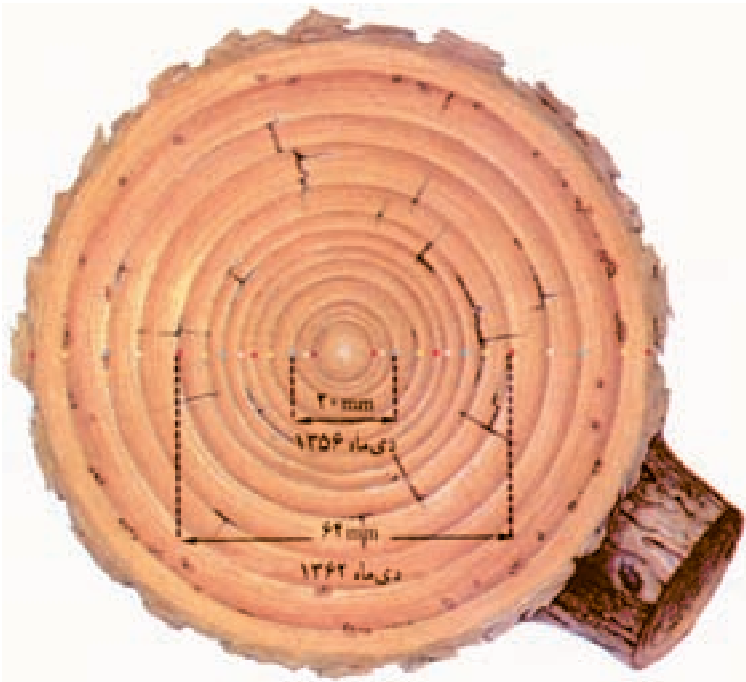
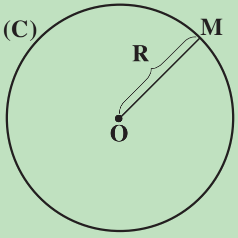
فصل ۲

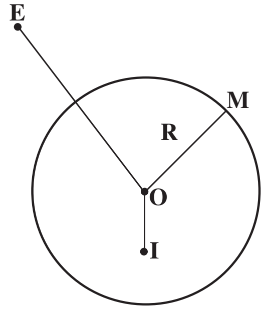
دایره



تصویر، حلقه‌های سالانۀ یک درخت بادام را که در دی ماه ۱۳۶۶ قطع شده است نشان می‌دهد. هر حلقه رشد درخت را در یک سال مشخص نشان می‌دهد. وجود ۱۳ حلقه نشان می‌دهد که این درخت در دی ماه ۱۳۶۶ سیزده ساله بوده است، یعنی رشد درخت در سال ۱۳۵۳ شروع شده است.

دایره مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که فاصله‌اش از نقطۀ ثابتی واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطۀ ثابت مرکز دایره و مقدار ثابت اندازۀ شعاع دایره نامیده می‌شوند.



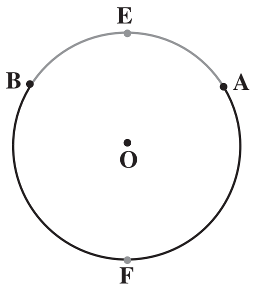


دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R را به صورت $C(O,R)$ نشان می‌دهند.

هر دایره، صفحه را به سه بخش افراز[1] می‌کند :

۱) داخل دایره، مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند I، که فاصلهٔ آنها از مرکز دایره، کمتر از شعاع دایره است، $OI< R$

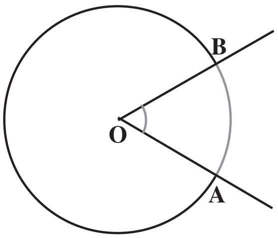
۲) روی دایره، مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند M که فاصلهٔ آنها از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.



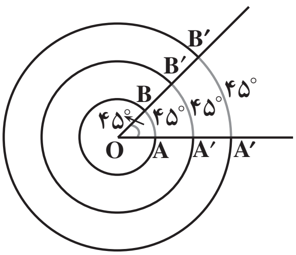
۳) خارج دایره، مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند E که فاصلهٔ آنها از مرکز دایره، از شعاع دایره بیشتر است ؛ $OE >R$

دو نقطهٔ A و B واقع بر یک دایره، دو **کمان** $\widehat{AB}$ را روی آن دایره جدا می‌کند. در این حالت برای مشخص کردن آنها، از نقطه‌ای اختیاری واقع بر هر یک از آن دو کمان استفاده می‌شود، مانند کمانهای $\widehat{AEB}$ و $\widehat{AFB}$ در شکل مقابل.

۲ــ۱ــ زاویهٔ مرکزی، وتر و مماس



دایره‌ای به مرکز O را درنظر می‌گیریم و دو نقطهٔ A و B را روی آن انتخاب می‌کنیم. نیم‌خطهای OA و OB دو زاویه به‌وجود می‌آورند که چون رأس آنها مرکز دایره است، **زاویه‌های مرکزی** نامیده می‌شوند. هریک از این زاویه‌های مرکزی یک کمان از دایره جدا می‌کنند که به آن، کمان نظیر آن زاویهٔ مرکزی گفته می‌شود.

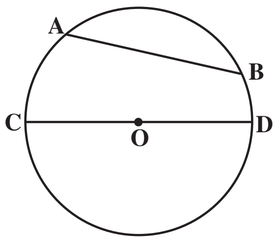


بنا به قرارداد، اندازهٔ کمان نظیر هر زاویهٔ مرکزی در دایره برحسب درجه، همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی به آن کمان است.

وقتی اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ برابر ۴۵° است، اندازهٔ کمانهای $\widehat{AB}$، $\widehat{A'B'}$ و $\widehat{A'B'}$ از دایره‌هایی به مرکز O نیز مساوی ۴۵° هستند.

۱ــ منظور از افراز یک مجموعه، تقسیم آن به زیرمجموعه‌هایی ناتهی است که اشتراک آنها تهی و اجتماع آنها تمام مجموعهٔ اولیه باشد.

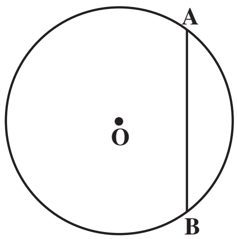
پاره‌خطی که دو نقطهٔ متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند، **وتر** آن دایره نامیده می‌شود. در شکل روبه‌رو پاره‌خطهای AB و CD وترهایی از دایره به مرکز O می‌باشند.



وتری که از مرکز دایره می‌گذرد، **قطر** آن دایره نامیده می‌شود. در شکل روبه‌رو، CD قطر دایره است. هر قطر دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند. این کمانها نیمدایره نامیده می‌شوند.

فعالیت ۲ــ۱

وتر AB در دایره‌ای به مرکز O داده شده است :



۱ــ قطری از این دایره را که بر وتر AB عمود است، رسم کنید، آن را DE و نقطهٔ برخوردش با وتر AB را H بنامید.

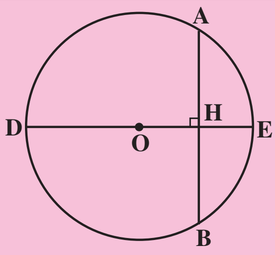
۲ــ از نقطهٔ O به نقطه‌های A و B وصل کنید. مثلث OAB چه نوع مثلثی است؟ چرا؟

۳ــ دلیل درستی تساویهای زیر را توضیح دهید.

الف) $AH = HB$ ب) $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$ و $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$

نتیجهٔ فعالیت بالا را می‌توانیم به‌صورت قضیهٔ زیر خلاصه کنیم :

قضیه: در هر دایره، قطرعمود بر هر وتر، آن وتر و کمانهای نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



تمرین ۱ ــ ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره که از مرکز دایره نگذشته باشد، وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.

تمرین ۲ــ ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می‌کند بر آن وتر عمود است.

فعالیت ۲ــ۲

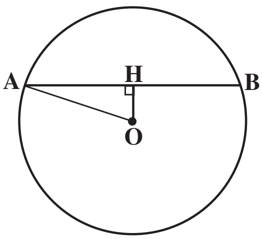
۱ــ دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر رسم کنید.

۲ــ وتری به‌طول ۲/۴ سانتی‌متر در این دایره رسم کنید و این وتر را AB بنامید.

۳ــ فاصلهٔ نقطهٔ O مرکز دایره، از این وتر، یعنی طول پاره‌خط OH را به‌دست آورید.

۴ــ مکان هندسی نقطهٔ H وسط وترهایی از این دایره که طولشان ۲/۴ سانتی‌متر است را تعیین کنید. آیا این مکان یک دایره است؟

نظیر فعالیت بالا را در مورد دایرهٔ C(O,R) و وتر AB به طول l از این دایره انجام دهید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



مثال: دایرهٔ C(O,۲۶) داده شده است. اگر فاصلهٔ وتر AB از مرکز دایره برابر ۱۰ باشد، طول وتر AB را به‌دست آورید.

حل: وسط وتر AB را H می‌نامیم و از O به H و A وصل می‌کنیم. در مثلث OAH داریم :

$$OA^{۲} = AH^{۲} + OH^{۲}$$

پس :

$$(۲۶)^{۲} = AH^{۲} + (۱۰)^{۲}$$

بنابراین :

$$AH^{۲} = ۵۷۶ \Rightarrow AH = ۲۴$$

درنتیجه :

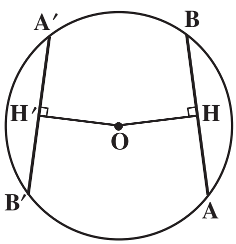
$$AB = ۲AH = ۴۸$$

تمرین ۱ ــ ثابت کنید در یک دایره، کمانهای نظیر دو وتر مساوی، با هم برابرند، و بعکس.

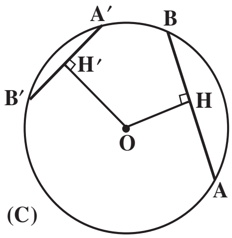
تمرین ۲ ــ ثابت کنید در هر دایره، وترهای متساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بعکس.

یعنی در شکل زیر :

$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$

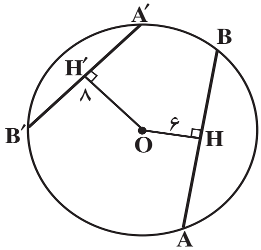


فعالیت ۲ــ۳



۱ــ در دایرهٔ $C(O,10)$ وتر AB به طول ۱۶ و وتر $A'B'$ به طول ۱۲ داده شده‌اند.

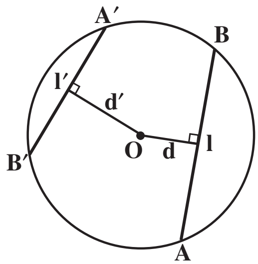
فاصلهٔ هریک از این دو وتر از مرکز دایره یعنی OH و OH' را به‌دست آورید.



۲ــ در دایرهٔ $C(O,10)$ فاصلهٔ وتر AB از مرکز دایره برابر ۶ و فاصلهٔ وتر $A'B'$ از مرکز دایره مساوی ۸ است. طول وترهای AB و $A'B'$ را به‌دست آورید.

