

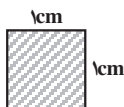
مساحت و قضیه ی فیثاغورس



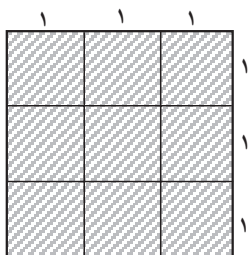
کنستزارهای شاهرود

۲-۱- مساحت

با انتخاب هر واحدی برای اندازه گیری طول یک پاره خط، واحدی نیز برای اندازه گیری مساحت به دست می آوریم که به کمک آن می توانیم مقدار سطح محدود شده در ناحیه ای از صفحه را اندازه بگیریم. برای مثال، اگر سانتی متر را برای اندازه گیری طول انتخاب کنیم واحد نظیر آن برای



شکل ۱: $1 \text{ cm}^2 =$ مساحت

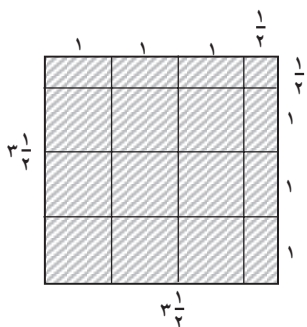


شکل ۲

اندازه‌گیری مساحت، سانتی متر مربع است که عبارت است از مساحت ناحیه‌ی محدود به مربعی به ضلع یک سانتی متر (شکل ۱).

مربعی که طول ضلع آن یک واحد باشد (با هر واحد اندازه‌گیری طول)، مربع واحد نامیده می‌شود. برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌های مختلف در صفحه باید تعداد مربع‌های واحد و بخش‌هایی از مربع‌های واحد که ناحیه را می‌پوشانند، پیدا کنیم. برای مثال، مساحت مربعی به ضلع ۳ سانتی متر، ۹ سانتی متر مربع است (شکل ۲)، زیرا با ۹ مربع واحد می‌توان سطح آن را پوشاند.

فعالیت ۱-۲



شکل ۳

۱. مربعی به ضلع $3\frac{1}{2}$ سانتی متر را با ۹ مربع واحد، ۶ تا نیمه مربع و بالاخره مربع کوچکی به ضلع $\frac{1}{4}$ سانتی متر که مساحت آن یک چهارم مساحت مربع واحد است پوشانده‌ایم (شکل ۳).

بنابراین مساحت این مربع برابر است با

$$9 + (6 \times \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} = 9 + 3 + \frac{1}{4} \\ = 12\frac{1}{4} \text{ cm}^2$$

۲. مربعی به ضلع $4\frac{1}{4}$ سانتی متر رسم کنید. مساحت این مربع را با شمارش تعداد مربع‌های واحد و بخش‌هایی از مربع واحد که برای پوشاندن آن لازم است به دست آورید، سپس حاصل ضرب $4\frac{1}{4} \times 4\frac{1}{4}$ را پیدا و با آن مقایسه کنید.

۳. مستطیلی رسم کنید که اندازه‌ی ضلع‌های آن ۳ سانتی متر و ۵ سانتی متر باشد. مساحت این مستطیل را با شمارش تعداد مربع‌های واحد که برای پوشاندن آن لازم است، تعیین کنید و با حاصل ضرب 3×5 مقایسه کنید.

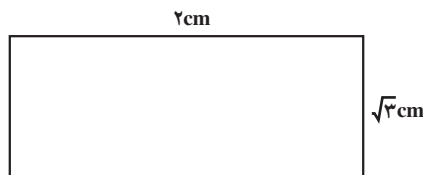
۴. مستطیلی به ضلع‌های $6\frac{1}{4}$ سانتی متر و ۵ سانتی متر رسم کنید و با شمارش تعداد مربع‌های واحد و بخش‌هایی از مربع واحد که برای پوشاندن آن لازم است، مساحت آن را به دست آورید. سپس نتیجه را با حاصل ضرب $6\frac{1}{4} \times 5$ مقایسه کنید.

نتایجی را که از فعالیت ۲-۱ به دست آورده‌ایم به صورت کلی خلاصه می‌کنیم:

مساحت مستطیلی به طول ضلع‌های a و b برابر است با:

$a \cdot b$

توجه: اندازه‌ی ضلع‌های مربع و مستطیل می‌تواند اعداد گنگ مثبت هم باشند.



شکل ۴

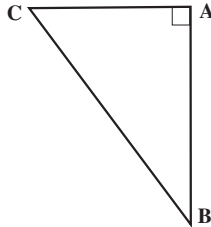
مثال ۱: در شکل ۴، اندازه ضلع‌های مستطیل ۲ و $\sqrt{3}$ سانتی متر هستند.

بنابراین:

$$\text{مساحت مستطیل} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

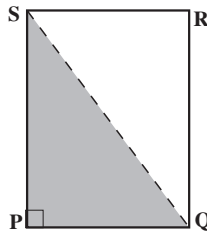
فعالیت ۲-۲

۱. مثلث ABC را که در رأس A قائمه است رسم کنید (شکل ۵).



شکل ۵

۲. مستطیل $PQRS$ را طوری رسم کنید که طول و عرض آن به ترتیب برابر با AB و AC باشند. آنگاه قطر QS را رسم کنید (شکل ۶).



شکل ۶

۳. آیا مثلث‌های ABC ، PQS و RSQ هم‌نهشت هستند؟ جواب خود را با دلیل بیان کنید.

۴. از قسمت ۳ چه نتیجه‌ای در مورد مساحت این سه مثلث به دست می‌آورید؟

۵. طول مستطیل را ۵ و عرض آن را ۳ واحد طول بگیرید. مساحت این مستطیل چقدر

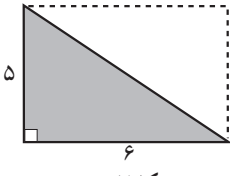
است؟

۶. با اندازه‌های فوق، مساحت مثلث‌های PQS ، RSQ و ABC را به دست آورید.

۷. چه رابطه‌ای بین مساحت مثلث ABC و مساحت مستطیل $PQRS$ وجود دارد؟

۸. اگر طول ضلع‌های زاویه‌های قائمه در مثلث شکل ۵، b و c واحد باشند، مساحت آن

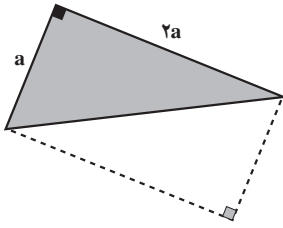
چگونه به دست می‌آید؟ توضیح دهید.



شکل ۷

مثال ۲: با توجه به نتیجه‌ی فعالیت ۲-۲، مساحت مثلث قائم‌الزاویه در شکل ۷ برابر است با:

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15 \text{ cm}^2$$



شکل ۸

مثال ۳: مساحت مثلث قائم‌الزاویه در شکل ۸ برابر است با:

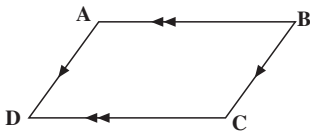
$$\frac{1}{2} \times 2a \times a = a^2 \text{ واحد سطح}$$

مساحت مثلث قائم‌الزاویه

مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه، یعنی اگر طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در یک مثلث قائم‌الزاویه a و b باشد، آنگاه:

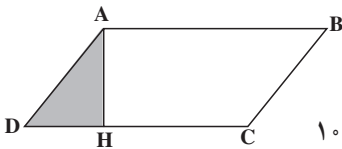
$$\text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه} = \frac{1}{2} ab$$

فعالیت ۲-۳



شکل ۹

۱. روی یک قطعه مقوا، متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم کنید.



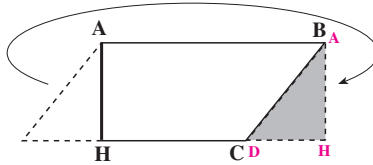
شکل ۱۰

۲. ارتفاع AH وارد بر ضلع DC را رسم کنید تا مثلث AHD تشکیل گردد.

۱- بهتر است متوازی‌الاضلاع‌های رسم شده متفاوت باشند.

۲- تکیه‌ی این فعالیت بر چگونگی رسم متوازی‌الاضلاع نیست.

۳. مثلث AHD را بریده و آن را طوری به سمت راست منتقل کنید که ضلع AD روی ضلع BC قرار بگیرد.

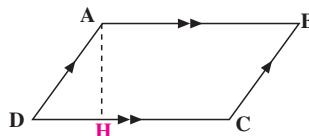


شکل ۱۱

۴. به نظر شما چهارضلعی ABHH چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟
 ۵. با توجه به مساحت ABHH، روشی برای پیدا کردن مساحت متوازی الاضلاع ABCD پیدا کنید.
 حال به کمک استدلال استنتاجی، رابطه‌ای را که در فعالیت قبل برای مساحت متوازی الاضلاع به دست آوردید، نشان می‌دهیم.

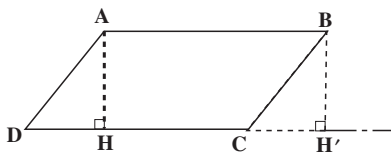
فعالیت ۲-۴

۱. متوازی الاضلاع ABCD را در نظر می‌گیریم و ارتفاع وارد بر ضلع DC را رسم می‌کنیم (شکل ۱۲).

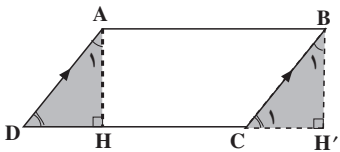


شکل ۱۲

۲- ضلع DC را امتداد می‌دهیم و از رأس B خطی بر امتداد آن عمود می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی H' قطع کنند (شکل ۱۳).



