نظیر یک عدد حقیقی روی محور اعداد تا مبدأ را **قدرمطلق** آن عدد می‌نامند.

مثال: فاصله‌ی نقاط نظیر دو عدد $\frac{۴}{۳}$ و $(-\frac{۴}{۳})$ تا مبدأ برابر $\frac{۴}{۳}$ است، پس قدرمطلق هر دو عدد $\frac{۴}{۳}$ و $(-\frac{۴}{۳})$ برابر $\frac{۴}{۳}$ است.



قدرمطلق را با استفاده از نماد | | نشان می‌دهند.

به‌عنوان مثال، قدرمطلق $(-\frac{۴}{۳})$ را با $|-\frac{۴}{۳}|$ و قدرمطلق $\frac{۴}{۳}$ را با $|\frac{۴}{۳}|$ نشان می‌دهند که هر دو، برابر $\frac{۴}{۳}$ هستند.

مثال: قدرمطلق اعداد $-\frac{۴}{۳}$ ، -۴ ، $-\pi$ ، $-\sqrt{۷}$ و قرینه‌ی آن‌ها به شکل زیر است.

$$|-\sqrt{۷}|=|\sqrt{۷}|=\sqrt{۷} \quad , \quad |-\pi|=|\pi|=\pi \quad , \quad |-۴|=|۴|=۴ \quad , \quad |-\frac{۴}{۳}|=|\frac{۴}{۳}|=\frac{۴}{۳}$$

قدرمطلق اعداد مثبت برابر خود آن اعداد است زیرا فاصله‌ی یک عدد مثبت تا مبدأ برابر همان عدد است و قدرمطلق هر عدد منفی، قرینه‌ی آن است. درحالت کلی، قدرمطلق هر عددی، عددی نامنفی است.

مثال: $۱-\sqrt{۲}$ عددی منفی است، پس $|۱-\sqrt{۲}|=-(۱-\sqrt{۲})=\sqrt{۲}-۱$، همچنین $\sqrt{۳}-\sqrt{۵}$ عددی منفی است، پس $|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|=\sqrt{۵}-\sqrt{۳}$

تقریب‌های اعشاری اعداد حقیقی

$\sqrt{۲}$ عددی گنگ است، ولی می‌توانیم اعدادی اعشاری را که نزدیک به آن باشد، بیابیم. برای مثال، ۱/۴ به $\sqrt{۲}$ نزدیک است و ۱/۴۱ به $\sqrt{۲}$ نزدیک‌تر است و ۱/۴۱۴ به $\sqrt{۲}$ بیشتر نزدیک است. این اعداد اعشاری را تقریب‌های اعشاری $\sqrt{۲}$ می‌نامند. برای هر عدد حقیقی می‌توان از این تقریب‌های اعشاری یافت و هرچه عدد اعشاری به عدد حقیقی نزدیک‌تر باشد، دقت تقریب بالاتر است.

مثال: $\frac{۱}{۳}$ برابر هیچ عدد اعشاری نیست، ولی می‌توانیم تقریب‌های اعشاری آن را به‌دست آوریم. $\frac{۱}{۳}$ با دقت یک رقم اعشار برابر است با ۰/۳ و با دقت دو رقم اعشار برابر است با ۰/۳۳ و با دقت سه رقم اعشار برابر است با ۰/۳۳۳. دقت این تقریب‌ها را هر چقدر که لازم باشد می‌توانیم بالا ببریم.

مثال ۱: تقریب اعشاری $\frac{۲}{۷}$ تا سه رقم اعشار چیست؟

۲ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم و خارج‌قسمت را تا سه رقم اعشار محاسبه می‌کنیم. $\frac{۲}{۷}$ با دقت یک رقم اعشار برابر است با ۰/۲، با دقت دو رقم اعشار برابر است با ۰/۲۸، و با دقت سه رقم اعشار برابر است با ۰/۲۸۵.