۳ــ چه رابطه‌ای بین فاصلهٔ وترها از مرکز دایره و طول آنها می‌یابید؟

۴ــ آیا این رابطه همیشه برقرار است؟



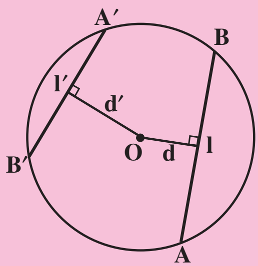
۵ــ در دایرهٔ $C(O,R)$، وتر AB را به طول l و وتر $A'B'$ را به طول l' در نظر بگیرید. فاصلهٔ مرکز دایره از این دو وتر را به ترتیب d و d' بنامید. آیا رابطه‌های $d^2+\frac{l^2}{4}=R^2$ و $d'^2+\frac{l'^2}{4}=R^2$ برقرارند؟

به کمک رابطه‌های بالا ثابت کنید:

$$l \geq l' \Leftrightarrow d \leq d'$$

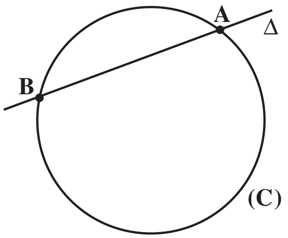
نتیجه فعالیت بالا را به‌صورت قضیهٔ زیر می‌توانیم بیان کنیم:

قضیه: در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگتر است، به مرکز دایره نزدیکتر است، و بعکس.



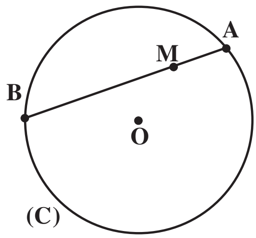
تمرین ــ ثابت کنید، کوچکترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه، عمود است.

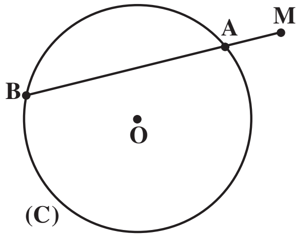
۲ــ۱ــ۱ــ خطهای قاطع و مماس نسبت به دایره: خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع

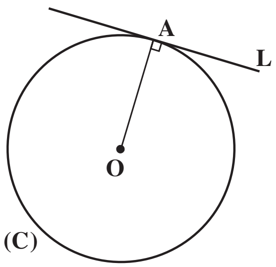


کند، **قاطع نسبت به دایره** یا به‌طور خلاصه، قاطع[1] نامیده می‌شود. مانند قاطع Δ که دایرهٔ (C) را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است.

اگر قاطع رسم شده از نقطهٔ M واقع در صفحهٔ یک دایره، آن دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کند، آنگاه پاره‌خطهای MA و MB را دو قطعهٔ قاطع رسم شده از نقطهٔ M و یا به‌صورت خلاصه، دو قطعهٔ قاطع می‌نامند.



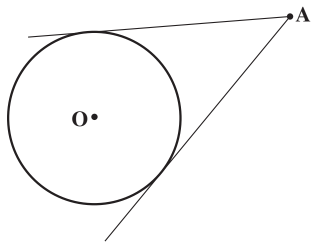




نقطهٔ A را روی دایرهٔ به مرکز O در نظر می‌گیریم. **خط L که از نقطهٔ A می‌گذرد و بر شعاع OA عمود است، خط مماس بر دایره در نقطهٔ A نامیده می‌شود.**

یک ویژگی مهم این خط مماس، آن است که فقط در نقطهٔ A با دایره مشترک است. نقطهٔ A را نقطهٔ تماس خط L با دایره می‌نامند.

از هر نقطه خارج دایره می‌توان دو مماس بر آن دایره رسم کرد.

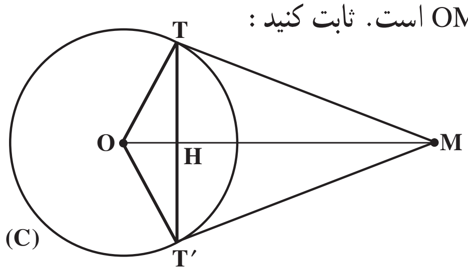


قضیه: طول مماسهای رسم شده بر یک دایره از هر نقطهٔ خارج آن با هم برابرند.

تمرین ۱ــ قضیهٔ بالا را ثابت کنید.

۱ــ Secant

تمرین ۲ــ دو خط MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماسند. H نقطهٔ برخورد وتر TT' با **خط** OM است. ثابت کنید :



الف ــ **خط** OM نیمساز زاویه‌های TMT' و TOT' است.

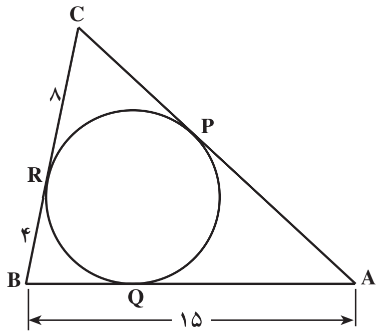
ب ــ **خط** OM عمود منصف پاره‌خط TT' است.

پ ــ $OH.OM = R^{۲}$

تمرین ۳ــ در شکل بالا ثابت کنید :

الف ــ $TT'^{۲} = ۴OH.HM$

ب ــ $TT'.OM = ۲R.MT$



مثال ۱: در شکل مقابل، ضلعهای مثلث ABC در نقطه‌های P، Q و R بر دایره مماسند. با توجه به مقدارهای داده شده، اندازهٔ ضلع AC را تعیین کنید.

حل: چون مماسهای رسم شده از یک نقطه بر یک دایره با هم برابرند، بنابراین :

$BQ = BR = ۴$

از آنجا : $AQ = AB - BQ$

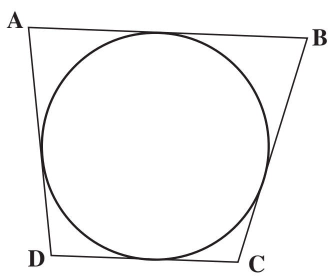
پس : $AQ = ۱۵ - ۴ = ۱۱$

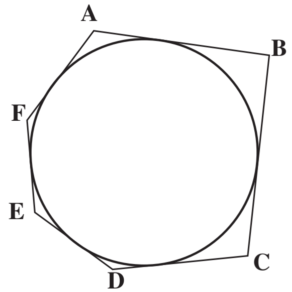
$AP = AQ = ۱۱$

از طرفی $CP = CR = ۸$

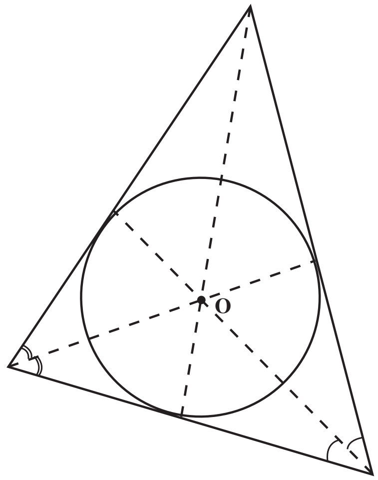
درنتیجه $AC = AP + PC = ۱۱ + ۸ = ۱۹$

مثلث مثال بالا، نمونه‌ای از یک **چند ضلعی محیطی** است. هرگاه همهٔ ضلعهای یک چندضلعی بر یک دایره مماس باشند، چندضلعی را **محیطی** یا **محیط بر دایره** می‌نامند. مانند چهارضلعی $ABCD$ و شش‌ضلعی $ABCDEF$، در این صورت دایره را محاط در چندضلعی یا **دایرهٔ محاطی** چندضلعی می‌نامند.



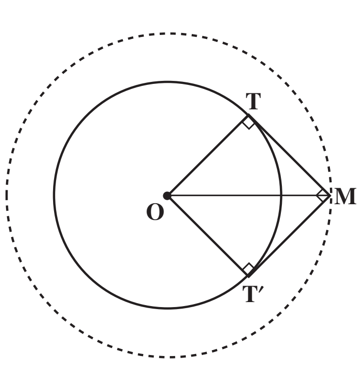


هر مثلث می‌تواند بر یک دایره محیط شود. مرکز این دایره نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث است (چرا؟). این دایره را دایرهٔ محاطی داخلی مثلث می‌گوییم.



باید توجه داشت که هر مثلث سه دایرهٔ محاطی خارجی نیز دارد. این دایره‌ها هرکدام بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماسند. مرکز این دایره‌ها چه نقطه‌هایی هستند؟

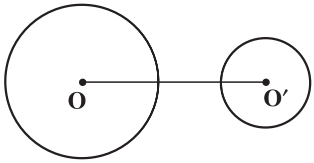
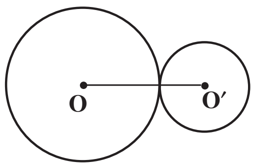
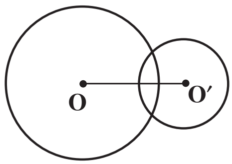
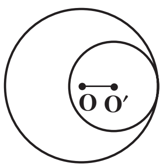
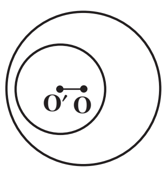
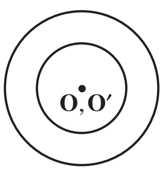
مثال ۲: دایرهٔ $C(O,R)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که مماسهای رسم شده از این نقطه بر دایره، بر هم عمود باشند.



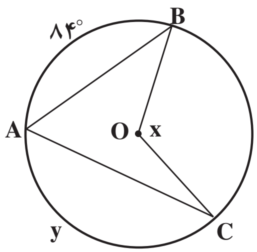
حل: فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و M یکی از نقطه‌هایی باشد که از آن، دو مماس عمود بر هم MT و MT' بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم شده است. از O به نقطه‌های تماس T و T' وصل می‌کنیم. چهارضلعی $OTMT'$ مربع است. زیرا چهار زاویهٔ قائمه دارد و دو ضلع مجاورش نیز برابرند $(OT = OT' = R)$. در این مربع، $OM = R\sqrt{2}$ مقدار ثابتی

است. نشان دهید مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R\sqrt{۲}$ است.

۲ــ۱ــ۲ــ وضع دو دایره نسبت به هم: وضع دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ ، می‌توان به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد.

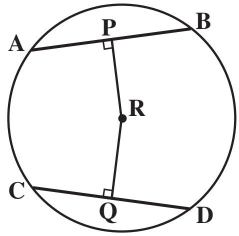
دو دایره برون هم	$d > R + R'$	
دو دایره مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
دو دایره مماس درون	$d = R - R'$	
دو دایره متداخل	$d < R - R'$	
دایره‌های هم‌مرکز	$d = ۰$	

مسأله‌ها



۱. الف) اگر $\widehat{y}=۱۴۰^\circ$، آنگاه اندازهٔ زاویهٔ x را به‌دست آورید.

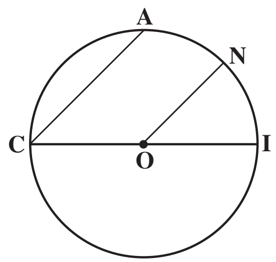
ب) اگر $\hat{x}=۱۶۵^\circ$ ، آنگاه اندازهٔ کمان $\widehat{y}$ را به‌دست آورید.



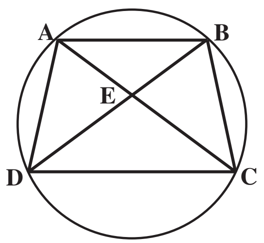
۲. با توجه به شکل روبه‌رو :

الف) اگر طول شعاع ۱۰ و $PR=۶$ ، آنگاه طول AP و AB را به‌دست آورید.

ب) اگر $RC=\sqrt{۲}$ و $CQ=RQ$ ، آنگاه طول پاره‌خط‌های CQ، DQ و CD را به‌دست آورید.