شکل ۱۳



شکل ۱۴

۳. نشان دهید چهارضلعی $ABH'H$ مستطیل است.
 ۴. در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، ضلع های AD و BC موازی و مساوی هستند و به کمک قضیه ی خطوط موازی می توان نتیجه گرفت (چرا؟).

$$\hat{D} = \hat{C}_1$$

در نتیجه متمم های آن ها یعنی \hat{A}_1 و \hat{B}_1 نیز برابرند.

با ادامه ی این فعالیت می توان نتایج زیر را به دست آورد :

(الف) دو مثلث AHD و $BH'C$ به حالت (ز ض ز) همنهشت هستند، پس :

$$\text{مساحت مثلث } BH'C = \text{مساحت مثلث } AHD$$

(ب) مثلث AHD و دوزنقه ی $ABCH$ ، متوازی الاضلاع $ABCD$ را به دو قسمت مجزا^۱ تقسیم کرده اند، پس :

$$\text{مساحت دوزنقه ی } ABCH + \text{مساحت مثلث } AHD = \text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD$$

مقدار مساوی مساحت AHD را از (الف) جایگزین می کنیم.

$$\text{مساحت دوزنقه ی } ABCH + \text{مساحت مثلث } BH'C = \text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD$$

(پ) با دقت در شکل ۱۴، دیده می شود که دوزنقه ی $ABCH$ و مثلث $BH'C$ ، مستطیل $ABH'H$ را می سازند، در نتیجه

$$\text{مساحت مستطیل } ABH'H = \text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD$$

یا

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD = AB \times AH$$

چون $AB = DC$ ، پس

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD = DC \times AH$$

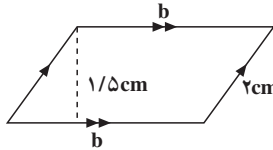
مساحت متوازی الاضلاع

مساحت هر متوازی الاضلاع برابر با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع نظیر آن

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = b \times h \text{ است.}$$

۱- منظور از دو شکل مجزا آن است که مساحت اشتراک آن ها صفر باشد.

مثال ۴: محیط متوازی الاضلاعی ۱۶ سانتی متر، یک ضلع آن ۲ سانتی متر و ارتفاع وارد بر ضلع دیگر ۱/۵ سانتی متر است. مساحت متوازی الاضلاع را حساب کنید.
حل: چون در هر متوازی الاضلاع، ضلع‌ها دوجه دو با هم مساوی هستند، پس محیط آن برابر است با دو برابر مجموع دو ضلع غیرموازی،



شکل ۱۵

یعنی:

$$\text{محیط متوازی الاضلاع} = 2(2 + b) = 16$$

$$2 + b = 8$$

$$b = 8 - 2$$

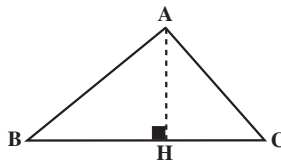
پس $b = 6$. در نتیجه:

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت متوازی الاضلاع} = \text{قاعده}$$

$$= 6 \times 1/5$$

$$= 9 \text{ cm}^2$$

می‌توان مساحت مثلث را با استفاده از مساحت متوازی الاضلاع، به دست آورد.
 مثلث ABC (شکل ۱۶) را در نظر بگیرید.

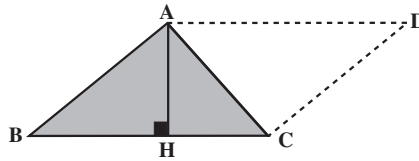


شکل ۱۶

پاره خط AH که از رأس A بر ضلع BC عمود شده است، ارتفاع مثلث و ضلع BC قاعده‌ی نظیر این ارتفاع نامیده می‌شود. هر یک از ضلع‌های مثلث را می‌توان به عنوان قاعده در نظر گرفت و ارتفاع نظیر آن را رسم نمود.

تمرین: مثلثی با یک زاویه قائمه و مثلث دیگری با یک زاویه منفرجه رسم کرده، سپس سه ارتفاع هریک از آن‌ها را رسم کنید.

در مثلث ABC (شکل ۱۷) از رأس A پاره خط AD را موازی BC رسم می‌کنیم طوری که $AD = BC$. آنگاه نقطه‌ی D را به C وصل می‌کنیم. به این ترتیب متوازی‌الاضلاع ABCD با ارتفاع AH و قاعده‌ی BC به دست می‌آید.



شکل ۱۷

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع } ABCD = BC \times AH \quad (۱)$$

از طرف دیگر، دو مثلث ABC و ACD که متوازی‌الاضلاع ABCD را تشکیل می‌دهند، به حالت تساوی سه ضلع همنهشت هستند، پس مساحت‌های آن‌ها با هم برابر است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث } ADC + \text{مساحت مثلث } ABC &= \text{مساحت متوازی‌الاضلاع } ABCD \\ \text{مساحت متوازی‌الاضلاع } ABCD &= ۲(\text{مساحت مثلث } ABC) \end{aligned} \quad (۲)$$

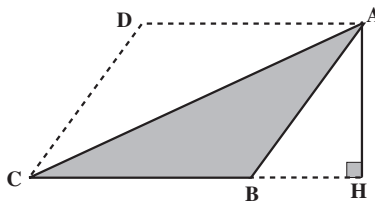
از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$BC \times AH = ۲(\text{مساحت مثلث } ABC)$$

یا

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۱}{۲}(BC \times AH)$$

در شکل ۱۷، ارتفاع نظیر BC داخل مثلث قرار گرفته بود. اگر این ارتفاع مانند شکل ۱۸ در خارج مثلث یعنی بر امتداد قاعده‌ی BC عمود شود، همان استدلال بالا را می‌توان برای به دست آوردن مساحت آن به کار برد.



شکل ۱۸

برای این کار، از رأس A ، پاره خط AD را مساوی و موازی با BC رسم می‌کنیم. سپس نقطه‌ی D را به C متصل می‌کنیم. مساحت متوازی الاضلاع $ABCD$ برابر است با

$$AH \times BC$$

از طرفی، دو مثلث ABC و ACD به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت هستند. پس مساحت‌های آنها با هم برابر است:

$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث } ADC + \text{مساحت مثلث } ABC &= \text{مساحت متوازی الاضلاع } ABCD \\ &= 2(\text{مساحت مثلث } ABC) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2}(AH \times BC)$$

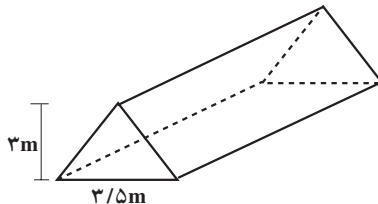
اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد، متوازی الاضلاعی که همانند بالا روی آن ساخته می‌شود در واقع یک مستطیل است که ارتفاع و قاعده‌ی آن همان دو ضلع زاویه‌ی قائمه در مثلث هستند، پس به طور کلی

مساحت مثلث

مساحت هر مثلث، برابر است با نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده‌ی نظیر آن، یعنی اگر اندازه‌ی ارتفاع h و اندازه قاعده‌ی نظیر آن b باشد

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}bh$$

مثال ۵: به شکل ۱۹ نگاه کنید. این نمایی از یک چادر صحرایی است. می‌بینید که قسمت جلوی چادر به شکل مثلثی به ارتفاع ۳ متر و قاعده‌ی ۳/۵ متر است. برای پوشاندن جلوی این چادر چند متر مربع پارچه لازم است؟



شکل ۱۹

حل: چون مساحت مثلث جلوی چادر برابر است با

$$\frac{1}{3} \times 3 \times (3/5) = \frac{1 \times 3}{5} = 5/25 \text{ m}^2$$

پس ۵/۲۵ مترمربع پارچه لازم است.

مثال ۶: اگر مساحت مثلثی ۵ سانتی مترمربع و قاعده‌ی آن ۳ سانتی متر باشد، ارتفاع آن چقدر

است؟

حل: چون

$$\begin{aligned} \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} &= \frac{1}{3} \times \text{مساحت مثلث} \\ &= \frac{1}{3} bh \end{aligned}$$

در رابطه‌ی فوق با داشتن مقدارهای معلوم مساحت و قاعده، مقدار ارتفاع را که مجهول

است، پیدا می‌کنیم:

$$5 = \frac{1}{3} \times 3 \times h = \frac{3h}{3}$$

در نتیجه:

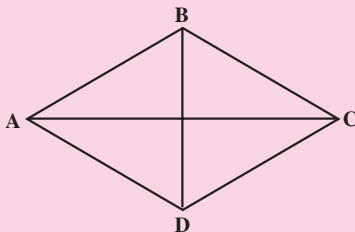
$$h = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

توجه: با استفاده از مساحت مثلث، می‌توان مساحت لوزی را به‌دست آورد:

مساحت لوزی

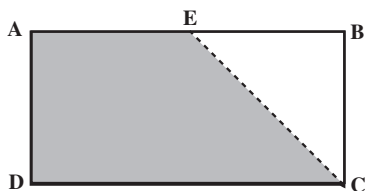
مساحت هر لوزی برابر با نصف حاصل ضرب قطرهای آن است.

$$\text{مساحت لوزی } ABCD = \frac{1}{2} (AC \times BD)$$



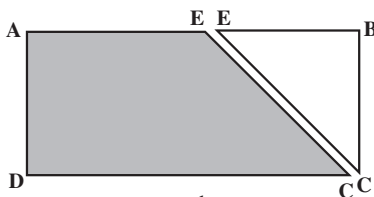
تمرین: نشان دهید مساحت لوزی برابر است با نصف حاصل ضرب قطرهای آن.

فعالیت ۲-۵



شکل ۲۰

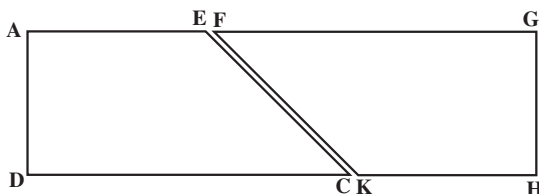
۱. مقوای مستطیل شکل ABCD را تهیه کنید.
نقطه‌ی E را روی ضلع AB انتخاب و از آن به رأس C وصل کنید (شکل ۲۰).