مثال ۲: $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ دو عدد گنگ هستند و $\sqrt{۲}$ با دقت چهار رقم اعشار برابر است با ۱/۴۱۴۲ و $\sqrt{۳}$ با دقت چهار رقم اعشار برابر است با ۱/۷۳۲۰.

مثال ۳: π یک عدد گنگ است و با دقت دو رقم اعشار برابر است با ۳/۱۴. دقت این تقریب را تا هر قدر که بخواهیم می‌توانیم بالا ببریم. مثلاً، π با دقت ده رقم اعشار برابر است با ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵.

توجه کنید که تقریب‌هایی که در این‌جا از آن صحبت کرده‌ایم، تقریب زدن با روش قطع کردن بوده است که در دوره‌ی راهنمایی با آن آشنا شده‌اید. در این روش تقریب زدن، مقدار تقریبی از مقدار واقعی کمتر است. می‌توان دید اگر به آخرین رقم آن یک واحد اضافه کنیم از مقدار واقعی بیشتر می‌شود. برای مثال، وقتی می‌گوییم $\sqrt{۲}$ با دقت چهار رقم اعشار برابر ۱/۴۱۴۲ است، یعنی $۱/۴۱۴۲ < \sqrt{۲} < ۱/۴۱۴۳$

تمرین در کلاس

۱ــ با توجه به تقریب‌های اعشاری $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ که در بالا داده شده است، مجموع $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ را با یک رقم اعشار حساب کنید و حاصل را با π که با دقت یک رقم اعشار نوشته شده است مقایسه کنید.

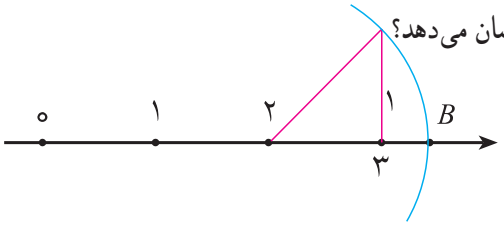
۲ــ $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ را با دو رقم اعشار حساب کنید و آن‌را با عدد π که با دقت دو رقم اعشار نوشته شده است مقایسه کنید.

۳ــ آیا عدد π با مجموع $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ مساوی است؟

۴ــ $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ را با سه رقم اعشار حساب کنید و آن‌را با عدد π که با دقت سه رقم اعشار نوشته شده است مقایسه کنید.

مسائل

۱ــ روی محور اعداد زیر، نقطه‌ی B چه عددی را نشان می‌دهد؟



۲ــ بر روی محور اعداد زیر، مکان هریک از اعداد $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{-۱}{۴}$ ، $-۲/۴$ و $\frac{۵}{۴}$ را مشخص کنید.

۳ــ اعداد $\sqrt{۸}$ و $۱-\sqrt{۳}$ را روی محور بیابید.

۴ــ جدول زیر را کامل کنید و علامت اعداد مخالف صفر را تعیین کنید.

عدد	منفی	مثبت	صفر
$-۲/۷$			
$-۱\frac{۲}{۳}$			
$\frac{۱}{۲}$			
$۱-\sqrt{۲}$			
$(۲\frac{۱}{۲}-\frac{۵}{۲})$			
$\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$			
$-(۲-\sqrt{۳})$			

۵ــ مقدار عبارت‌های زیر را در صورت امکان ساده کنید و بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

$|۲-۳\times(۱-۲)|$, $|۱-\sqrt{۲}|$, $|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|$, $|-۲\times(۳-۴)|$

۶ــ جدول روبه‌رو را کامل کنید.

درصد	کسر	عدد اعشاری
۵۵	$\frac{۵۵}{۱۰۰}$	۰/۵۵
		۱/۲۵
	$۲\frac{۱}{۲}$	
	$\frac{۳}{۴}$	
	$\frac{۴}{۵}$	
۸/۵		
۴۸		

۷ــ در بین عددهای گویای زیر، عددهایی که اعشاری هستند را مشخص کنید و قسمت صحیح و قسمت اعشاری آن‌ها را بنویسید.

$$\frac{۳}{۷}, \frac{۱۵}{۶}, \frac{۸}{۵}, \frac{۲}{۳}$$

۸ــ حاصل هریک از عملیات زیر را به‌طور تقریبی به‌دست آورید. قبل از انجام عملیات، در صورت نیاز به نزدیکترین عدد مناسب، اعداد را گرد کنید.