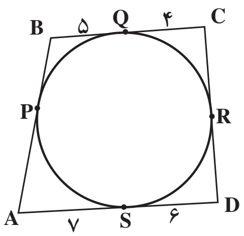
۳. در دایرهٔ به مرکز O و به قطر CI، داریم $CA \parallel ON$.
ثابت کنید $\widehat{AN}=\widehat{NI}$



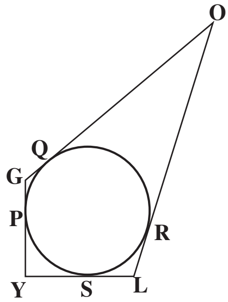
۴. با توجه به شکل نشان دهید :

الف) اگر $AD=BC$ ، آنگاه $AC=BD$.

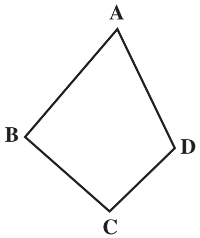
ب) اگر $AC=BD$ ، آنگاه $AD=BC$.



۵. اگر P، Q، R و S، نقطه‌های تماس ضلعهای چهارضلعی ABCD با دایره باشند، آنگاه محیط این چهارضلعی را به‌دست آورید.



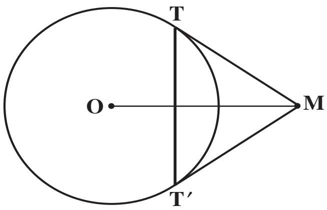
۶. ضلعهای چهارضلعی محیطی GOLY بر دایره مماسند (شکل روبه‌رو)، ثابت کنید : $GO + LY = OL + GY$



۷. در چهارضلعی ABCD (شکل روبه‌رو)، $AB + CD = AD + BC$ است. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است.

راهنمایی: روی ضلع AB، پاره‌خط $AM = AD$ و روی ضلع BC پاره‌خط $CN = CD$ را جدا کرد. از ویژگی مثلثهای متساوی‌الساقین استفاده کنید.

۸. زاویهٔ بین دو مماس رسم شده از نقطهٔ A بر دایرهٔ $C(O,۵)$ ، برابر ۶۰° است. طول پاره‌خط OA را به‌دست آورید.

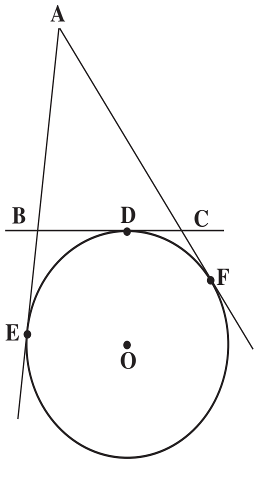


۹. دایرهٔ $C(O,۶)$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ ۱۲ سانتی‌متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید. خطهای MT و MT' بر این دایره مماسند. (T و T' نقطه‌های تماسند).

الف ــ طول مماسهای MT و MT' را تعیین کنید.

ب ــ طول وتر TT' را به دست آورید.

پ ــ اندازهٔ زاویهٔ TMT' و نوع مثلث MTT' را تعیین کنید.



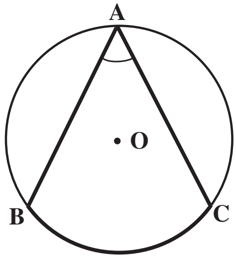
۱۰. خطهای AE، AF و BC به ترتیب در نقطه‌های E، F و D بر دایرهٔ (O) مماس هستند. مماس BC، خطهای AE و AF را به ترتیب در نقطه‌های B و C قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطهٔ D روی دایره بین دو نقطهٔ ثابت E و F ، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.

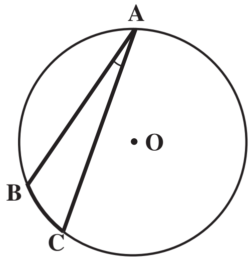
۱۱. شعاعهای دو دایرهٔ هم‌مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر هستند. اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگتر را که بر دایرهٔ کوچکتر مماس است پیدا کنید.

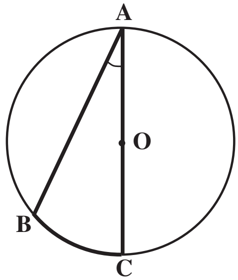
۲ــ۲ــ زاویهٔ محاطی

زاویه‌ای که رأسش روی دایره و ضلعهایش دو وتر از دایره باشند،زاویهٔ محاطی نامیده می‌شود.

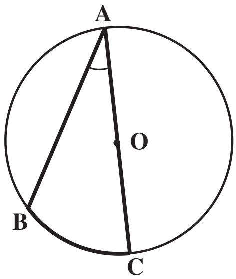
کمانی از دایره را که به دوضلع زاویهٔ محاطی محدود و در داخل زاویه واقع است ، کمان روبه‌رو به آن زاویه می‌نامند.







فعالیت ۲ــ۴



در دایرهٔ به مرکز O زاویهٔ محاطی BAC را که ضلع AC از آن، قطر دایره است،در نظر بگیرید.

۱ــ از نقطهٔ B به O مرکز دایره وصل کنید. OAB چه نوع مثلثی است؟

۲ــ زاویهٔ مرکزی BOC چند برابر زاویهٔ محاطی BAC است؟ چرا؟

۳ــ درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید :

$$B\hat{O}C = \overset{\frown}{BC}$$

بنابراین

$$۲B\hat{A}C = \overset{\frown}{BC}$$

درنتیجه :

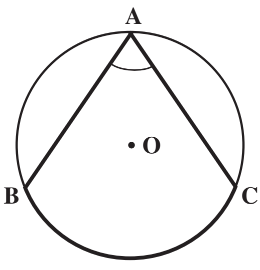
$$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

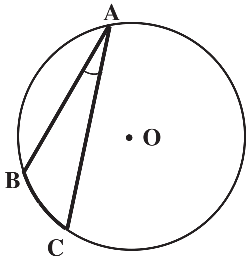
نتیجهٔ فعالیت بالا را بنویسید.

تمرین ۱ ــ دو ضلع زاویهٔ محاطی BAC در دو طرف نقطهٔ O مرکز دایرهٔ (C) واقع است.

ثابت کنید $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

راهنمایی: قطری از دایره را که از رأس A می‌گذرد رسم کنید.

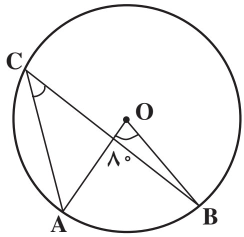




تمرین ۲ـــ دو ضلع زاویهٔ محاطی BAC در یک طرف نقطهٔ O مرکز دایرهٔ (C) قرار دارد. ثابت کنید، $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

با توجه به فعالیت (۲ـ۴) و تمرینهای بالا نتیجه می‌گیریم که :

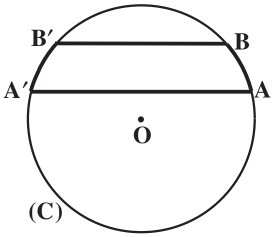
قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.



مثال: در دایرهٔ به مرکز O اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر ۸۰° است. اندازهٔ زاویهٔ محاطی ACB چه‌قدر است؟

حل: چون اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی با کمان روبه رویش برابر است، پس $\overset{\frown}{AB} = ۸۰^\circ$. بنابراین داریم :

$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۸۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ$$

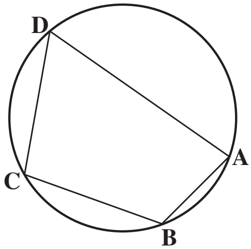


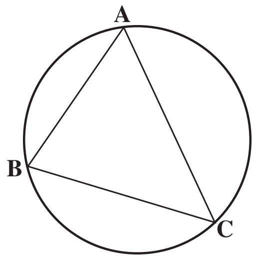
تمرین ـــ ثابت کنید در هر دایره کمانهای محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.

راهنمایی: از ویژگی زاویهٔ محاطی، یا قطر عمود بر وتر استفاده کنید.

چندضلعی محاطی

اگر همهٔ رأسهای یک چندضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، آن را **چند ضلعی محاطی** و یا **چند ضلعی محاط** در دایره می‌نامند. مانند مثلث ABC و چهارضلعی ABCD، که هرکدام در یک دایره محاطند. دایره را **محیط** بر چندضلعی یا دایرهٔ **محیطی** چندضلعی می‌نامند.





هر مثلث می‌تواند در یک دایره محاط شود. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، محل برخورد عمودمنصفهای ضلعهای مثلث است. چرا؟

تمرین ــ ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند.

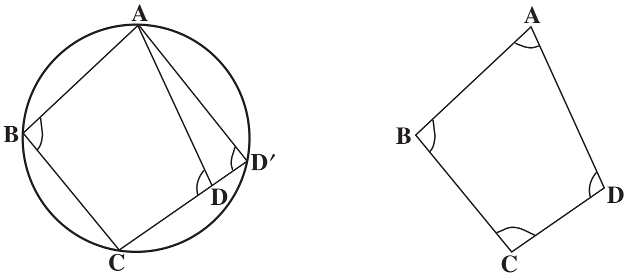
عکس حکم بالا را نیز می‌توان ثابت کرد.

قضیه: اگر در یک چهارضلعی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند، آن چهارضلعی محاطی است.

برهان: فرض می‌کنیم در چهارضلعی ABCD، هر دو زاویهٔ روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند. یعنی :

$$\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \qquad (۱)$$

$$\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \qquad (۲)$$



بر سه نقطهٔ A و B و C یک دایره می‌گذرد ؛ ثابت می‌کنیم که این دایره از نقطهٔ D نیز می‌گذرد.

برای اثبات این ادعا از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

اگر این دایره از رأس D نگذرد، نقطهٔ برخورد خط CD با دایره را D′ می‌نامیم و از D′ به A وصل می‌کنیم. چون چهارضلعی ABCD′ محاطی است، بنابراین :

$$\hat{B}+\hat{D'}=۱۸۰^\circ \qquad (۳)$$

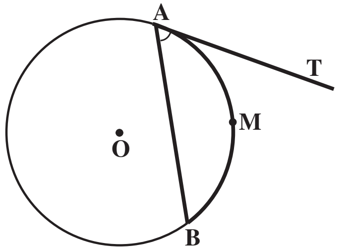
از رابطه‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که :

$$\hat{D}=\hat{D'} \qquad (۴)$$

چون زاویهٔ D زاویهٔ خارجی مثلث ADD′ است، بنابراین :

$$\hat{D}>\hat{D'} \qquad (۵)$$

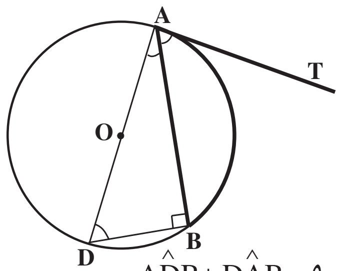
که رابطهٔ (۵) با رابطهٔ (۴) در تناقض است. درنتیجه فرض ما، که دایره از رأس D نمی‌گذرد نادرست، و حکم قضیه برقرار است.



۲ــ۳ــ زاویهٔ ظلی

زاویه‌ای که رأسش روی دایره است، یک ضلعش دایره را قطع می‌کند و ضلع دیگرش بر دایره مماس است، زاویهٔ ظلی نامیده می‌شود ؛ مانند زاویهٔ TAB در شکل روبه‌رو. کمانی از دایره را که به زاویهٔ ظلی محدود است، کمان نظیر، یا کمان روبه‌رو به زاویهٔ ظلی می‌نامند.

قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی، برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است.



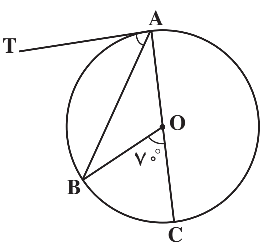
برهان: زاویهٔ ظلی BAT را در دایرهٔ به مرکز O در نظر می‌گیریم. قطر AD از این دایره را که از رأس A می‌گذرد رسم می‌کنیم و از D به نقطهٔ B وصل می‌نماییم. زاویهٔ ABD محاطی روبه‌رو به قطر، مساوی ۹۰° است. پس

$$\hat{ADB}+\hat{DAB}=۹۰^\circ \qquad (۱)$$

از طرفی

$$\hat{DAB}+\hat{BAT}=۹۰^\circ \qquad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{BAT}=\hat{ADB}$ امّا می‌دانیم که $\hat{ADB}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$. پس $\hat{BAT}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$.



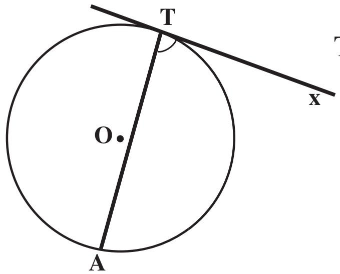
مثال ۱: AC قطر دایره و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی BOC برابر ۷۰° و خط AT در نقطهٔ A بر دایره مماس است. اندازهٔ زاویهٔ ظلی TAB را تعیین کنید.

حل: چون $\hat{BOC}=۷۰^\circ$، درنتیجه $\overset{\frown}{BC}=۷۰^\circ$ است.

از طرفی $\widehat{ABC} = ۱۸۰^\circ$ است. پس :

$$\widehat{AB} = ۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ = ۱۱۰^\circ$$

بنابراین :



$$T\hat{A}B = \frac{\widehat{AB}}{۲} = ۵۵^\circ$$

مثال ۲: اگر اندازهٔ زاویه ظلی ATX مساوی $(۲\alpha \quad ۶)^\circ$ و اندازهٔ کمان $\widehat{AT}$ برابر $(۳\alpha \quad ۳۳)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویهٔ ATX را بیابید.

حل: چون اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی مساوی نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است، پس داریم :

$$A\hat{T}X = \frac{\widehat{AT}}{۲}$$

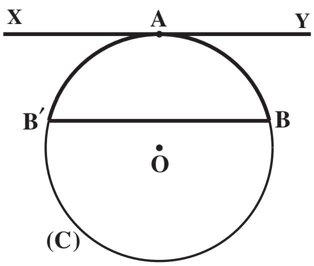
از آنجا داریم :

$$۲\alpha \quad ۶ = \frac{۳\alpha \quad ۳۳}{۲}$$

و یا

$$۴\alpha \quad ۱۲ = ۳\alpha \quad ۳۳ \Rightarrow \alpha \quad ۴۵^\circ$$

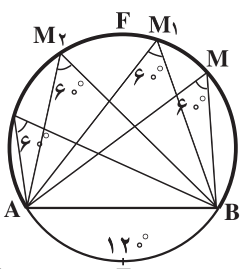
درنتیجه
$$A\hat{T}X = (۲ \times ۴۵ - ۶)^\circ = ۸۴^\circ$$



تمرین ــ خط XY در نقطهٔ A بر دایرهٔ (C) مماس است وتر BB′ از دایره را موازی XY رسم کرده‌ایم. ثابت کنید :

$$\widehat{AB} = \widehat{AB'}$$

۲ــ۴ــ کمان درخور یک زاویه



در دایرهٔ C(O,R) کمان $\widehat{AEB} = ۱۲۰^\circ$ را اختیار و وتر AB را رسم می‌کنیم.

نقطهٔ دلخواه M را روی کمان دیگر $\widehat{AB}$ (روی $\widehat{AFB}$) در نظر می‌گیریم و از این نقطه به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم.

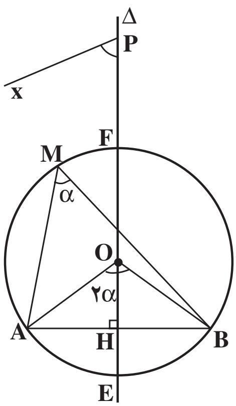
درنتیجه :

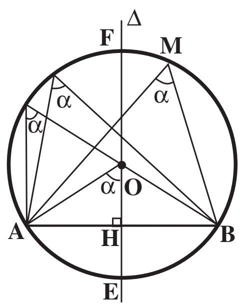
$$A\hat{M}B = \frac{۱}{۲}\widehat{AEB} = \frac{۱}{۲} \times ۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ$$

هر نقطهٔ دیگری از این کمان نیز این ویژگی را دارد، یعنی اگر $M_۱$ ، $M_۲$ ، ... و M_n ، نقطه‌های دیگری روی کمان $\widehat{AFB}$ باشند و از این نقطه‌ها به دو نقطهٔ A و B وصل کنیم، زاویه‌های $AM_۱B$ ، $AM_۲B$ ، $AM_۳B$ ، ... و AM_nB همگی ۶۰° هستند. به عبارت دیگر، هر نقطه از کمان $\widehat{AFB}$ رأس زاویه‌ای برابر ۶۰° است که ضلعهایش از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند.

این کمان، **کمان درخور**، یا **کمان حاوی** زاویهٔ ۶۰ درجه روبه‌رو به پاره‌خط AB نامیده می‌شود.

قضیه: مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α که ضلعهایش از دو نقطه ثابت می‌گذرند، کمانهایی از دو دایرهٔ مساوی است که از آن دو نقطهٔ ثابت می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به وتر مشترک آنها برابر ۲α است.

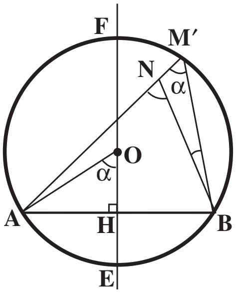




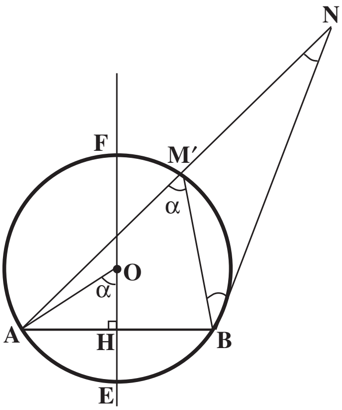
برهان: دو نقطهٔ ثابت A و B را در یک صفحه در نظر می‌گیریم. آنها را به هم وصل کرده، وسط پاره‌خط AB را H می‌نامیم. آنگاه خط Δ ، عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ دلخواه P واقع بر خط Δ ، نیمخط Px را چنان رسم می‌کنیم که $H\hat{P}x = \alpha$ باشد. از نقطهٔ A خطی موازی Px رسم می‌نماییم تا خط Δ را در نقطهٔ O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم می‌کنیم. این دایره از نقطه B نیز می‌گذرد و اندازهٔ کمان $\widehat{AEB} = ۲\alpha$ است. چرا؟ کمان $\widehat{AFB}$ مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α است که ضلعهایش از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند، زیرا :

۱ــ هر نقطه مانند M که روی این کمان باشد و از این نقطه به دو نقطهٔ A و B وصل کنیم، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{M}B$ برابر α است چون :

$$A\hat{M}B = \frac{\widehat{AEB}}{۲} = \frac{۲\alpha}{۲} = \alpha$$



۲ــ نقطهٔ N، رأس هر زاویه مانند $A\hat{N}B = \alpha$ که ضلعهایش از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد و در طرف کمان $\overset{\frown}{AFB}$ واقع است، روی کمان $\overset{\frown}{AFB}$ قرار دارد. زیرا اگر نقطهٔ N روی این کمان نباشد، یا داخل دایرهٔ C(O,R) واقع است، که در این صورت $A\hat{N}B > \alpha$ خواهد بود، یا نقطهٔ N خارج این دایره قرار دارد که در این صورت $A\hat{N}B < \alpha$ است. زیرا اگر در حالت نخست نقطهٔ برخورد امتداد AN با دایره را M′ بنامیم و از M′ به B وصل کنیم، داریم :



$$A\hat{N}B = A\hat{M'}B + M'\hat{B}N$$

امّا $A\hat{M'}B = \alpha$ ، پس؛ $A\hat{N}B = \alpha + M'\hat{B}N$

درنتیجه : $A\hat{N}B > \alpha$

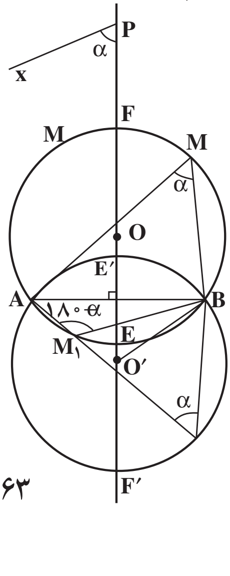
و در حالت دوم، اگر نقطهٔ برخورد AN با دایره را M′ بنامیم، داریم :

$$A\hat{N}B = A\hat{M'}B - M'\hat{B}N$$

و از آنجا ؛ $A\hat{N}B = \alpha - M'\hat{B}N$

درنتیجه : $A\hat{N}B < \alpha$

بنابراین، در هر دوحالت، نتیجه به دست آمده خلاف فرض است. درنتیجه نقطهٔ N روی کمان $\overset{\frown}{AFB}$ است. این کمان، کمان درخور یا کمان حاوی زاویهٔ α روبه‌رو یا وابسته به پاره‌خط AB، نامیده می‌شود.



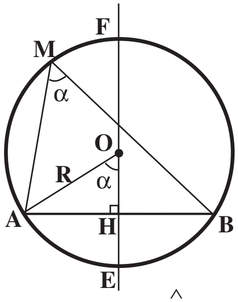
درصورتی که از نقطهٔ B خطی موازی Px رسم کنیم تا عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقطهٔ O′ قطع کند، و سپس دایره‌ای به مرکز O′ و به شعاع $O'A = O'B$ رسم نماییم تا عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقطه‌های E′ و F′ قطع کند (شکل روبه‌رو)، کمان $\overset{\frown}{AF'B}$ نیز کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB است.

بنابراین، مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α که ضلعهایش از دو نقطهٔ ثابت A وB می‌گذرند کمانهایی از دو دایرهٔ مساوی است که بر A و B مرور می‌کنند و زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به وتر مشترک آنها، برابر ۲α است.

نتیجه ۱ــ کمانهای $\overset{\frown}{AEB}$ و $\overset{\frown}{AE'B}$ از دو دایرهٔ O و O′، کمان درخور زاویهٔ $۱۸۰-\alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط AB می‌باشند. چرا؟

نتیجه ۲ ــ کمان درخور زاویهٔ ۹۰ درجه روبه‌رو به پاره‌خط AB، دایره‌ای به قطر AB است. چرا؟

نکته: درهریک از حالتهای ذکرشده، دو نقطهٔ A و B جزء کمان درخور زاویهٔ α یا $۱۸۰-\alpha$ نیستند.