شکل ۲۱

۲. مقوا را در امتداد پاره خط CE ببرید. دو شکل به دست می‌آید. یکی مثلث EBC و دیگری چهارضلعی AECD که یک دوزنقه است (شکل ۲۱).

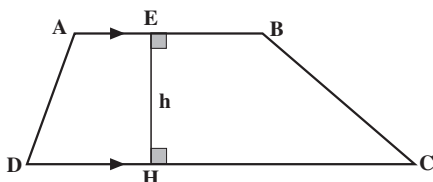
۳. با یک تکه مقوا، دوزنقه‌ی FGHK را هم‌نهشت با AECD ببرید. سپس دو دوزنقه را مانند شکل ۲۲ کنار هم بگذارید تا مستطیل AGHD تشکیل شود.



شکل ۲۲

۴. مساحت مستطیل AGHD را به دست آورید.
۵. به کمک نتیجه‌ی قسمت ۴، مساحت دوزنقه AECD را بیابید.

دوزنقه یک چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن موازی یکدیگرند.

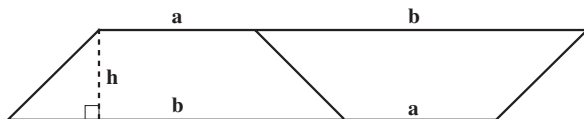


شکل ۲۳

دو ضلع موازی در یک دوزنقه، قاعده‌های دوزنقه و پاره خطی که بر هر دو قاعده عمود است، ارتفاع دوزنقه نامیده می‌شود (شکل ۲۳).

فعالیت ۲-۶

۱. یک تکه مقوا به شکل دوزنقه تهیه کنید. طول قاعده‌ی کوچک را a ، طول قاعده‌ی بزرگ را b و طول ارتفاع را h بنامید (شکل ۲۴).

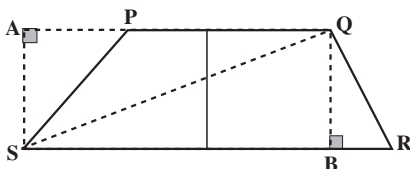


شکل ۲۴

۲. دوزنقه‌ی دیگری همنهشت با دوزنقه‌ی بریده شده تهیه کنید و مانند شکل آن‌ها را کنار هم بگذارید. نشان دهید شکل حاصل متوازی الاضلاع است.
 ۳. مساحت متوازی الاضلاع به دست آمده را پیدا کنید.
 ۴. مساحت دوزنقه را از روی مساحت متوازی الاضلاع حساب کنید.

فعالیت ۲-۷

۱. در دوزنقه‌ی شکل ۲۵، قاعده‌ی PQ را امتداد دهید. سپس از رأس S بر آن عمودی رسم کنید تا آن را در نقطه‌ی A قطع کند. پاره خط SA ارتفاع نظیر قاعده‌ی PQ است. سپس ارتفاع QB را رسم کرده و دو رأس مقابل Q و S را به هم وصل کنید تا قطر QS به دست آید.



شکل ۲۵

۲. طول قاعده‌ی کوچک را a ، طول قاعده‌ی بزرگ را b و ارتفاع $QB = SA$ را h بگیرید؛
 ۳. با توجه به اینکه طول QB برابر h و طول SR برابر b است، مساحت مثلث QRS را پیدا

کنید؛

۴. با توجه به اینکه طول SA، برابر h و طول PQ برابر a است، مساحت مثلث PQS را به دست آورید؛

۵. مساحت دوزنقه PQRS را بر حسب a، b و h حساب کنید.

مساحت دوزنقه

مساحت دوزنقه برابر است با نصف مجموع دو قاعده ضرب در ارتفاع، یعنی مساحت دوزنقه‌ای با طول قاعده‌های a و b و ارتفاع h برابر است با

$$\frac{1}{2}(a+b)h$$

مثال ۷: مساحت دوزنقه‌ای با قاعده‌های ۸cm و ۱۰cm و ارتفاع ۶cm برابر است با

$$\frac{1}{2}(8+10) \times 6 = 54 \text{ cm}^2$$

مجله‌ی ریاضی

برای به دست آوردن مساحت، از چهار اصل مساحت استفاده کردیم:

اصل ۱: مساحت هر شکلی در صفحه، یک عدد حقیقی مثبت است.

اصل ۲: اگر یک شکل از بخش‌های مجزایی تشکیل شده باشد، مساحت آن برابر با مجموع مساحت‌های آن بخش‌ها است.

اصل ۳: مساحت شکل‌های هم‌نهشت مساوی هستند.

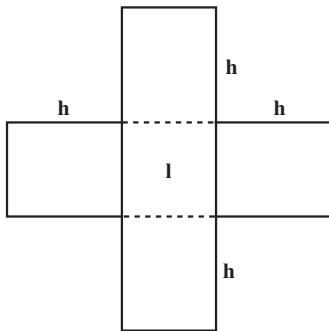
اصل ۴: مساحت مستطیل برابر با حاصل ضرب طول در عرض آن است.

مسائل

۱. ارتفاع مثلثی h و قاعده‌ی آن ۲h است. مساحت مثلث را بر حسب h پیدا کنید.
۲. ارتفاع مثلثی نصف قاعده‌ی آن است. اگر مساحت مثلث ۳۶ مترمربع باشد، طول قاعده‌ی آن را پیدا کنید.

۱- اگر واحد اندازه‌گیری ذکر نشده باشد، شما می‌توانید واحد دلخواه اختیار کنید.

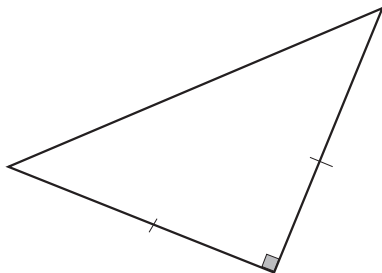
۳. مساحت مستطیلی ۱۴۴° سانتی متر مربع و طول آن ۵ برابر عرض آن است. طول و عرض مستطیل را حساب کنید.



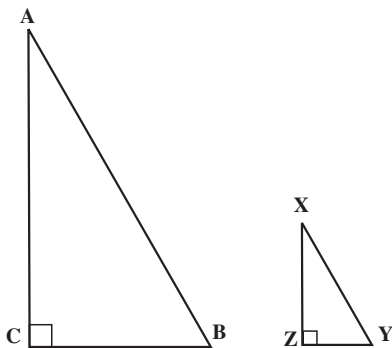
۴. اگر مقوای نشان داده شده در شکل روبه‌رو را از محل‌های نقطه‌چین تا کنیم، یک جعبه‌ی در باز درست می‌شود.

الف) اگر $h = 5\text{cm}$ و $l = 4\text{cm}$ برای ساخت جعبه چه مقدار مقوا (برحسب سانتی متر مربع) لازم است؟
ب) مساحت مقوا را در حالت کلی بر حسب h و l پیدا کنید.

۵. اگر ارتفاع مثلثی ۱۲ و مساحت آن ۳۶ باشد، قاعده‌ی آن را حساب کنید.



۶. مساحت مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی ۴° است. اندازه‌ی هر کدام از ساق‌ها را پیدا کنید (شکل روبه‌رو).



۷. در شکل روبه‌رو، اندازه ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث ABC دو برابر اندازه‌ی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث XYZ است:

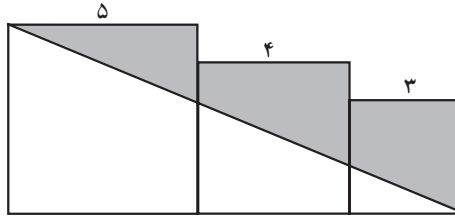
نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث XYZ چقدر است؟

(راهنمایی: اگر $XZ = a$ و $YZ = b$ ، آنگاه اندازه‌های AC و BC ، به ترتیب $2a$ و $2b$

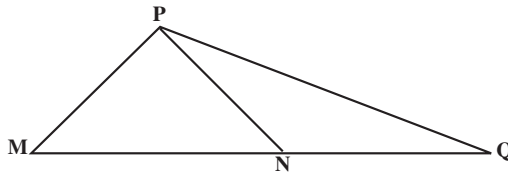
خواهد بود.)

۸. مسأله‌ی قبل را برای حالتی که اندازه‌ی ضلع‌های مثلث ABC ، n برابر طول اضلاع مثلث XYZ باشد حل کنید (n عدد طبیعی است).

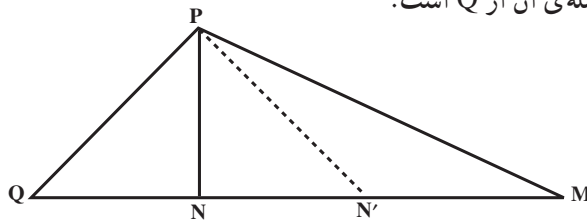
۹. در شکل زیر، سه مربع به ضلع‌های ۳، ۴ و ۵ در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. مساحت ناحیه‌ی سایه زده شده چقدر است؟



۱۰. در مثلث PQM ، نقطه‌ی N وسط ضلع QM است. نشان دهید مساحت‌های دو مثلث PMN و PNQ برابرند.



۱۱. در شکل زیر، نقطه‌ی N روی پاره خط QM چنان انتخاب شده است که فاصله‌ی آن از M دو برابر فاصله‌ی آن از Q است.