الف) ۳/۹÷۴۰/۹

ب) ۶۹/۳÷۱/۹

ج) (۹/۴+۲/۳۵)×۸۷/۳

د) $\frac{\sqrt{۱۴۵}\times ۷/۹۶}{\sqrt{۲۴}}$

۹ــ یک لکه روغن روی آب افتاده و به‌صورت دایره‌ای بزرگ می‌شود. لحظه‌ای می‌رسد که شعاع دایره برابر با ۴ سانتی‌متر شده و در لحظه‌ای بعد شعاع ۰/۲ سانتی‌متر افزایش می‌یابد. مساحت لکه چقدر افزایش می‌یابد؟ (مقدار π را برابر ۳/۱۴ بگیرید.)

۱۰ــ دانش‌آموزی گفت: در جایی خوانده‌ام که برای حفظ تقریب اعشاری π تا ده رقم، می‌توان جمله زیر را حفظ کرد.

«خرد و بینش و آگاهی دانشمندان ره سرمنزل مقصود بما آموزد»

به‌نظر شما چه ارتباطی بین این جمله و عدد π وجود دارد؟

ابوالحسن علی‌بن احمد نسوی

حکیم و ریاضی‌دان ایرانی است که در سال ۳۹۳ق. در ری متولد شد. از خصوصیات او نقل می‌کنند که سیرتی نیکو داشت و به علم و هنر عشق می‌ورزید و مردی کریم، مهمان‌نواز، خوان‌گشاده، علم دوست و دانش‌گستر بود و در میان شاگردان و بزرگان زمان خود به استاد مختص معروف بود. از او ۱۱ اثر ریاضی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به اثرالمقنع فی‌الحساب الهندی اشاره کرد که در آن به روش محاسبه با دستگاه شمارش اعشاری می‌پردازد که در آن هریک از ارقام بسته به مکانی که در آن قرار گرفته‌اند دارای ارزش‌اند و ارزش مکانی هر رقم نسبت به رقم سمت راست خود ده برابر است. مثلاً در دستگاه اعشاری ۵۲/۴، ۴ دارای ارزش‌مکانی دهم، ۲ دارای ارزش مکانی یکان و ۵ دهگان است که ارزش هر کدام ده برابر دیگری است. ایشان در زمینه‌ی هندسه و مثلثات نیز کارهای بسیار زیادی انجام داده‌اند. وی در سال ۴۷۲ ق. درگذشت.

نمادها و زبان ریاضی

برای آسان‌تر صحبت کردن در ریاضی، از نمادها استفاده می‌شود. مثلاً، تمام اعداد طبیعی را با کنار هم گذاردن نمادهایی که برای اعداد صفر تا نه انتخاب کرده‌ایم نمایش داده‌ایم. تمام اعداد صحیح را با استفاده از نمایش دهدهی اعداد طبیعی و علامت منفی «−»، نمایش داده‌ایم. تمام اعداد گویا را با استفاده از نمایش اعداد طبیعی و علامت منفی و خط کسری نمایش داده‌ایم. اعمال جمع و ضرب را هم با نمادهای «+» و «×» و رابطه کوچک‌تری و بزرگ‌تری را با «<» و «>» نشان داده‌ایم.

سخن گفتن با استفاده از این نمادها را زبان ریاضی می‌نامیم. جملات در زبان ریاضی را به زبان فارسی نیز می‌توان بیان کرد. برای مثال، جمله فارسی زیر، خبری را در ریاضی بیان می‌کند :

«اگر به عدد پانزده، عدد دو را اضافه کنیم، حاصل آن هفده می‌شود.»