نتیجه ۳ــ شعاع دایره‌ای که کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB به‌طول a بخشی از آن است، $R=\frac{a}{۲\sin\alpha}$ و فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB، $OH=\frac{a}{۲|tg\alpha|}$ است، زیرا :

$$\hat{H}=۹۰^\circ \text{ ، } A\hat{O}H=\alpha \text{ ، } AH=\frac{AB}{۲} \text{ ، } \sin\alpha=\frac{AH}{AO}$$

بنابراین داریم :

$$\sin\alpha=\frac{\frac{a}{۲}}{R}=\frac{a}{۲R}$$

درنتیجه

$$R=\frac{a}{۲\sin\alpha}$$

از طرفی

$$|\cos\alpha|=\frac{OH}{OA}=\frac{OH}{R}$$

پس

$$OH=R|\cos\alpha|$$

همچنین داریم

$$|tg\alpha|=\frac{AH}{OH}=\frac{\frac{a}{۲}}{OH}$$

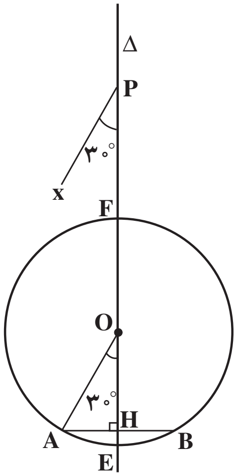
پس

$$OH=\frac{a}{۲|tg\alpha|}$$

درنتیجه :

$$OH = R|\cos\alpha| = \frac{a}{۲|tg\alpha|}$$

مثال ۱: پاره‌خط AB به طول ۴ سانتی‌متر داده شده است. کمان درخور زاویه °۳۰ روبه‌رو به این پاره‌خط را رسم کنید. شعاع دایره‌ای را که این کمان درخور بخشی از آن است و فاصلهٔ مرکز این دایره از پاره‌خط AB را تعیین کنید.



حل: خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ اختیاری P واقع بر Δ نیمخط Px را چنان رسم می‌نماییم که $H\hat{P}x = ۳۰°$ باشد (H وسط پاره‌خط AB است). از نقطهٔ A خطی موازی Px رسم می‌کنیم تا خط Δ را در نقطهٔ O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم می‌کنیم. کمان $\overset{\frown}{AFB}$ از این دایره قسمتی (نیمی) از مکان هندسی خواسته شده است. با انتخاب نقطهٔ P در طرف دیگر پاره‌خط و تکرار همین فرآیند نیمهٔ دیگر مکان هندسی به‌دست می‌آید.

شعاع دایرهٔ (OA و O) را R می‌نامیم. می‌دانیم که :

$$R = \frac{a}{۲\sin\alpha}$$

پس

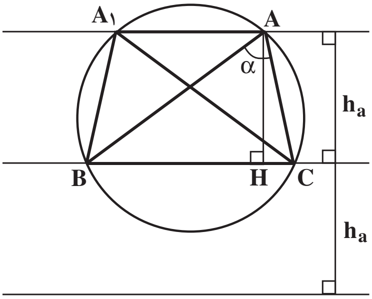
$$R = \frac{۴}{۲\sin ۳۰°} = ۴$$

از طرفی داریم :

$$OH = R|\cos\alpha|$$

بنابراین :

$$OH = ۴|\cos ۳۰°| = ۲\sqrt{۳}$$



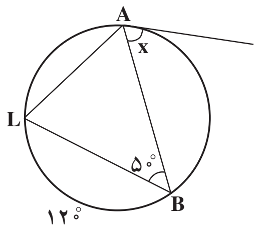
مثال ۲: از مثلث ABC، ضلع BC = a ، زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ و ارتفاع $AH = h_a$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

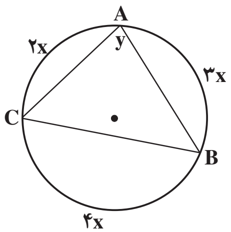
حل: برای رسم مثلث ABC، نخست پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم. حال باید رأس A را مشخص

کنیم. چون $B\hat{A}C = \alpha$، پس یک مکان هندسی رأس A کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط BC است؛ از طرفی $AH = h_a$ مقدار ثابتی است، پس مکان هندسی دیگر رأس A دو خط موازی ضلع BC و به فاصلهٔ h_a از آن است. این دو مکان هندسی را رسم می‌کنیم، نقطه یا نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی، رأس A است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است. مسأله چند جواب دارد؟

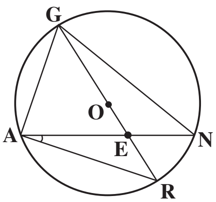
مسأله‌ها

۱. اندازهٔ x و y را در هر یک از شکلهای زیر تعیین کنید.





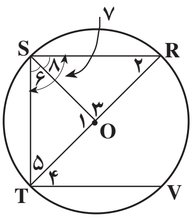
۲. در دایرهٔ به مرکز O، GR قطر دایره است. $\overset{\frown}{AG} = ۷۰^\circ$ و $N\hat{A}R = ۳۰^\circ$. اندازه‌های زیر را به‌دست آورید و در جای مناسب روی شکل یادداشت کنید:



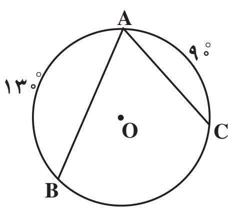
الف) $\hat{N}$ ب) $\hat{R}$

پ) $\overset{\frown}{NR}$ ت) $\overset{\frown}{GN}$

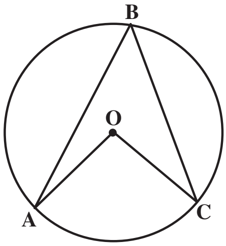
ث) $G\hat{A}N$ ج) $G\hat{A}R$



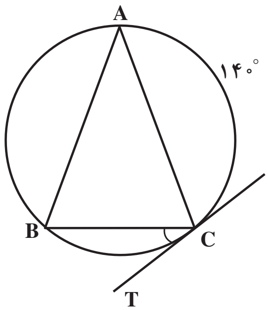
۳. در دایرهٔ به مرکز O، RS||VT، $\overset{\frown}{TS} = ۷۰^\circ$ و RT قطر دایره است. اندازهٔ زاویه‌های ۱ تا ۸ را به‌دست آورید.



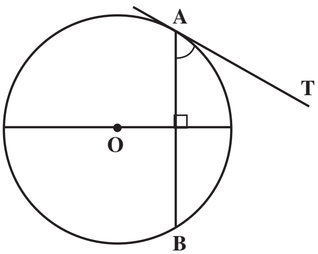
۴. زاویهٔ محاطی BAC در دایرهٔ به مرکز O داده شده است. اگر $\overset{\frown}{AB} = ۱۳۰^\circ$ و $\overset{\frown}{AC} = ۹۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ BAC را تعیین کنید.



۵. در دایــرهٔ بــه مــرکــز O، اگــر $A\hat{O}C = (۳\alpha + ۱۲)^\circ$ و $A\hat{B}C = (\alpha + ۱۶)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویه‌های مرکزی AOC و محاطی ABC را تعیین کنید.

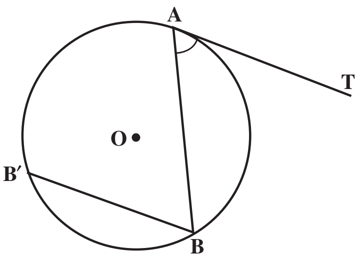


۶. در شکل روبه‌رو، AB = AC ، CT مماس بر دایره در نقطهٔ C و $\overset{\frown}{AC} = ۱۴۰^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ BCT را بیابید.



۷. زاویهٔ ظلی TAB در دایرهٔ به مرکز O داده شده است.
با استفاده از ویژگی قطر عمود بر وتر، ثابت کنید که

$$T\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$



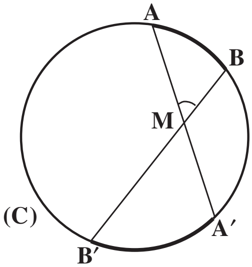
۸. زاویهٔ ظلی TAB در دایرهٔ به مرکز O داده شده است.
به کمک خط BB′ که موازی خط مماس AT رسم شده است، ثابت کنید که

$$T\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۹. با استفاده از تعریف زاویهٔ محاطی، نشان دهید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

۱۰. در مثلث ABC ضلع BC = a ، $\hat{A} = \alpha$ و میانهٔ $AM = m_a$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

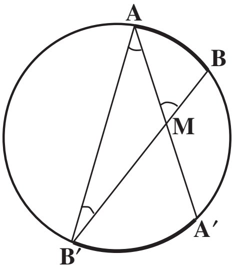
۲ــ۵ــ زاویهٔ بین دو وتر



دو وتر AA' و BB' از دایرهٔ (C) در نقطه M یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت می‌شود :

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

برهان: پاره‌خط AB' را رسم می‌کنیم. زاویهٔ $A\hat{M}B$ زاویهٔ خارجی مثلث AMB' است، پس :



$$A\hat{M}B = A\hat{B'}M + B'\hat{A}M$$

یا

$$A\hat{M}B = A\hat{B'}B + A'\hat{A}B'$$

چون $A\hat{B'}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ و $A'\hat{A}B' = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$ بنابراین :

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

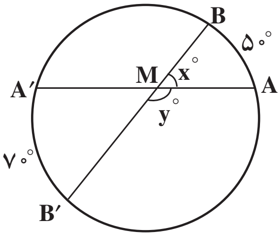
درنتیجه

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

به‌طورکلی می‌توان گفت :

قضیه: اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود برابر نصف مجموع اندازهٔ دو کمانی از دایره است که به ضلعها و امتداد ضلعهای آن زاویه محدودند.

مثال: به کمک شکل مقابل مقدارهای x و y را تعیین کنید.



حل: زاویهٔ $A\hat{M}B = x^\circ$ از برخورد دو وتر AA' و BB' به‌دست آمده است. پس داریم :

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

از آنجا

$$x^\circ = \frac{۵۰^\circ + ۷۰^\circ}{۲}$$

پس $x = ۶۰$

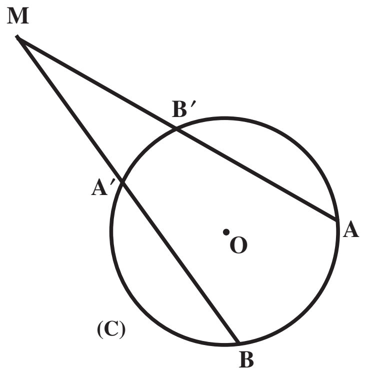
زاویهٔ $A\hat{M}B' = y^\circ$ مکمل زاویه AMB است. پس :

$$y^\circ = ۱۸۰^\circ - x^\circ$$

از آنجا $y^\circ = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ$

پس : $y = ۱۲۰$

۲ــ۶ــ زاویهٔ بین امتداد دو وتر

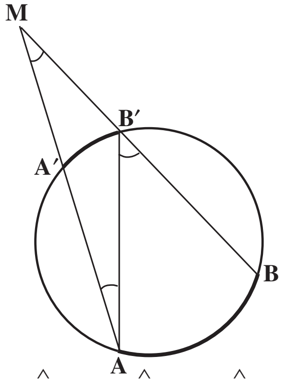


امتداد وترهای AA' و BB' از دایرهٔ (C) در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت می‌شود :

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

برهان: پاره خط AB' را رسم می‌کنیم. زاویهٔ $AB'B$ ، زاویهٔ خارجی مثلث AMB' است،

پس : $A\hat{B'}B = B'\hat{A}M + A\hat{M}B'$



و یا $A\hat{M}B' = A\hat{B'}B - B'\hat{A}M$

امّا : $A\hat{B'}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ و $B'\hat{A}M = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$. چرا؟

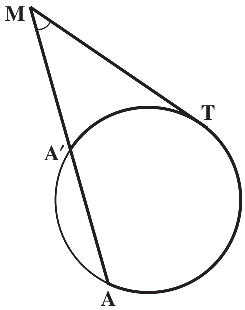
بنابراین $A\hat{M}B' = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$

درنتیجه :

$$A\hat{M}B = A\hat{M}B' = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

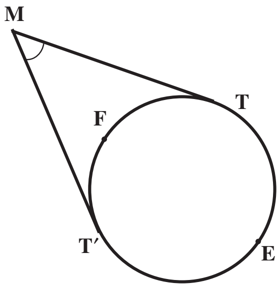
به‌طورکلی می‌توان گفت :

قضیه: اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازهٔ کمانهایی از آن دایره است که به ضلعهای آن زاویه محدودند.