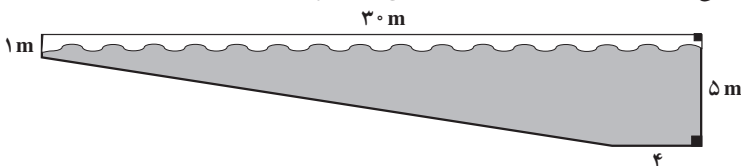


الف) ثابت کنید مساحت PNM دو برابر مساحت PQN است.

ب) اگر N' وسط NM باشد، مساحت‌های $PN'M$ و PQN چه رابطه‌ای با هم دارند؟

پ) چه رابطه‌ای بین مساحت PNN' و مساحت PQM وجود دارد؟

۱۲. طول یک استخر شنا ۳۰ متر و گودی آن در قسمت کم عمق یک متر است. عمق استخر تا ۵ متر زیاد می‌شود. مساحت دیوار کناری این استخر را به دست آورید.



۱۳. ثابت کنید اگر قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمود باشند، مساحت چهار ضلعی برابر نصف حاصل ضرب اندازه‌ی قطرها خواهد بود.

۱۴. می‌خواهیم کف یک استخر شنا به شکل مستطیل و با طول ۹ متر و عرض ۶ متر را با کاشی‌های مربع شکلی به ضلع $5/0$ متر پیوشانیم. اگر قیمت هر کاشی 35° تومان باشد، هزینه‌ی این کار چقدر خواهد بود؟

۱۵. اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نشان دهید که نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها است.

۱۶. اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، ثابت کنید که نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت ارتفاع‌های نظیر آن قاعده‌ها است.

۱۷. نتیجه‌گیری‌های الف، ب و پ بعد از فعالیت ۲-۴ بر پایه کدام یک از اصل‌های بیان شده در مجله ریاضی صفحه ۴۵ است.

۲-۲- قضیه‌ی فیثاغورس

در اکثر مناطق کشورمان آجر، بلوک‌های سیمانی، سنگ و سیمان و گاهی خشت از جمله مصالح اصلی خانه‌سازی و ساختمان‌ها هستند. یکی از موارد مهم در ساختن خانه‌ها و ساختمان‌ها، قائمه بودن زاویه‌ی بین دیوارها و یا گوشه‌های اتاق‌ها و اسکلت‌بندی ساختمان است، همانگونه که در ضرب‌المثل‌ها آمده است:

خشت اول چون نهد معمار کج تا تریبا می‌رود دیوار کج

معمولاً بناهای ماهر و با تجربه برای قائمه شدن زاویه بین دیوارها که به

آن «گونیا کردن» می‌گویند، از روش بسیار ساده و جالبی استفاده

می‌کنند. به این صورت که پس از چیدن اولین ردیف

گوشه بین دو دیوار، روی لبه اولین ردیف و

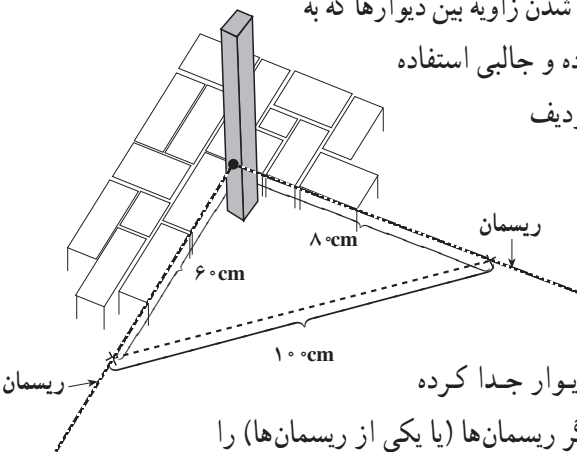
در امتداد دیوارها ریسمان کشی می‌کنند.

(شکل روبه‌رو) و سپس به وسیله متر روی

یک ریسمان 8° سانتی‌متر و روی ریسمان

دیگر به اندازه 6° سانتی‌متر از گوشه دو دیوار جدا کرده

علامت‌گذاری می‌کنند. سپس آنقدر دو سر دیگر ریسمان‌ها (یا یکی از ریسمان‌ها) را



تغییر می دهند تا فاصله بین دو محل علامت گذاری شده دقیقاً به اندازه‌ی 10° سانتی متر شود. در این وضعیت طرف دیگر ریسمان‌ها را ثابت کرده و شروع به آجرچینی در امتداد ریسمان‌ها می کنند. پس از چند ردیف دیوارچینی، قائمه بودن زاویه‌ی بین دو دیوار کاملاً مشهود خواهد بود. سؤالی که مطرح می گردد این است که آیا این روش، مبنای ریاضی دارد؟

فعالیت ۲-۸

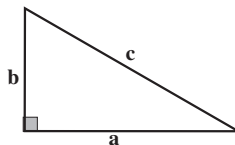
۱. با استفاده از خط کش، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه آن ۸ سانتی متر و ۱۵ سانتی متر باشند. برای اطمینان از آنکه زاویه‌ی رسم شده دقیقاً 90° است، می توانید از یک نقاله و یا گوشه‌ی راست یک مقوا استفاده کنید.
۲. طول وتر مثلثی را که رسم کرده‌اید، با دقت به وسیله‌ی خط کش اندازه بگیرید.
۳. مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری رسم کنید که طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه آن ۳ سانتی متر و ۴ سانتی متر باشد.
۴. طول وتر این مثلث را نیز دقیقاً اندازه بگیرید.
۵. در قسمت ۲، طول وتر چقدر بود؟ در قسمت ۴ چقدر است؟
۶. باتوجه به نتیجه‌ی قسمت ۵، چه رابطه‌ای بین طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه و طول وتر در مثلث فوق وجود دارد؟

مجله‌ی ریاضی

فیثاغورس ریاضیدان و فیلسوف یونان باستان بود که ۵۳۰ سال قبل از میلاد می زیست و رهبر گروهی از فلاسفه بود که بیش از ۱۰۰ سال در اوج شهرت بودند. این گروه، علاوه بر ریاضیات به موسیقی، اخلاق و مذهب نیز می پرداختند. آن‌ها کشفیات زیادی در ریاضیات انجام دادند که مطابق آیین خود همه را به فیثاغورس نسبت می دادند، از جمله ثابت کردند که مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° است. قضیه فیثاغورس را به جرأت می توان معروفترین قضیه هندسه نامید که تا حال بیش از ۳۷۰ اثبات برای آن ارائه شده است.

فعالیت ۲-۹

۱. مثلث قائم الزاویه‌ای به طول ضلع‌های a ، b و c را روی یک تکه مقوا ببرید؛

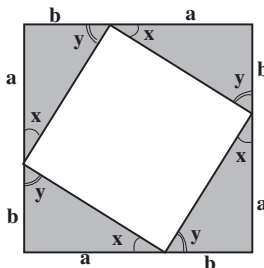


شکل ۲۶

۲. سه مثلث همنهشت با این مثلث را با مقوا تهیه کنید.

۳. مطابق شکل ۲۷، چهار مثلث را طوری کنار هم بگذارید تا مربعی به طول ضلع $a + b$

تشکیل شود.



شکل ۲۷

۴. در شکل ۲۷، چرا زاویه‌هایی که با x نامگذاری شده‌اند، با هم و زاویه‌هایی که با y نامگذاری شده‌اند با هم برابرند؟ دلیل خود را توضیح دهید.

۵. به کمک قضیه مجموع زاویه‌های مثلث، اندازه‌ی زاویه‌های داخلی چهارضلعی تشکیل شده در وسط را بیابید.

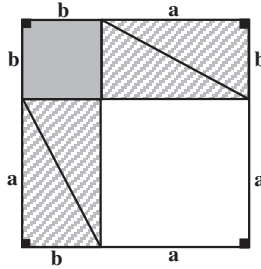
۶. از قسمت‌های ۴ و ۵ چه نتیجه‌ای درباره‌ی چهارضلعی وسط به دست می‌آورید؟

۷. مربعی به طول ضلع c یعنی طول وتر این مثلث قائم‌الزاویه با مقوایی از رنگ متفاوت تهیه کنید.

۸. چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی همنهشت به ضلع‌های a ، b و c و مربعی به ضلع c ، مربع بزرگتر به ضلع $a + b$ را درست کرده‌اند. در نتیجه:

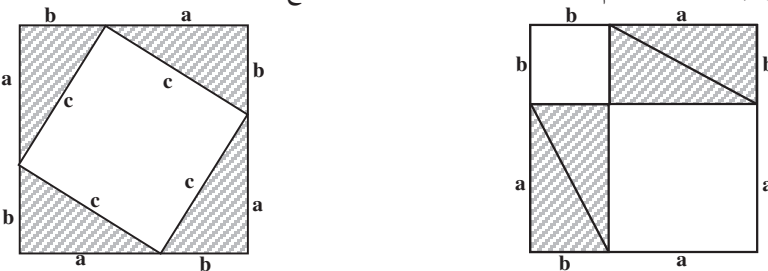
(۱) مساحت مربع به ضلع c + مساحت چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی همنهشت = مساحت مربع بزرگتر

۹. مجدداً با مقوا، چهار مثلث هم‌نهشت با مثلث قائم‌الزاویه‌ی به طول ضلع‌های a و b و c و دو مربع به طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه این مثلث یعنی a و b تهیه کنید.
 ۱۰. این چهار مثلث و دو مربع را مانند شکل ۲۸ طوری کنار هم قرار دهید تا مربع بزرگتر به طول ضلع $a + b$ ساخته شود.