همین جمله را با استفاده از نمادها، به زبان ریاضی به شکل زیر می‌نویسیم :

$$۱۵+۲=۱۷$$

عبارت بالا یک جمله‌ی ریاضی است که خبری را در مورد سه عدد ۱۵، ۲ و ۱۷ بیان می‌کند.

تمرین در کلاس

۱ــ جمله‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) حاصل‌جمع منفی دوازده و هجده، برابر شش است.

ب) حاصل‌ضرب یک سوم در خودش برابر یک نهم است.

ج) حاصل‌ضرب منفی یک در منفی سه به اضافه پنجاه، از پنجاه بزرگ‌تر است.

۲ــ جمله‌های ریاضی زیر را به زبان فارسی بنویسید.

الف) $(-۱۲-۳)\times۲=-۳۰$

ب) $\frac{۲}{۵}-۲=-\frac{۸}{۵}$

ج) $-\frac{۳}{۲}\times\frac{۲}{۱۵}+۱<\frac{۱۳}{۱۵}$

برای سخن گفتن در مورد اعداد مشخص، از نمایش آن‌ها استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال، برای گفتن این‌که جمع یک دوم با خودش برابر یک است می‌نویسیم :

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

اما اگر بخواهیم در مورد دسته‌ای از اعداد سخن بگوییم، آن را چگونه بنویسیم؟ فرض کنید می‌خواهیم بگوییم :

«دو برابر هر عدد برابر است با جمع آن عدد با خودش.»

این جمله به معنای آن است که :

$$\begin{aligned} ۱+۱ &= ۲\times۱ \\ ۲+۲ &= ۲\times۲ \\ ۳+۳ &= ۲\times۳ \\ ۴+۴ &= ۲\times۴ \\ \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

همان‌طور که می‌بینید، این خاصیت مربوط به عدد خاصی نیست و برای همه‌ی اعداد برقرار است. اگر □ نشانه‌ی یک عدد دلخواه باشد، خاصیت بالا را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم :

$$\square+\square=۲\times\square$$

اگر به‌جای □، هر عدد دلخواهی بگذاریم تساوی بالا برقرار می‌شود. در ریاضی معمولاً به‌جای استفاده از علامت □ از نمادهای حروف انگلیسی مانند a، b، c،... استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال، برای گفتن جمله‌ی «جمع هر عدد با خودش، مساوی با دو برابر همان عدد است.» می‌گوییم : عدد دلخواهی انتخاب کنید و آن را a بنامید، در این‌صورت :

$$a+a=۲\times a$$

در جمله‌ی بالا، به‌جای حرف a از هر حرف دیگری هم می‌توانیم استفاده کنیم. برای مثال بالا می‌توانیم بگوییم : عدد دلخواهی انتخاب کنید و آن را x بنامید، در این‌صورت :

$$x+x=۲\times x$$

هر دو این جملات یک چیز می‌گویند : جمع هر عدد با خودش، مساوی با دو برابر همان عدد است.

بنا به قرارداد، ضرب یک عدد خاص مانند ۲ در یک عدد دلخواه را که با یک نماد مانند a نشان داده شده است، به‌جای $۲\times a$ با $۲a$ نشان می‌دهیم. این کار موجب سادگی نوشتن خواهد شد. به‌عنوان مثال :

$$۳\times a=۳a \qquad (-۱۲)\times x=-۱۲x \qquad ۱/۷\times z=۱/۷z$$

به کمک نمادهایی که نشان‌دهنده‌ی یک عدد دلخواه هستند می‌توانیم خواصی از اعداد را که برای همه‌ی اعداد برقرارند راحت‌تر بیان کنیم.