تمرین ۱ــ خط مماس بر دایرهٔ (C) در نقطهٔ T امتداد وتر AA' از این دایره را در نقطهٔ M قطع کرده است (شکل روبه‌رو). ثابت کنید :

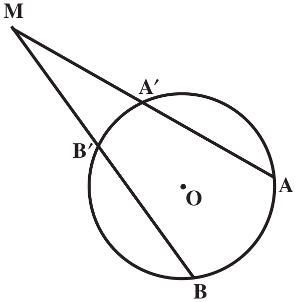
$$A\hat{M}T = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{A'T}}{۲}$$



تمرین ۲ ــ ثابت کنید زاویهٔ بین دو خط مماس رسم شده از دو نقطه T و T' بر یک دایره، برابر قدرمطلق نصف تفاضل دو کمان ایجاد شده بین نقطه‌های T و T' است.

راهنمایی: در شکل داده شده ثابت کنید

$$T\hat{M}T' = \left|\frac{\overset{\frown}{TET'} - \overset{\frown}{TFT'}}{۲}\right|$$



مثال ۱: امتدادهای دو وتر AA' و BB' از دایرهٔ O در نقطهٔ M متقاطعند. اندازهٔ زاویهٔ AMB را در هریک از حالتهای زیر تعیین کنید :

الف ــ اگر $\overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ$ و $\overset{\frown}{A'B'} = ۸۰^\circ$ باشد ؛

ب ــ اگر $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'} = ۳۰^\circ$ باشد.

پ ــ اگر $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} + ۶۰^\circ$ باشد ؛

ت ــ اگر $\dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۱}=\dfrac{\overset{\frown}{B'B}}{۴}=\dfrac{\overset{\frown}{BA}}{۳}=\dfrac{\overset{\frown}{AA'}}{۲}$

حل: داریم :

الف ــ $A\hat{M}B=\dfrac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}=\dfrac{۱۲۰^\circ-۸۰^\circ}{۲}=۲۰^\circ$

ب ــ $A\hat{M}B=\dfrac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}=\dfrac{۳۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ$

پ ــ $A\hat{M}B=\dfrac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}=\dfrac{\overset{\frown}{A'B'}+۶۰^\circ-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}=۳۰^\circ$

ت ــ داریم : $\dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۱}=\dfrac{\overset{\frown}{B'B}}{۴}=\dfrac{\overset{\frown}{BA}}{۳}=\dfrac{\overset{\frown}{AA'}}{۲}$

امّا : $\overset{\frown}{A'B'}+\overset{\frown}{B'B}+\overset{\frown}{BA}+\overset{\frown}{AA'}=۳۶۰^\circ$. چرا؟

پس می‌توان نوشت :

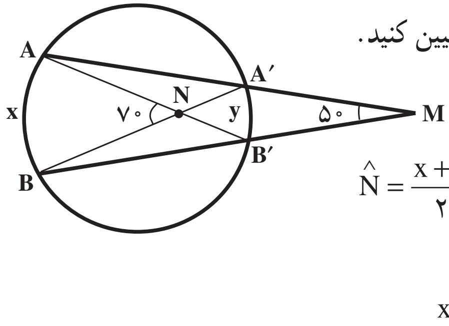
$$\dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۱}=\dfrac{\overset{\frown}{B'B}}{۴}=\dfrac{\overset{\frown}{BA}}{۳}=\dfrac{\overset{\frown}{AA'}}{۲}=\dfrac{\overset{\frown}{A'B'}+\overset{\frown}{B'B}+\overset{\frown}{BA}+\overset{\frown}{AA'}}{۱+۴+۳+۲}=\dfrac{۳۶۰}{۱۰}=۳۶^\circ$$

پس $\overset{\frown}{A'B'}=۳۶^\circ$ و $\overset{\frown}{AB}=۱۰۸^\circ$

درنتیجه :

$$A\hat{M}B=\dfrac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}=\dfrac{۱۰۸^\circ-۳۶^\circ}{۲}=۳۶^\circ$$

مثال ۲: با استفاده از شکل روبه‌رو، x و y را تعیین کنید.



حل: داریم :

$$\hat{N}=\dfrac{x+y}{۲}\Rightarrow ۷۰=\dfrac{x+y}{۲}$$

از آنجا :

(۱) $$x+y=۱۴۰$$

از طرفی

$$\hat{M}=\dfrac{x-y}{۲}\Rightarrow ۵۰=\dfrac{x-y}{۲}$$

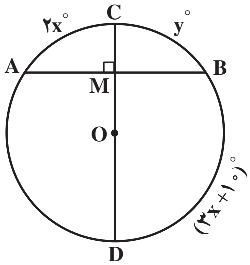
پس

(۲) $$x-y=۱۰۰$$

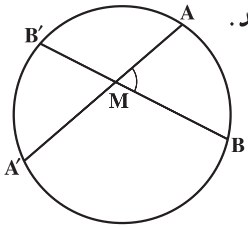
از رابطه‌های (۱) و (۲) مقدارهای x و y به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} x+y=۱۴۰ \\ x-y=۱۰۰ \end{cases} \Rightarrow x=۱۲۰^\circ \text{ و } y=۲۰^\circ$$

مسأله‌ها



۱. قطر CD در نقطهٔ M بر وتر AB از دایرهٔ به مرکز O عمود است. اگر $\overset{\frown}{AC}=۲x^\circ$ ، $\overset{\frown}{BC}=y^\circ$ و $\overset{\frown}{BD}=(۳x+۱۰)^\circ$ باشد، x و y را بیابید.



۲. دو وتر AA' و BB' از یک دایره، در نقطهٔ M متقاطعند :

الف) اندازهٔ زاویهٔ AMB را در هریک از حالتهای زیر تعیین کنید.

ـ $\overset{\frown}{AB}=۹۰^\circ$ و $\overset{\frown}{A'B'}=۶۰^\circ$

ـ $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{A'B'}$ هر کدام ۷۵° باشند

ـ $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}=۲۵۰^\circ$

ـ $\overset{\frown}{AB'}+\overset{\frown}{A'B}=۱۷۰^\circ$

ب) اگر :

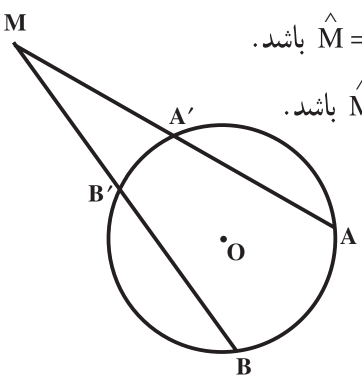
ـ $A\hat{M}B=۸۵^\circ$ باشد، $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}$ را تعیین کنید.

ـ $A\hat{M}B=۴۸^\circ$ باشد، $\overset{\frown}{AB'}+\overset{\frown}{A'B}$ را بیابید.

ـ $A\hat{M}B=۶۰^\circ$ و $\overset{\frown}{AB'}=۱۶۰^\circ$ باشد، $\overset{\frown}{A'B}$ را تعیین کنید.

ـ $A\hat{M}B'=۷۰^\circ$ و $\overset{\frown}{A'B}=\overset{\frown}{AB'}$ باشد، $\overset{\frown}{AB'}$ را بیابید.

۳. امتدادهای دو وتر AA' و BB' از دایرهٔ O در نقطهٔ M متقاطعند، تعیین کنید :

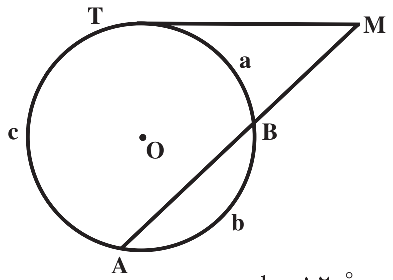


الف) اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{A'B'}$ را، اگر $\overset{\frown}{AB}=۱۶۰^\circ$ و $\hat{M}=۲۰^\circ$ باشد.

ب) اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ را، اگر $\overset{\frown}{A'B'}=۶۰^\circ$ و $\hat{M}=۳۵^\circ$ باشد.

پ) اندازهٔ $\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}$ را، اگر $\hat{M}=۴۵^\circ$ باشد.

ت) اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{A'B'}$ را، اگر $\overset{\frown}{AB}=۳\overset{\frown}{A'B'}$ و $\hat{M}=۲۵^\circ$ باشد.



۴. خط مماس بر دایره در نقطهٔ T و امتداد وتر AB در نقطهٔ M متقاطعند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$ ، $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$:

الف) اندازهٔ زاویهٔ M را در هریک از حالتهای زیر تعیین کنید :

ــ $a = ۶۰^\circ$ و $c = ۱۵۰^\circ$ ــ $c = ۲۰۰^\circ$ و $b = ۱۲۰^\circ$

ــ $c - a = ۷۴^\circ$ ــ $\frac{a}{۱} = \frac{b}{۴} = \frac{c}{۷}$

ب) تعیین کنید :

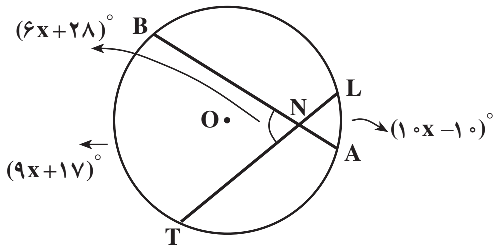
ــ a را در صورتی که $c = ۲۰۰^\circ$ و $\hat{M} = ۴۵^\circ$ باشد.

ــ c را در صورتی که $a = ۵۵^\circ$ و $\hat{M} = ۳۰^\circ$ باشد.

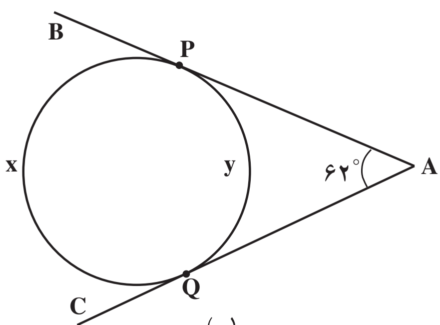
ــ a را در صورتی که $c = ۳a$ و $\hat{M} = ۴۵^\circ$ باشد.

ــ a را در صورتی که $b = ۱۰۰^\circ$ و $\hat{M} = ۶۰^\circ$ باشد.

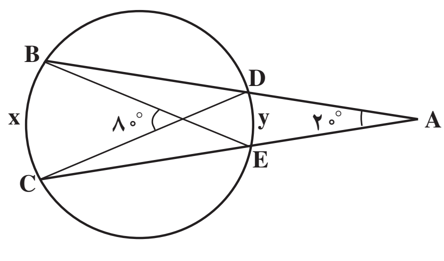
۵. در شکل زیر x و اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{N}T$ را تعیین کنید.