شکل ۲۸

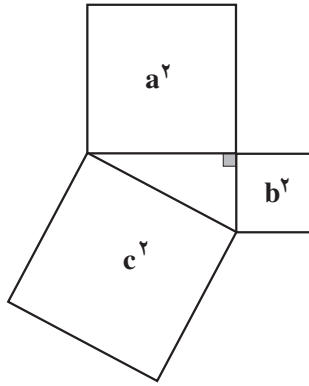
۱۱. شکل ۲۸، از ۶ قسمت مجزاً تشکیل شده است، در نتیجه مساحت آن برابر مجموع مساحت‌های این ۶ قسمت می‌شود.
 (۲) مساحت دو مربع به طول ضلع‌های a و b + مساحت ۴ مثلث قائم‌الزاویه‌ی هم‌نهشت = مساحت مربع بزرگتر
 ۱۲. از دو مربع هم‌نهشت به طول ضلع $a + b$ در شکل‌های ۲۷ و ۲۸، قسمت‌های مساوی آن‌ها یعنی چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی هم‌نهشت به طول ضلع‌های a ، b ، و c را بردارید.



شکل ۲۹

آنچه از شکل ۲۷ باقی می‌ماند مربعی است که روی وتر مثلث قائم‌الزاویه به ضلع‌های a ، b و c ساخته شده است و مساحت آن c^2 است. از شکل ۲۸ هم دو مربعی باقی می‌ماند که روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه از همین مثلث ساخته شده است که مساحت‌های آن‌ها به ترتیب a^2 و b^2 است. یعنی مساحت باقی مانده از شکل ۲۷ برابر مساحت باقی مانده از شکل ۲۸ است:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



شکل ۳۰

این نتیجه را مستقیماً از رابطه‌ی (۱) و به کمک عبارت‌های جبری نیز می‌توان به دست آورد. طول ضلع مربع بزرگتر $a + b$ ، طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث‌های هم‌نهشت a ، b و طول وتر c است. حال رابطه‌ی (۱) را دوباره نویسی می‌کنیم:

$$(a + b)^2 = 4 \times \frac{1}{4} ab + c^2$$

از طرفی

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

در نتیجه:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

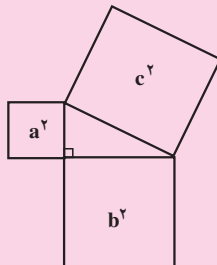
با حذف $2ab$ از دو طرف رابطه‌ی فوق

$$a^2 + b^2 = c^2$$

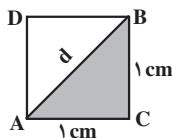
قضیه‌ی فیثاغورس

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مساحت مربعی که روی وتر ساخته می‌شود، برابر مجموع مساحت‌های دو مربعی است که روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه‌ی آن ساخته می‌شود.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



مثال ۸: طول قطر مربعی به ضلع یک سانتی متر را پیدا کنید.



شکل ۳۱

حل: اگر طول قطر d سانتی متر باشد، طبق قضیه ی فیثاغورس در مثلث ABC

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

پس $d = \sqrt{2} \text{ cm}$.

مثال ۹: طول قطر مستطیلی به ضلع های ۳ سانتی متر و ۴ سانتی متر را پیدا کنید.

حل: طبق قضیه ی فیثاغورس، اگر طول قطر را d بنامیم

$$d^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

در نتیجه d برابر ۵ سانتی متر است.

مثال ۱۰: طول ضلع های زاویه ی قائمه در یک مثلث قائم الزاویه ۶ واحد و ۷ واحد است.

(الف) طول وتر این مثلث را پیدا کنید.

(ب) اگر طول ضلع های زاویه قائمه این مثلث ۲ برابر شود، طول وتر آن چه تغییری می کند؟

(پ) اگر طول ضلع های این مثلث r برابر شود ($r > 0$)، طول وتر چه تغییری می کند؟

حل: (الف) اگر طول وتر مثلث قائم الزاویه را d بنامیم، طبق قضیه ی فیثاغورس

$$d^2 = 6^2 + 7^2$$

$$d = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85} \text{ واحد}$$

(ب) این بار طول ضلع های قائمه دو برابر شده است پس طول وتر

$$d = \sqrt{(2 \times 6)^2 + (2 \times 7)^2}$$

$$= \sqrt{2^2(6^2 + 7^2)}$$

$$= 2\sqrt{6^2 + 7^2} = 2\sqrt{85} \text{ واحد}$$

است، یعنی طول وتر نیز ۲ برابر می شود.

پ) در حالت کلی، اگر ضلع‌های زاویه‌ی قائمه $۶r$ و $۷r$ باشد، پس طول وتر

$$d = \sqrt{(۶r)^2 + (۷r)^2} = \sqrt{r^2(۶^2 + ۷^2)}$$

$$= r\sqrt{۸۵} \text{ واحد}$$

است، یعنی طول وتر نیز r برابر می‌شود.

مثال ۱۱: نسبت طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳ به ۵ است. اگر مساحت مثلث ۱۶ واحد مربع باشد، طول وتر چقدر خواهد بود؟

حل: اگر طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در این مثلث a و b باشد، آنگاه $\frac{a}{b} = \frac{۳}{۵}$. یعنی $۳b = ۵a$

$$\text{یا } b = \frac{۵}{۳}a$$

چون مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر نصف حاصل ضرب اندازه‌ی دو ضلع زاویه‌ی قائمه آن است،

$$۱۶ = \frac{۱}{۲} \times a \times b = \frac{۱}{۲} \times a \times \frac{۵}{۳}a = \frac{۵}{۶}a^2$$

در نتیجه:

$$a^2 = \frac{۶ \times ۱۶}{۵} \quad (۱)$$

از اینجا می‌توانیم طول وتر را به کمک قضیه‌ی فیثاغورس بیابیم. اگر وتر c باشد

$$c^2 = a^2 + b^2$$

چون $b = \frac{۵}{۳}a$ ، پس $b^2 = \frac{۲۵}{۹}a^2$ ، در نتیجه:

$$c^2 = a^2 + \frac{۲۵}{۹}a^2 = \left(1 + \frac{۲۵}{۹}\right)a^2$$

$$= \frac{۳۴}{۹}a^2$$

با جایگزین کردن مقدار a^2 از (۱) در تساوی اخیر، به دست می‌آوریم

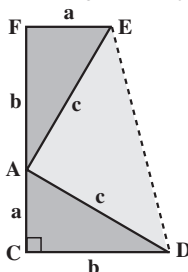
$$c^2 = \frac{۳۴}{۹} \times \frac{۶ \times ۱۶}{۵} = \frac{۳۴ \times ۳۲}{۱۵}$$

و سرانجام

$$c = \sqrt{\frac{۳۴ \times ۳۲}{۱۵}}$$

فعالیت ۲-۱۰

دوزنقه‌ی FEDC را در نظر بگیرید (شکل ۳۲).



شکل ۳۲

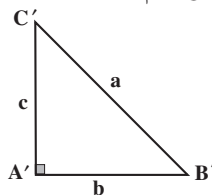
۱. مساحت دوزنقه را بر حسب a و b به دست آورید.
۲. نشان دهید مثلث ADE قائم الزاویه است.
۳. مساحت مثلثهای ACD و AEF را پیدا کنید.
۴. مساحت دوزنقه را بر حسب مجموع مساحت‌های مثلث‌های AEF، ACD و ADE به دست آورید.
۵. با استفاده از ۱ و ۴، قضیه‌ی فیثاغورس را ثابت کنید.

طبق قضیه‌ی فیثاغورس، در هر مثلث قائم الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربع‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه است. یعنی اگر طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه b ، c و طول وتر a باشد، آنگاه

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (1)$$

آیا عکس این مطلب نیز درست است؟ یعنی آیا اگر در مثلثی با طول ضلع‌های a ، b ، c ، رابطه‌ی (۱) برقرار باشد، می‌توان نتیجه گرفت که آن مثلث قائم الزاویه است؟

فرض کنید رابطه‌ی (۱) برای مثلث ABC به طول ضلع‌های a ، b و c برقرار باشد. مثلث قائم الزاویه‌ی $A'B'C'$ را به طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه b و c رسم می‌کنیم. برای این منظور کافی است زاویه‌ی قائمه‌ای به رأس A' رسم کنیم، سپس روی ضلع‌های این زاویه پاره‌خط‌هایی به طول‌های b و c جدا می‌کنیم و انتهای پاره‌خط‌ها را به ترتیب B' و C' می‌نامیم (شکل ۳۳).



شکل ۳۳

حال C' را به B' وصل می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ به دست آید. چون این مثلث قائم‌الزاویه است. بنابر قضیه‌ی فیثاغورس

$$B'C'^2 = b^2 + c^2$$

و با توجه به رابطه (۱)

$$B'C'^2 = a^2$$

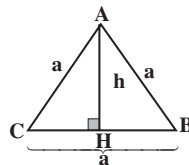
یعنی $B'C' = a$. پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت تساوی سه ضلع همنهشت هستند. در نتیجه زاویه‌های روبرو به ضلع‌های مساوی، با هم برابرند. چون $\hat{A}' = 90^\circ$ پس $\hat{A} = 90^\circ$. به این ترتیب، عکس قضیه‌ی فیثاغورس ثابت می‌شود.

عکس قضیه‌ی فیثاغورس

اگر در مثلث ABC ، $AB = c$ ، $AC = b$ ، $BC = a$ و $a^2 = b^2 + c^2$ ، آنگاه مثلث ABC در رأس A قائمه است.

مثال ۱۲: با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع a را حساب کنید.