مثال: برای بیان این‌که «حاصل‌جمع هر عدد با صفر برابر همان عدد می‌شود.»، می‌گوییم : عدد دلخواهی

را انتخاب کنید و آن را z بنامید، در این‌صورت

$$z+۰=z$$

مثال: برای بیان این‌که «هر عددی که با یک جمع شود از آن عدد بزرگ‌تر می‌شود.» می‌گوییم : عدد دلخواهی را انتخاب کنید و آن را w بنامید، در این‌صورت :

$$w+۱>w$$

تمرین در کلاس

۱ــ جمله‌های زیر را با استفاده از حروف انگلیسی که به‌عنوان نمادهای حرفی و نمادهای ریاضی به‌کار برده می‌شوند، بنویسید.

الف) سه برابر هر عددی برابر است با سه بار جمع آن عدد با خودش.

ب) ضرب هر عددی در صفر، صفر می‌شود.

ج) تفاضل هر عدد از خودش برابر صفر می‌شود.

۲ــ جمله‌های ریاضی زیر را به زبان فارسی بنویسید.

الف) $a\times a>۰$ یا $a\times a=۰$

ب) $x\times ۱=x$

ج) $۴\times(۱+w)=۴+۴w$

د) $x\times x+۱>x$

در بسیاری اوقات، می‌خواهیم مطلبی را در مورد دو عدد دلخواه بیان کنیم. در این موارد لازم است از دو نماد مختلف استفاده کنیم که هرکدام نشان‌دهنده عدد دلخواهی باشند.

مثال: برای بیان این‌که : «در جمع دو عدد، جمع اولی با دومی برابر است با جمع دومی با اولی»، می‌گوییم : دو عدد دلخواه انتخاب کنید و آن‌ها را x و y بنامید، در این صورت :

$$x+y=y+x$$

بنا به قرارداد برای نشان دادن ضرب دو عدد که با نمادهایی مانند a و b نشان داده شده‌اند، به‌جای $a\times b$ از ab استفاده می‌کنیم که ساده‌تر است.

ضرب یک عدد در خودش را **مربع** یا **مجذور** آن عدد می‌نامند.

مربع عدد a را با $a^۲$ نشان می‌دهند. یعنی :

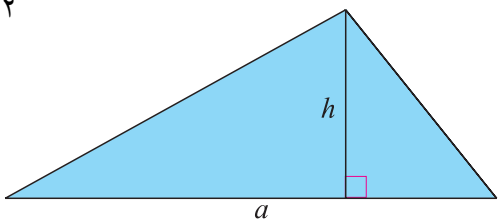
$$a\times a=aa=a^۲$$

مثال: برای بیان این‌که : «در ضرب دو عدد، حاصل‌ضرب اولی در دومی برابر است با حاصل‌ضرب دومی در اولی.» می‌گوییم : دو عدد دلخواه انتخاب کنید و آن‌ها را x و y بنامید، در این‌صورت :

$$xy = yx$$

مثال: برای بیان این‌که : «مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول یک قاعده آن در ارتفاع نظیر آن قاعده.»، می‌گوییم : یک مثلث دلخواه درنظر بگیرید و طول یک قاعده‌ی آن را a و ارتفاع نظیر آن قاعده را h بنامید، در این‌صورت :

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲}ah$$



مثال: برای بیان این‌که : «حاصل ضرب دو عدد مثبت، عددی مثبت است.»، می‌گوییم : دو عدد دلخواه مثبت انتخاب کنید و آن‌ها را x و y بنامید، در این‌صورت :

$$xy > ۰$$

مثال: برای بیان این‌که : «حاصل جمع یک عدد مثبت با یک عدد دیگر، عددی بزرگ‌تر از عدد دوم می‌سازد»، می‌گوییم : دو عدد دلخواه انتخاب کنید و آن‌ها را z و w بنامید، فرض کنید $z > ۰$ ، در این صورت :

$$z + w > w$$

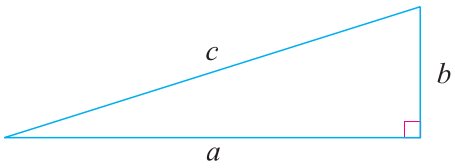
در موارد بسیاری لازم می‌شود که مطلبی را درباره‌ی سه عدد دلخواه بیان کنیم. در این حالت باید از سه نماد برای نشان دادن سه عدد دلخواه استفاده کنیم.