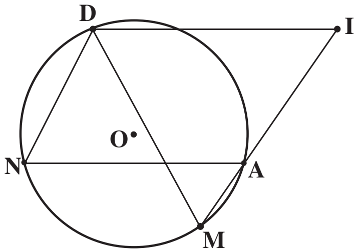
۶. در هرکدام از شکلهای زیر x و y را بیابید.



(ب)

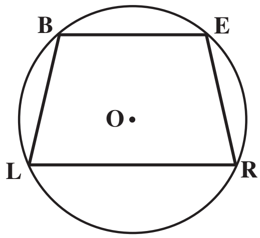


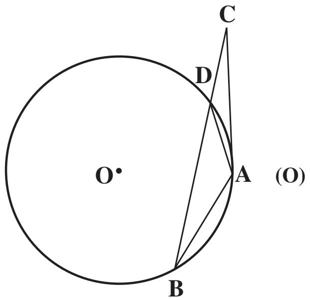
(الف)



۷. در شکل روبه‌رو چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های I، A و M روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید $DM = DI$.

۸. در دایرهٔ (O)، $BL = ER$. نشان دهید $BE \parallel LR$.



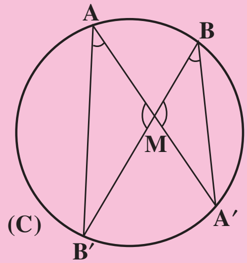


۹. در دایرهٔ (O) مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطهٔ D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC، متساوی‌الساقین است.

۲ــ۷ــ رابطهٔ طولی در دایره

قضیه: از نقطهٔ M واقع در داخل دایرهٔ (C) دو وتر دلخواه AA' و BB' رسم شده‌اند. ثابت کنید:

$$MA.MA' = MB.MB'$$



برهان: از A به B' و از B به A' وصل می‌کنیم. دو مثلث MAB' و MBA' متشابه‌اند زیرا:

$$A\hat{M}B' = B\hat{M}A' \quad \text{و} \quad B'\hat{A}A' = A'\hat{B}B' = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

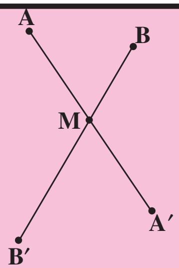
پس داریم

$$\frac{MA}{MB}=\frac{MB'}{MA'}$$

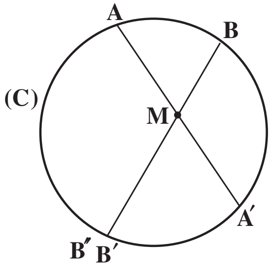
درنتیجه :

$$MA.MA'=MB.MB'$$

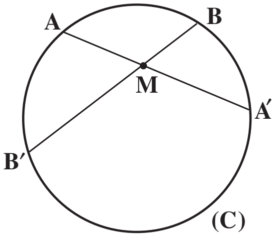
عکس قضیه: اگر دو پاره‌خط AA' و BB' در نقطهٔ M یکدیگر را طوری قطع کنند که $MA.MA'=MB.MB'$ ، آن‌گاه چهار نقطهٔ A، A' ، B و B' روی یک دایره‌اند.



برهان: بر سه نقطهٔ A، B و A' یک دایره می‌گذرانیم. (دایرهٔ C) اگر این دایره از نقطهٔ B' بگذرد، حکم ثابت است ؛ امّا اگر این دایره از B' نگذرد، خط MB را در نقطهٔ دیگری مانند B'' قطع خواهد کرد. در این صورت خواهیم داشت : $MA.MA'=MB.MB''$. از مقایسهٔ این رابطه با فرض قضیه، نتیجه می‌شود $MB'=MB''$ ، و این نشان می‌دهد که B'' بر B' منطبق است یعنی دایره‌ای که بر سه نقطه A، B و A' گذشته است، از نقطهٔ B' نیز می‌گذرد، پس چهار نقطهٔ A، A' ، B و B' روی یک دایره واقعند.



مثال: دو وتر AA' و BB' از دایرهٔ (C) در نقطهٔ M متقاطعند. اگر $MA=۴$ ، $MB=۳$ و $MA'=۶$ باشد اندازهٔ وتر BB' را به‌دست آورید.



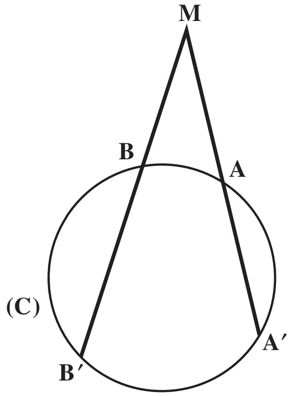
حل: چون $BB'=MB+MB'$ ، پس برای تعیین اندازهٔ پاره‌خط BB' باید اندازهٔ پاره‌خط MB' را به‌دست آوریم، داریم :

$$MA.MA'=MB.MB'\Rightarrow ۴\times ۶=۳\times MB'\Rightarrow MB'=۸$$

پس

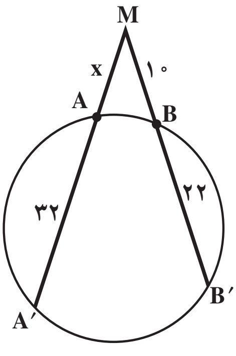
$$BB'=MB+MB'=۳+۸=۱۱$$

تمرین ــ ثابت کنید اگر امتداد وترهای AA' و BB' از دایرهٔ (C) یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند، آنگاه :

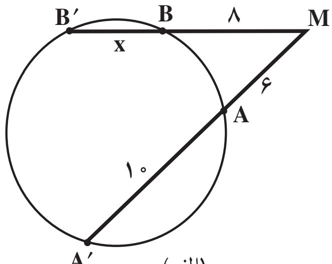


$$MA.MA' = MB.MB'$$

مثال: مقدار x را در هریک از شکلهای زیر به‌دست آورید.



(ب)



(الف)

حل: با توجه به داده‌های مسأله داریم :

الف ــ $MA' = MA + AA' = ۶ + ۱۰ = ۱۶$ ، $MB' = MB + BB' = ۸ + x$

$MA.MA' = MB.MB' \Rightarrow ۶ \times ۱۶ = ۸(۸ + x) \Rightarrow x = ۴$

ب ــ $MB' = MB + BB' = ۱۰ + ۲۲ = ۳۲$ ، $MA' = MA + AA' = x + ۳۲$

$MA.MA' = MB.MB'$

$x(x + ۳۲) = ۱۰ \times ۳۲$

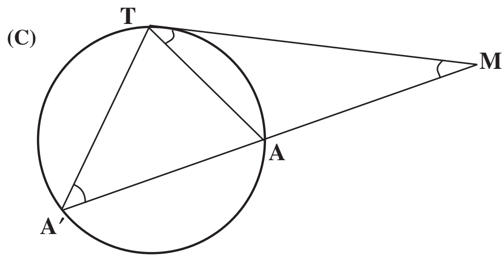
$x^۲ + ۳۲x - ۳۲۰ = ۰$

$(x + ۴۰)(x - ۸) = ۰$

$\boxed{x = ۸}$ یا $x = -۴۰$

طبیعی است که جواب $x = -۴۰$ قابل قبول نیست.

قضیه: اگر از یک نقطه، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، قطعه‌ای از خط مماس محصور بین آن نقطه و نقطه تماس، واسطه هندسی بین دو قطعهٔ قاطع است.



برهان: دایرهٔ (C) و نقطهٔ M را در خارج آن در نظر می‌گیریم. مماس MT و قاطع MAA′ را نسبت به این دایره رسم می‌کنیم؛ می‌خواهیم ثابت کنیم $MT^{۲} = MA.MA'$. از T به A و A′ وصل می‌کنیم. دو مثلثِ MAT و MA′T متشابه‌اند. زیرا:

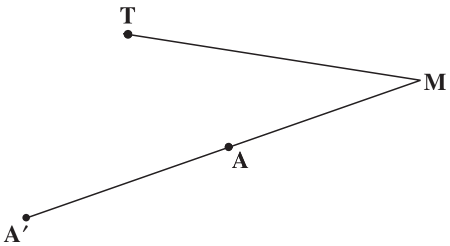
$$A\hat{T}M = A\hat{A'}T = \frac{AT}{۲} \ , \ \hat{M} = \hat{M}$$

پس

$$\frac{MT}{MA} = \frac{MA'}{MT}$$

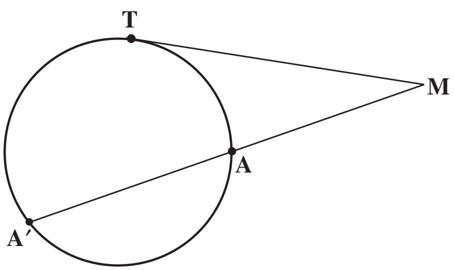
و درنتیجه:

$$MT^{۲} = MA.MA'$$



تمرین ــ(عکس قضیهٔ بالا). سه نقطهٔ M، A و A′ روی یک خط راست و نقطهٔ T خارج این خط به قسمی واقعند که $MT^{۲} = MA.MA'$ است. ثابت کنید دایره‌ای که بر سه نقطهٔ A، A′ و T می‌گذرد در نقطهٔ T بر خط MT مماس است.

مثال: در شکل مقابل، خط MT مماس بر دایره در نقطهٔ T، و MA قاطع دایره است:



الف ــ اگر $MA = ۴$ و $AA' = ۵$ باشد، اندازهٔ MT را تعیین کنید.

ب ــ اگر $MA' = ۱۸$ و $MT = ۱۲$ باشد، اندازهٔ AA′ را به‌دست آورید.

حل: با توجه به این که $MT^{۲} = MA.MB$،

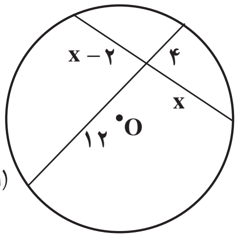
داریم :

الف ــ
$$MT^{۲} = ۴\times ۹ = ۳۶$$
$$MT = ۶$$

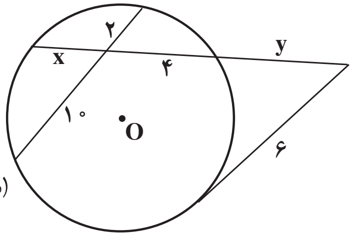
ب ــ
$$MT^{۲} = MA.MA'$$
$$۱۲^{۲} = MA\times ۱۸$$
$$MA = ۸$$
$$AA' = MA' - MA = ۱۸ - ۸ = ۱۰$$

مسأله‌ها

۱. در هریک از شکلهای زیر x و y را محاسبه کنید.