حل: ارتفاع وارد بر ضلع BC (یا یکی از دو ضلع دیگر) را رسم می‌کنیم:



شکل ۳۴

چون در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع وارد بر هر ضلع میانه وارد بر آن ضلع نیز می‌باشد،

پس

$$BH = HC = \frac{1}{2}a$$

همچنین، در مثلث قائم‌الزاویه AHC ،

$$AH^2 = AC^2 - HC^2$$

مقدارهای $AC = a$ و $HC = \frac{1}{4}a$ را در رابطه‌ی فوق جایگزین می‌کنیم تا طول ارتفاع $AH = h$ را بر حسب a به دست آوریم:

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 - \frac{1}{4}a^2 \\ &= \frac{3}{4}a^2 \end{aligned}$$

پس

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

با دانستن مقدار ارتفاع و قاعده، مساحت مثلث ABC را محاسبه می‌کنیم:

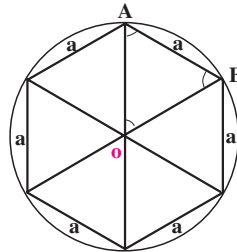
$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث } ABC &= \frac{1}{2} \times AH \times BC \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \end{aligned}$$

در نتیجه:

مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

مثال ۱۳: مساحت یک شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع a را پیدا کنید.

حل: مرکز دایره را به رئوس شش‌ضلعی منتظم وصل می‌کنیم، شش مثلث پدید می‌آید:



چون مجموع زاویه‌های مرکزی 36° است و هر کدام از زاویه‌های مرکزی روبه‌روی وترهای مساوی هستند، پس هر شش زاویه‌ی مرکزی با هم مساوی و هر کدام برابر $6^\circ = 36^\circ \div 6$ می‌باشد، (چرا؟) همچنین، شش مثلث فوق متساوی‌الساقین هستند زیرا دو ضلع هر کدام در واقع شعاع‌های دایره می‌باشند. در نتیجه دو زاویه‌ی روبه‌رو به شعاع‌ها با هم برابرند. از طرفی، زاویه‌ی سوّم هر یک از این مثلث‌ها زاویه‌ی مرکزی و 6° است و مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث نیز 18° است. پس

$$6^\circ - 6^\circ = 18^\circ = \text{مجموع دو زاویه‌ی روبه‌رو به شعاع}$$

$$= 12^\circ$$

و چون این دو زاویه با هم برابرند،

$$\text{هر زاویه‌ی روبه‌رو به شعاع} = \frac{12^\circ}{2}$$

$$= 6^\circ$$

بنابراین هر سه زاویه‌ی هریک از مثلث‌ها مساوی 6° است. پس نتیجه می‌گیریم که مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع هستند و چون طول ضلع همه‌ی آن‌ها برابر a است پس این مثلث‌ها همنهشت هم می‌باشند. بنابراین،

$$\text{مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع } a = 6 \times a = \text{مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع } a$$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع } a = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

مسائل

۱. طول قطر مربعی را به دست آورید که طول ضلع آن برابر است با:

الف) ۳ cm ؛

ب) ۵ cm ؛

پ) a سانتی متر.

۲. طول قطر مستطیلی را به دست آورید که طول ضلع‌های آن برابر است با:

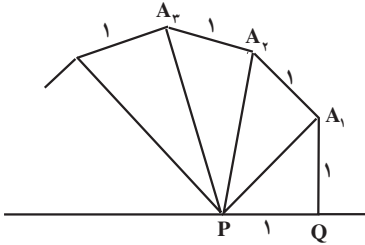
الف) ۳ و ۵ ؛

ب) ۴ و ۷ ؛

ت) $4r$ و $7r$ ؛

پ) $3r$ و $5r$ ؛

۳. مساحت مربعی ۱۴۴ سانتی متر مربع است. طول قطر این مربع چقدر است؟
۴. در یک مثلث قائم الزاویه، طول یک ضلع زاویه قائمه دو برابر طول ضلع دیگر است. اگر مساحت مثلث ۷۲ سانتی متر مربع باشد، طول وتر مثلث چقدر است؟
۵. در شکل روبرو، طول هر یک از اضلاع زاویه قائمه در



مثلث PQA_1 ، برابر ۱ سانتی متر است.

الف) طول وتر PA_1 چقدر است؟

پاره خط A_1A_2 نیز به طول ۱ سانتی متر و بر PA_1 عمود است. طول پاره خط A_2A_3 نیز ۱ سانتی متر است و بر PA_2 عمود است، ...

ب) طول پاره خط PA_2 چقدر است؟

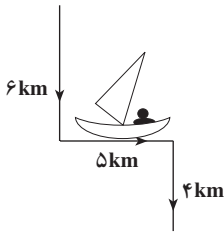
پ) طول پاره خط PA_3 چقدر است؟

طول n -امین پاره خط یعنی PA_n چقدر است؟

۶. یک قایق از نقطه‌ی شروع حرکت، ۶ کیلومتر به سمت جنوب،

۵ کیلومتر به سمت شرق و مجدداً ۴ کیلومتر به سمت جنوب پیموده است.

این قایق چند کیلومتر از نقطه‌ی شروع حرکت فاصله دارد؟



۷. نسبت طول ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه‌ای ۲ به ۳ است. اگر مساحت

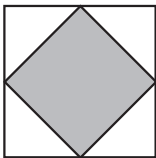
مثلث ۲۷ باشد، طول وتر آن چقدر است؟

۸. طول یکی از ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه‌ای $\frac{4}{5}$ دیگری است. مساحت

مثلث 320 سانتی متر مربع است. طول اضلاع زاویه قائمه را بیابید.

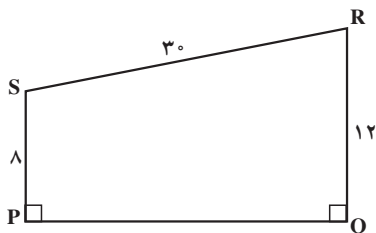
۹. از به هم وصل کردن وسط‌های ضلع‌های مربعی، یک مربع دیگر

ایجاد شده است. نسبت مساحت مربع کوچکتر به مساحت مربع بزرگتر چقدر است؟

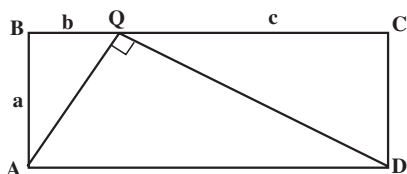


۱۰. مساحت مربعی که طول قطر آن $8\sqrt{2}$ است را پیدا کنید.

۱۱. در شکل زیر، طول ضلع PQ را محاسبه کنید.



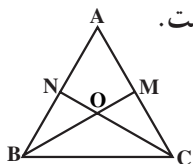
۱۲. در شکل زیر، ABCD یک مستطیل و AQD یک مثلث قائم الزاویه است. اگر $AB = a$ ، $BQ = b$ و $QC = c$ ، ثابت کنید:



$$AD = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2} \text{ (الف)}$$

$$a^2 = bc \text{ (ب)}$$

۱۳. در هر مثلث قائم الزاویه ضلع روبه روبه زاویه 30° نصف وتر است.



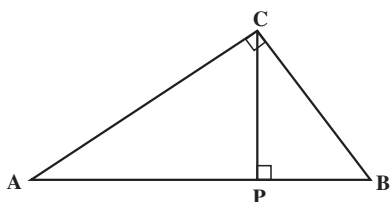
۱۴. در مثلث متساوی الاضلاع ABC، نیمسازهای \hat{B} و \hat{C} یکدیگر

$$\frac{OB}{OM} = \frac{OC}{ON} = 2$$

را در نقطه O قطع کرده اند ثابت کنید:

۱۵. مثلث ABC در رأس C قائمه است. از C، پاره خط CP را بر AB عمود می کنیم. ثابت

کنید:

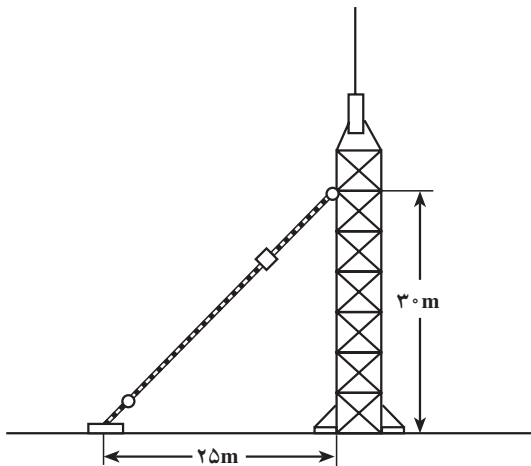


$$PC^2 = AP \times PB \text{ (الف)}$$

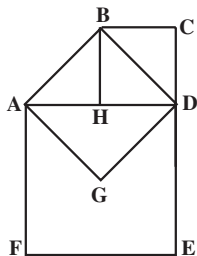
$$AC^2 = AP \times AB \text{ (ب)}$$

۱۶. با استفاده از قضیه فیثاغورس ثابت کنید، اگر وتر و یک ضلع زاویه قائمه از یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک ضلع زاویه قائمه از مثلث قائم الزاویه دیگر برابر باشند، طول اضلاع دیگر زاویه قائمه در دو مثلث با هم برابرند.

۱۷. یک آنتن تلویزیونی از ارتفاع 30° متری توسط یک سیم به طور قائم نگه داشته شده است. این سیم به فاصله‌ی ۲۵ متر از پایه‌ی آنتن به زمین وصل شده است. طول این سیم چند متر است؟



۱۸. سه مربع مانند شکل، یکدیگر را قطع کرده‌اند. مساحت مثلث ADG را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید.



الف) $AF = 10$ ؛

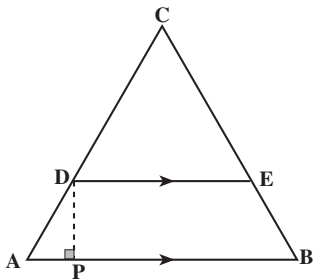
ب) $CE = 18$ ؛

پ) $BD = 3\sqrt{2}$ ؛

ت) مساحت مربع $BCDH = 49$ ؛

ث) مساحت شکل $AGDEF = 27$ ؛

۱۹. مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع 10 واحد را در نظر بگیرید و پاره خط DE را طوری رسم کنید تا AD برابر 4 واحد گردد.