مثال: برای بیان این‌که «در جمع سه عدد، ترتیب جمع کردن به‌صورت جمع عدد اول با عدد دوم و سپس جمع با عدد سوم، یا جمع عدد دوم با عدد سوم و سپس جمع با عدد اول تغییری در نتیجه ایجاد نمی‌کند.» می‌گوییم : برای سه عدد x، y و z، داریم :

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

مثال: طبق قضیه‌ی فیثاغورس «در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع طول وتر برابر است با مجموع مربعات طول دو ضلع دیگر.»، برای بیان این قضیه به زبان ریاضی، می‌گوییم : اگر طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه را با a و b و c نشان دهیم و c طول وتر باشد، داریم :

$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$



به تساوی زیر توجه کنید :

$$۱۲\times(۵+۲۳)=(۱۲\times۵)+(۱۲\times۲۳)$$

این تساوی نشان می‌دهد که برای محاسبه‌ی حاصل‌ضرب ۱۲ در مجموع دو عدد ۵ و ۲۳ می‌توانستیم ابتدا ضرب ۱۲ در ۵ و سپس ضرب ۱۲ در ۲۳ را انجام دهیم و حاصل‌ها را با هم جمع کنیم. این ویژگی خاص اعداد ۱۲، ۵ و ۲۳ نیست و برای اعداد دیگر هم می‌توانیم این عمل را انجام دهیم. این ویژگی را «خاصیت پخشی» عمل ضرب نسبت به عمل جمع می‌نامند. در فعالیت زیر درستی این ویژگی را به‌طور هندسی بررسی می‌کنیم.

فعالیت

۱ــ مستطیلی رسم کنید و طول و عرض آن را با x و y نشان دهید.

۲ــ مستطیل دیگری رسم کنید که طول آن همان x ولی عرض آن عدد دیگری مانند z باشد.

۳ــ دو مستطیل بالا را به‌گونه‌ای کنار هم قرار دهید که یک مستطیل بزرگ‌تر ساخته شود.

۴ــ مساحت هریک از این دو مستطیل و مستطیل بزرگ‌تر ساخته شده را برحسب نمادهای انتخاب شده بنویسید.

۵ــ مساحت مستطیل بزرگ‌تر ساخته شده برابر مجموع مساحت‌های دو مستطیل اول است. این مطلب را با استفاده از نمادهای انتخاب شده بنویسید.

۶ــ رابطه‌ی به‌دست آمده بین اعداد مثبت x و y و z را به زبان فارسی بیان کنید.

برای سه عدد x، y و z داریم : $x(y+z)=xy+xz$

اگر هر طرف تساوی بالا را داشته باشیم، می‌توانیم طرف دیگر را به‌دست آوریم. اگر ابتدا سمت چپ تساوی را داشته باشیم و سپس سمت راست تساوی را به‌دست آوریم، آن را «پخش کردن عمل ضرب روی عمل جمع» می‌نامند. اگر برعکس، ابتدا سمت راست تساوی را داشته باشیم، سپس سمت چپ تساوی را به‌دست آوریم، آن را «**فاکتورگیری**» می‌نامند و در این حالت در تساوی بالا می‌گوییم از x فاکتور گرفته‌ایم.

تمرین در کلاس

مستطیلی رسم کنید و روی طول آن یک نقطه انتخاب کنید. این نقطه، طول مستطیل را به دو پاره‌خط تقسیم می‌کند. طول این پاره‌خط‌ها را x و y و عرض این مستطیل را z بنامید.

۱ــ تساوی $z(x+y)=zx+zy$ را روی شکل نشان دهید.

۲ــ روی عرض این مستطیل نیز نقطه‌ای انتخاب کنید. این نقطه هم، عرض مستطیل را به دو قسمت تقسیم می‌کند. طول این دو قسمت را با a و b نشان دهید و رابطه‌ی بین a، b و z را بنویسید.