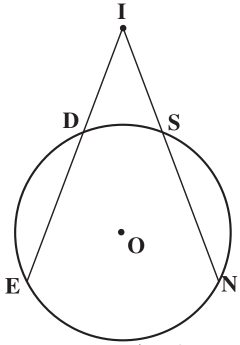


(الف)

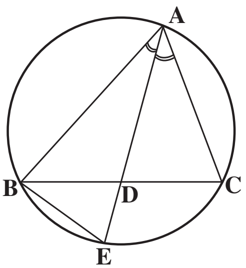


(ب)

۲. در شکل زیر دو قاطع IE و IN با هم برابرند، ثابت کنید : IS = ID



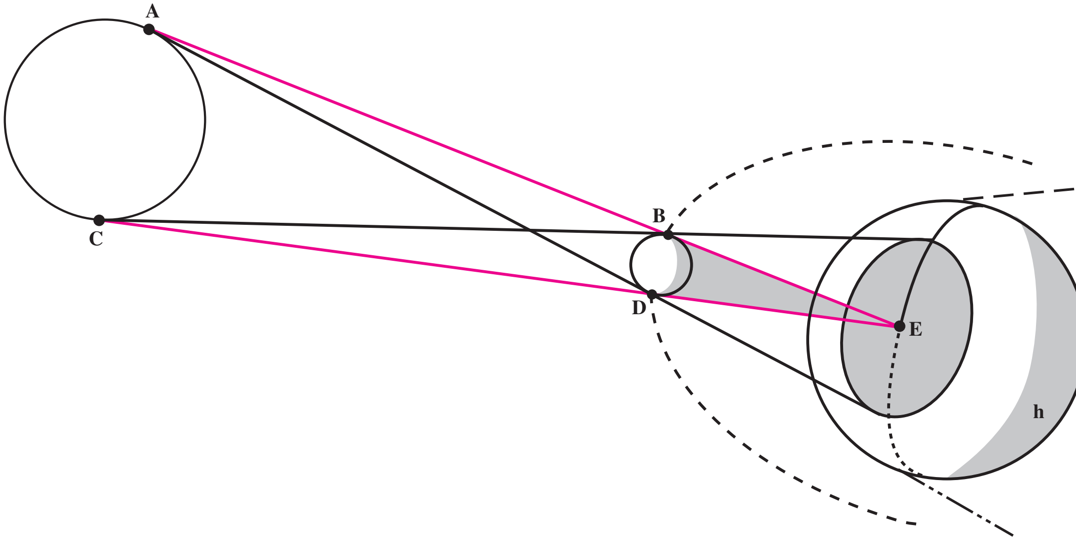
۳. با توجه به شکل احکام زیر را ثابت کنید. (AD نیمساز زاویهٔ BAC است)



الف) مثلث ADC با مثلث ABE متشابه است.

ب) $AB.AC = AD.AE$

پ) $AD^{۲} = AB.AC - BD.DC$



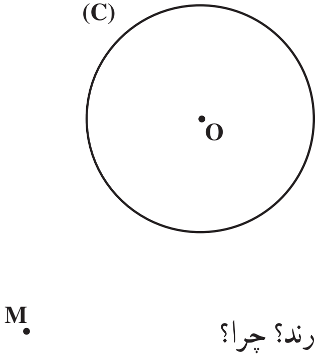
۲ــ۸ــ ترسیمهای هندسی

کسوف کامل یک منظره متحیّرکننده است. روشنایی آسمان فوراً به تاریکی تبدیل می‌شود. پرنده‌ها حیران می‌شوند. سیاهی غیرمنتظره تنها برای مدتی (حداکثر هفت دقیقه) بر زمین چیره می‌شود و سپس نور و روشنایی با سرعتی که محو شده بود باز می‌گردد.

چنین حالتی وقتی رُخ می‌دهد که ماه طوری بین زمین و خورشید قرار می‌گیرد که سایه‌اش بر روی زمین می‌افتد. این سایه به شکل یک مخروط است و به دلیل اندازه‌های نسبی ماه و خورشید و زمین و فاصله‌های آنها از یکدیگر، تمام یا قسمتی از زمین در این مخروط سایه قرار می‌گیرد.

فعالیت ۲ــ۵

دایرهٔ $C(O,R)$ و نقطهٔ M واقع در خارج این دایره داده شده‌اند :



۱ــ از M به مرکز دایره وصل کنید.

۲ــ به قطر پاره‌خط OM یک دایره رسم کنید.

۳ــ نقطه‌های برخورد دایرهٔ به قطر OM با دایرهٔ (C) را T و T' بنامید. از نقطه‌های O و M به نقطه‌های T و T' وصل کنید.

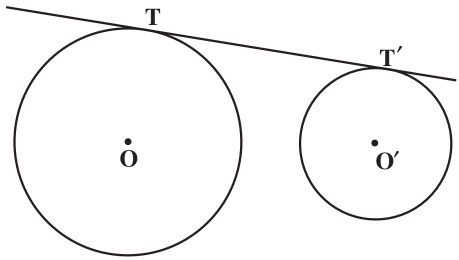
۴ــ زاویه‌های OTM و $OT'M$ چند درجه‌اند؟ چرا؟

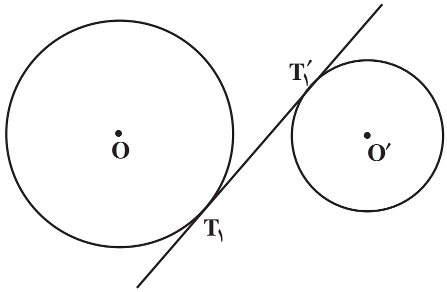
۵ ــ دو خط MT و MT' نسبت به دایرهٔ (C) چه وضعی دارند؟ چرا؟

از هر نقطهٔ خارج یک دایره فقط دو خط مماس بر آن دایره می‌توان رسم نمود.

مماس مشترک دو دایره

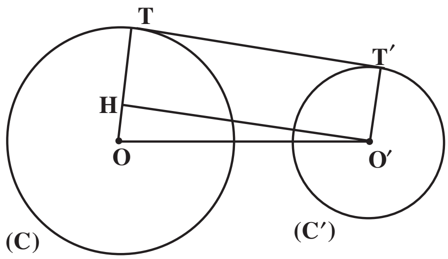
مماس مشترک دو دایره خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد. اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، این خط، **مماس مشترک خارجی**، و اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، این خط **مماس مشترک داخلی** دو دایره نامیده می‌شود.





رسم مماس مشترک خارجی دو دایره

دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم خط TT' یک مماس مشترک خارجی این دو دایره باشد. پاره‌خط OO' خط‌المرکزین دو دایره را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ O' خطی موازی TT' رسم می‌نماییم تا OT را در نقطهٔ H قطع کند.



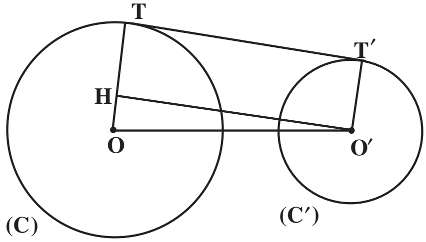
۱ــ ویژگیهای چهارضلعی $THO'T'$ را توضیح دهید.

۲ــ اندازهٔ پاره‌خط OH را برحسب R و R' به‌دست آورید.

۳ــ یک دایره به مرکز O و به شعاع OH رسم کنید. خط $O'H$ نسبت به این دایره چه وضعی دارد؟

۴ــ با توجه به کارهای انجام شده در بالا، روش رسم مماس مشترکهای خارجی دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را شرح دهید.

اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره ــ اندازهٔ پاره‌خط TT' طول مماس مشترک



خارجی دو دایره نامیده می‌شود. برای محاسبهٔ طول این پاره‌خط در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OO'H$ $(\hat{H} = ۹۰^\circ)$ داریم :

$$OO'^۲ = OH^۲ + O'H^۲$$

با فرض $OO' = d$ و با توجه به این که $O'H = TT'$ و $OH = R - R'$ ، خواهیم داشت :

$$d^۲ = (R - R')^۲ + TT'^۲$$

از آنجا داریم

$$TT'^۲ = d^۲ - (R - R')^۲$$

درنتیجه : $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$

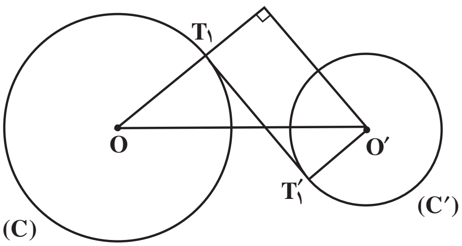
مثال: اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ $C(O,۷)$ و $C'(O',۱)$ را با فرض $OO' = ۱۰$ تعیین کنید.

حل: داریم : $R = ۷$ ، $R' = ۱$ ، $d = ۱۰$ ، $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$

پس $TT' = \sqrt{۱۰^۲ - (۷ - ۱)^۲}$

درنتیجه : $TT' = ۸$

تمرین ۱ــ دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ داده شده‌اند. مماس مشترکهای داخلی این دو دایره را رسم کنید و مراحل کار خود را توضیح دهید. در چه صورت دو دایره مماس مشترک داخلی دارند؟



تمرین ۲ــ اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را بر حسب R و R' و $OO' = d$ به‌دست آورید.

مسأله‌ها

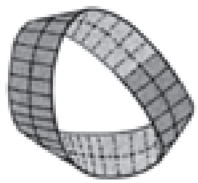
۱. وضعیت دو دایره را در حالتهای مختلف در نظر بگیرید، سپس در هر حالت مماس مشترکهای آنها را در صورت وجود رسم کنید.

۲. دو دایره به شعاعهای ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازهٔ مماس مشترک خارجی آنها را به‌دست آورید.

۳. مقدار a را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاعهای ۸ و ۳ و خط‌المرکزین $d = 13$، برابر $5a - 3$ باشد.

۴. ثابت کنید مماس مشترکهای داخلی و خط‌المرکزین دو دایره همرسند.

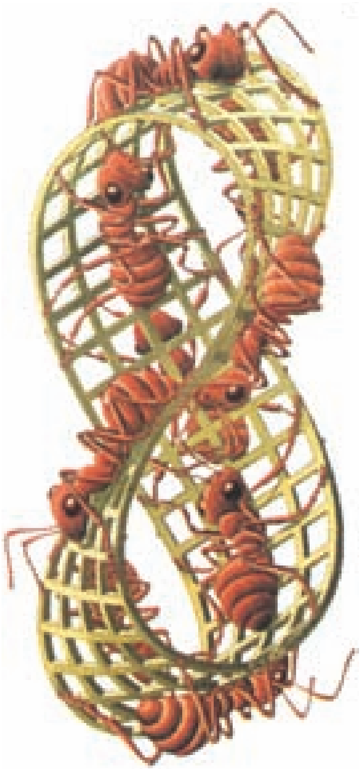
۵. در مورد همرسی مماس مشترکهای خارجی دو دایره و خط‌المرکزین آنها چه می‌توان گفت؟



مجله ریاضی

یکی از پدیده‌های جالب در ریاضیات **نوار موبیوس** است که در اواخر قرن هجدهم توسط فردیناند موبیوس معرفی شد.

برای ساختن آن یک نوار کاغذی به طول ۱۸ سانتی‌متر و عرض ۳ سانتی‌متر تهیه کنید. سپس نوار را نیم دور چرخانده، دو سر آزاد آن‌را به هم بچسبانید.



قلم خود را روی نقطه‌ای در وسط نوار قرار دهید و بدون بلند کردن آن خطی در امتداد نوار رسم کنید تا به نقطهٔ شروع برگردید.

به همین دلیل است که می‌گویند، نوار موبیوس فقط یک رو دارد. حال نوار را با دقت در امتداد آن خط بِبُرید (قیچی کنید). چه اتفاقی می‌افتد؟

با استفاده از یک نوار کاغذی به طول ۲۴ و عرض ۴/۵ سانتی‌متر نوار موبیوس دیگری تهیه کنید. سپس در امتداد خطی به فاصلهٔ ۱/۵ سانتی‌متر از لبهٔ نوار آن‌را بِبُرید. آیا باز هم نتیجه‌ای مشابه تجربهٔ قبل به‌دست می‌آورید؟

قضاوت شما در مورد این پدیده چیست؟