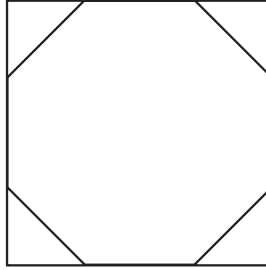


الف) طول DP را به دست آورید.

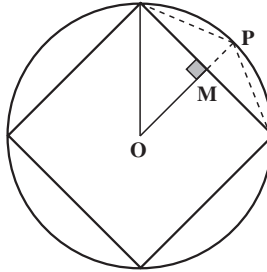
ب) طول PE را محاسبه کنید.

پ) چگونه با سه بُرش روی دوزنقه $ABED$ می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی با طول ۸ واحد ساخت؟ آیا با دو بُرش نیز می‌توان این کار را انجام داد؟

۲۰. در شکل زیر یک هشت ضلعی منتظم در داخل یک مربع محاط شده است.



الف) اگر طول ضلع هشت ضلعی ۲ سانتی متر باشد، طول ضلع مربع را بیابید.
 ب) اگر طول ضلع مربع 10° سانتی متر باشد، محیط هشت ضلعی را به دست آورید.
 ۲۱. مربعی در یک دایره به شعاع واحد محاط شده است.



الف) فاصله‌ی مرکز دایره تا نقطه M وسط ضلع مربع را بیابید.
 ب) طول MP را به دست آورید.
 پ) طول ضلع هشت ضلعی منتظمی که در این دایره محاط می شود را محاسبه کنید.
 ۲۲. مسأله‌ی ۲۱ را در حالتی که یک شش ضلعی در دایره محاط شده باشد، در نظر بگیرید
 و طول ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره را بدست آورید.

تشابه



۳-۱- نسبت و تناسب

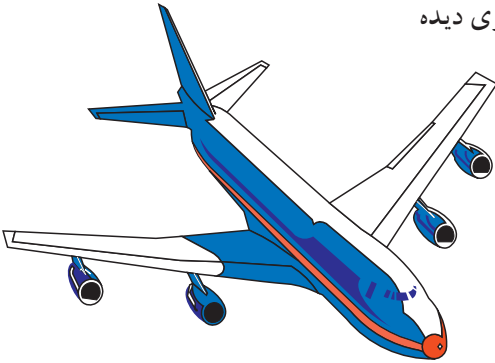
به این دو تصویر نگاه کنید. چه شباهت‌ها و تفاوت‌هایی بین آن‌ها وجود دارد؟



هر دو در واقع یک تصویر ولی با اندازه‌های مختلف هستند. این شکل‌های شبیه به هم نمونه‌ای از شکل‌های متشابه می‌باشند.

شکل‌های متشابه کاربردهای بسیاری در زندگی معمولی ما دارند. برای مثال، یکی از بهترین راه‌های دادن آدرس به افراد، استفاده از نقشه است. نقشه، تصویری از دنیای واقعی در ابعاد کوچک‌تر و متشابه با آن است. همچنین، برای ساختن یک ساختمان یا یک وسیله، طراحی ماکت آن که مشابه با ساختمان یا وسیله اصلی است، کمک مهمی به حساب می‌آید.

در شکل روبه‌رو، تصویر یک هواپیمای اسباب‌بازی دیده



می‌شود. فرق این تصویر با هواپیمای واقعی این است که اندازه‌های اجزای آن نسبت به هواپیمای واقعی خیلی کوچک‌تر است، یعنی شکل‌های هواپیمای واقعی و اسباب‌بازی متشابه هستند. در دو شکل متشابه، اندازه‌های اجزای یک شکل با اندازه‌های اجزای نظیر در شکل دیگر متناسب هستند و این ویژگی در ساختن تمام ماکت‌ها نیز رعایت می‌شود.

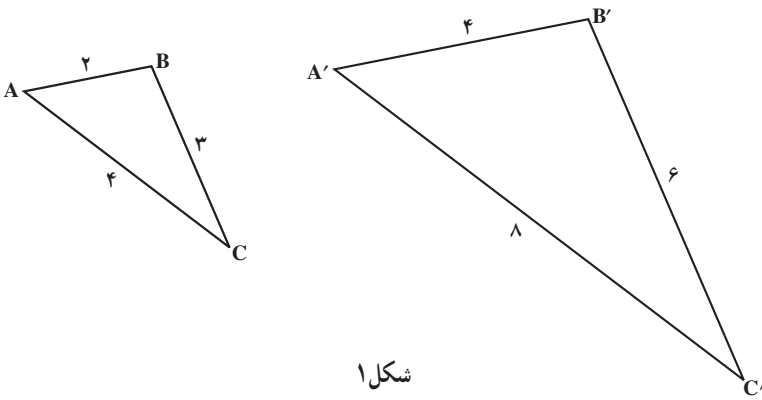
یکی دیگر از مثال‌های ملموس شکل‌های متشابه، بزرگ شده یا کوچک شده‌ی تصویر چهره‌ی

انسان است.



برای مثال، در تصویرهای 3×4 و 8×12 نسبت فاصله‌ی دو چشم برابر با نسبت فاصله‌ی بینی تا دهان در دو تصویر است. به همین ترتیب، نسبت موجود در تمام اجزای متناظر در دو تصویر ثابت می‌ماند. یعنی، به جز اندازه‌های ابعاد دو عکس، تفاوت دیگری بین این دو تصویر دیده نمی‌شود. در واقع، با دیدن هریک از آن‌ها می‌توانید صاحب تصویر واقعی را در نظر مجسم کنید.

در شکل ۱، مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ دو شکل متشابه هستند، زیرا از هر نظر شبیه یکدیگرند، جز این که اندازه‌ی هر ضلع مثلث $A'B'C'$ ، دو برابر اندازه‌ی هر ضلع مثلث ABC است، یعنی

$$A'B' = 2AB, \quad B'C' = 2BC, \quad A'C' = 2AC$$


شکل ۱

بنابراین، نسبت هر ضلع مثلث بزرگ به ضلع نظیر آن در مثلث کوچک برابر با ۲ است و تمام این نسبت‌ها با هم برابرند، یعنی

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = 2$$

که هر دو نسبت برابر تشکیل یک تناسب می‌دهند. از نسبت و تناسب در حل مسائل مختلف ریاضی استفاده می‌شود.

مثال ۱: اگر قیمت ۵ خودکار 25° تومان باشد، چند خودکار با 15° تومان می‌توان خرید؟
 حل: قیمت ۵ خودکار 25° تومان است. پس قیمت هر خودکار

$$\frac{25^\circ}{5} = 5^\circ \text{ تومان}$$

اگر با 15° تومان بتوان a خودکار خرید، آن‌گاه

$$\frac{15^\circ}{a} = \frac{25^\circ}{5} = 5^\circ$$

و یک تناسب به دست می‌آید، که به راحتی می‌توان a را از آن به دست آورد:

$$a = \frac{15^\circ}{5^\circ} = 3$$

نسبت بین دو عدد a و b عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$ ، که b نباید صفر باشد، چون تقسیم کردن یک عدد بر صفر معنی ندارد. تساوی بین دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، (که b و d صفر نیستند) یک تناسب نامیده می‌شود.

در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، a و d دو جمله‌ی کناری (طرفین) و b و c دو جمله‌ی میانی (وسطین) نام دارند. همچنین، اگر دو طرف تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را در bd ضرب کنیم،

$$bd\left(\frac{a}{b}\right) = bd\left(\frac{c}{d}\right)$$

$$ad = bc$$

آنگاه

در تناسب

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

حاصل ضرب دو جمله‌ی میانی برابر حاصل ضرب دو جمله‌ی کناری است.

$$ad = bc$$

این ویژگی، ما را در حل مسائل مربوط به نسبت و تناسب و شکل‌های متشابه یاری می‌کند.

مثال ۲: در هریک از تناسب‌های زیر، مقدار m را پیدا کنید:

$$\frac{m}{m+2} = \frac{3}{4} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{m}{3} = \frac{9}{10} \quad (\text{الف})$$

حل: ویژگی مهم تناسب که در بالا به آن اشاره شد، کمک می‌کند که مقدار m را در

قسمت‌های (الف) و (ب) به دست آوریم:

$$1 \cdot m = 3 \times 9$$

(الف)

$$1 \cdot m = 27$$

$$m = \frac{27}{10}$$

پس

$$\begin{aligned} 4m &= 3(m+2) \\ &= 3m+6 \end{aligned}$$

(ب)

در نتیجه :

$$\begin{aligned} 4m - 3m &= 6 \\ m &= 6 \end{aligned}$$

پس

مثال ۳: مقدارهای x و y را از تناسب‌های

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{y} \text{ و } \frac{1}{y} = 3 \quad (1)$$

به دست آورید.

حل: چون $\frac{1}{y} = 3$ پس $3y = 1$ یعنی $y = \frac{1}{3}$. از طرف دیگر از تناسب $\frac{x}{4} = \frac{1}{y}$ نتیجه می‌گیریم

$$xy = 4 \times 1 = 4 \quad (2)$$

مقدار $y = \frac{1}{3}$ را که از تناسب قبل به دست آمد، در (۲) جایگزین می‌کنیم.

$$x \times \frac{1}{3} = 4$$

یعنی :

$$x = 3 \times 4 = 12$$

دو تناسب رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{y} = 3$$

مثال ۴: مقدار n را در تناسب

$$\frac{3}{9} = \frac{9}{n}$$

به دست آورید.

حل: چون $3n = 9 \times 9 = 81$ پس

$$n = \frac{81}{3} = 27$$

عدد ۹ یک میانگین هندسی^۱ دو عدد ۳ و ۲۷ نامیده می‌شود.

۱- به میانگین هندسی، واسطه هندسی نیز گفته می‌شود.