۳ــ تساوی $z(x+y)=zx+zy$ را برحسب a و b بنویسید.

۴ــ درستی تساوی‌های زیر را در مستطیل رسم شده نشان دهید.

$$(a+b)(x+y)=a(x+y)+b(x+y)=(a+b)x+(a+b)y=ax+ay+bx+by$$

بنا به قرارداد، در عبارت‌هایی که عملیات جمع و ضرب انجام می‌شود، اگر ترتیب عملیات با پرانتز مشخص نشده باشد، ابتدا عملیات ضرب و تقسیم به‌ترتیب از چپ به راست انجام می‌شود، سپس عملیات جمع یا تفریق به‌ترتیب از چپ به راست انجام خواهد شد.

مثال: در عبارت ۲×۴۱+۲۳−۳×۴ ابتدا ضرب ۴ در ۳ و سپس ضرب ۴۱ در ۲ انجام می‌شود و در پی آن عبارت ۸۲+۲۳−۱۲ ساخته می‌شود. سپس تفریق ۲۳−۱۲ انجام می‌شود و حاصل آن با ۸۲ جمع می‌شود.

مثال: در عبارت ۱−۲÷۵×۴−۱۲− ، ابتدا ضرب ۴ در ۵ محاسبه و حاصل آن بر ۲ تقسیم می‌شود که برابر ۱۰ است. سپس تفریق ۱۰ از (۱۲−) انجام می‌شود که حاصل (۲۲−) است و آخر، تفریق ۱ از (۲۲−) انجام می‌شود که حاصل (۲۳−) است.

تمرین در کلاس

ترتیب عملیات را در عبارت‌های زیر تعیین کنید.

۱) ۲−۳+۵

۲) ۱−۴×۶+۳−۵×۱۲

۳) −۵+۴÷۲+۱۴÷۲×۷

۴) $x-yz$

۵) $a-bx+c(x+a)$

۶) $ab-cd+۲(x+۱)$

مسائل

۱ــ در جمله‌های زیر، حروف a، x و w، نشان‌دهنده‌ی اعداد دلخواهی هستند. این جمله‌ها را به کوتاه‌ترین شکل به فارسی بنویسید.

الف) $(a+x)(a-x)=a^{۲}-x^{۲}$

ب) $(aw)^{۲}=a^{۲}w^{۲}$

ج) فرض کنید $a>۱$، در این‌صورت $a^{۲}>۱$.

د) فرض کنید $a>۰$ و $x>۰$ و $a^{۲}=x^{۲}$، در این‌صورت $a=x$.

هـ) فرض کنید $aw=۰$، در این‌صورت $a=۰$ یا $w=۰$.

۲ــ برای مقادیر زیر که برحسب اعداد دلخواه a و b نوشته شده‌اند، مثال هندسی بیاورید.

الف) $a^{۲}$

ب) $۲a+۲b$

ج) $a^{۲}+b^{۲}+۲ab$

د) $\frac{۱}{۲}(a+b)$

۳ــ چهار عدد مثبت دلخواه را با z، a، b و c نشان داده‌ایم، با رسم یک شکل نشان دهید $z(a+b+c)=za+zb+zc$. بدون استفاده از شکل نیز درستی همین تساوی را نشان دهید.

۴ــ عبارت‌های زیر را با فاکتورگیری به شکل حاصل ضرب درآورید.

$$xa+xb \quad , \quad x^{۲}a+x^{۲}b \quad , \quad zy+xy \quad , \quad ab^{۲}+cb^{۲} \quad , \quad a^{۲}x^{۲}+ax^{۲} \quad , \quad x^{۲}+x$$

۵ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$-۶\div۲\times۳=$$

$$۶-۶(۳-۳\times۲)=$$

$$\frac{۴\frac{۱}{۳}-۲\frac{۲}{۲}}{۲+\frac{-۲}{۳}-۲\frac{۱}{۳}}=$$