در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ، b میانگین هندسی دو جمله‌ی کناری a و c نامیده می‌شود و مقدار آن از رابطه‌ی $b^2 = ac$ به دست می‌آید.

فعالیت ۱-۳

آیا عدد π را به یاد می‌آورید؟ π نسبت محیط دایره به قطر آن است. ریاضیدانان باستان مقدار π را با تقریب‌های خوبی به دست آورده بودند و در محاسبات، از آن استفاده می‌کردند. آن‌ها مقدارهای تقریبی π را به صورت نسبت بیان می‌کردند. دو نسبت معروف در تاریخ ریاضی که به عنوان تقریب π به کار می‌رفته‌اند، عبارت از $\frac{22}{7}$ و $\frac{355}{113}$ هستند.

۱. نسبت $\frac{22}{7}$ را به صورت اعشاری تا دو رقم اعشار گرد کنید و بنویسید.

۲. نسبت $\frac{355}{113}$ را به صورت اعشاری تا دو رقم اعشار گرد کنید و بنویسید.

۳. چه رابطه‌ای بین مقدارهای تقریبی به دست آمده در قسمت‌های ۱ و ۲ وجود دارد؟

۴. برای دو نسبت $\frac{22}{7}$ و $\frac{355}{113}$ حاصل ضرب دو جمله‌ی میانی و حاصل ضرب دو جمله‌ی

کناری را پیدا کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵. علت تفاوت بین پاسخ‌های سؤال‌های ۳ و ۴ در چیست؟

بعضی از ریاضی‌دانان ایرانی نیز نسبت $\frac{22}{7}$ را به جای مقدار π به کار می‌برده‌اند. نخستین

ریاضی‌دانی که مقدار π را تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد، غیاث‌الدین جمشید کاشانی (۷۶۳-۸۰۷ هجری) بود.

بعضی از ویژگی‌های مهم تناسب که کاربرد بسیاری در حل مسائل تشابه دارند در اینجا

گردآوری شده‌اند.

۱. در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توان جای دو جمله میانی را عوض کرد و تناسب

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ را به دست آورد.}$$

۲. در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توان کسرها را معکوس کرد و تناسب $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ را

به دست آورد.

۳. اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آن‌گاه $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ و $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ ؛

۴. اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ، آن‌گاه، $\frac{a}{b} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$.

مثال ۵: به کمک ویژگی‌های تناسب، مقدار p را از تناسب

$$\frac{7-p}{p} = \frac{12}{20}$$

پیدا کنید.

$$\frac{(7-p)+p}{p} = \frac{12+20}{20}$$

حل: بنابر ویژگی ۳،

$$\frac{7}{p} = \frac{32}{20}$$

در نتیجه:

$$32p = 140$$

یعنی:

$$p = \frac{140}{32} = \frac{35}{8}$$

پس:

مسائل

۱. اگر قیمت ۱۰ عدد از یک کالا ۴۰۰ تومان باشد، قیمت چند عدد از آن، ۸۰ تومان خواهد بود؟

۲. میانگین هندسی بین هریک از جفت عددهای زیر را پیدا کنید:

الف) ۴ و ۲۵؛

ب) $3\sqrt{2}$ و $6\sqrt{2}$ ؛

پ) ۷ و ۲۱؛

۳. در هریک از موارد زیر، از کدام یک از ویژگی‌های تناسب استفاده شده است؟

الف) اگر $\frac{a}{b} = \frac{8}{5}$ ، آنگاه $5a = 8b$ ؛

ب) اگر $\frac{c}{d} = \frac{3}{4}$ ، آنگاه $\frac{d}{c} = \frac{4}{3}$ ؛

پ) اگر $\frac{e}{v} = \frac{4}{9}$ ، آنگاه $\frac{v}{e} = \frac{9}{4}$ ؛

ت) اگر $\frac{a}{3} = \frac{b}{11}$ ، آنگاه $\frac{a+3}{3} = \frac{b+11}{11}$.

۴. در هریک از موارد زیر جای خالی را پر کنید:

الف) اگر $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ ، آنگاه $\frac{x+1}{y+2} = \square$ ؛

ب) اگر $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{5}$ ، آنگاه $\frac{a+b+c+d}{\square} = \frac{a}{\square}$ ؛

پ) اگر $\frac{3}{x} = \frac{12}{10}$ ، آنگاه $\frac{12}{3} = \square$ ؛

۵. در هریک از موارد زیر مقدار x را به دست آورید:

الف) $\frac{4}{5} = \frac{24}{x}$

ب) $\frac{x}{180-x} = \frac{3}{7}$

پ) $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$

ت) $\frac{4}{x+1} = \frac{2}{3x-2}$

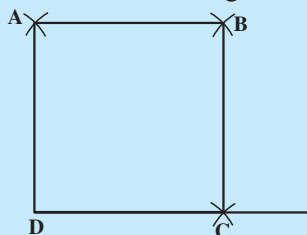
۶. مقدار x و y را از هر کدام از تناسب‌های زیر محاسبه کنید:

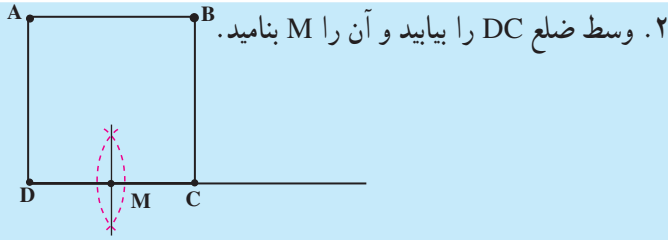
الف) $\frac{9}{12} = \frac{x}{20} = \frac{21}{y}$

ب) $\frac{x}{5} = \frac{20}{x} = y$

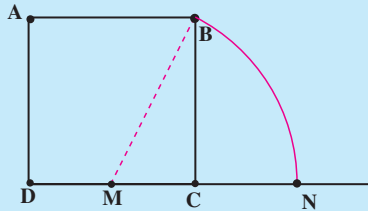
مجله‌ی ریاضی

۱. مربع ABCD را با ضلع دلخواه رسم کنید.

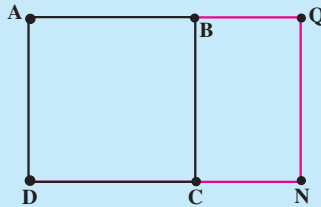




۳. به مرکز M و با شعاع MB کمانی بزنید تا امتداد DC را در نقطه N قطع کند.



۴. از نقطه N، خطی عمود بر DC رسم کنید تا امتداد AB را در Q قطع کند.



چهارضلعی AQND یک مستطیل طلایی نامیده می شود که به وسیله ی BC به یک مربع و یک مستطیل بازهم طلایی تقسیم شده است! هر دو شکل AQND و BQNC مستطیل های طلایی هستند که ضلع های نظیر آنها با هم متناسبند.

۵. برای نشان دادن این که چرا ضلع های دو مستطیل با هم متناسب هستند، فرض کنید در مستطیل زیر، $MC = 1$ سپس اندازه ی طول های زیر را حساب کنید:

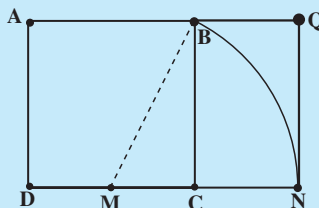
پ) MN

ب) MB

الف) BC

ث) DN

ت) CN



۶. با استفاده از طول‌های به‌دست آمده در قسمت (۵)، نشان دهید که اجزای متناظر مستطیل AQND و مستطیل BQNC با هم متناسب هستند.

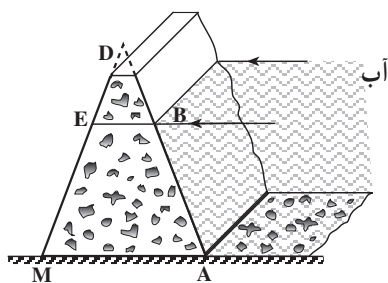
جالب است بدانید که نسبت ضلع بلندتر به ضلع کوتاه‌تر مستطیل طلایی که نسبت طلایی نامیده می‌شود، در بسیاری از طرح‌های هنری از قبیل معماری و خطاطی ظاهر می‌شود. مطابق تحقیقات انجام شده، نسبت طول ضلع قاعده به ارتفاع، در اهرام ثلاثه مصر، برابر نسبت طلایی است. همچنین دیوارهای معبد پارتنون از مستطیل‌های طلایی ساخته شده است! زیرا به اعتقاد آن‌ها، مستطیل‌های با نسبت‌های طلایی به چشم خوشایندتر هستند!



سد جیرفت

۳-۲- قضیه تالس در مثلث

شکل ۲، نمای جانبی ساده‌ای از یک سد را نشان می‌دهد. سطح مقطع قائم سد، مثلث



شکل ۲

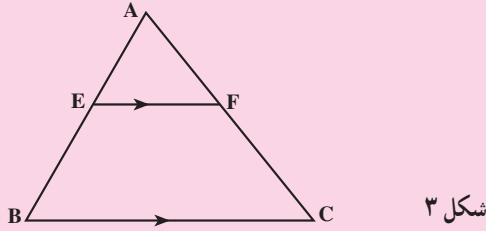
DAM^۱ است. همان‌طور که می‌بینید، خط سطح آب پشت سد، موازی ضلع پایینی مثلث است. چون مقاومت سد در برابر فشار آب پشت آن به عوامل متعددی از جمله طول BA بستگی دارد، در نتیجه محاسبه‌ی طول BA برای به‌دست آوردن مقاومت سد ضروری است. قضیه‌ی تالس در مثلث به ما کمک می‌کند تا این طول را محاسبه کنیم.

۱. DAM در انگلیسی به معنای سد است!

قضیه‌ی تالس

اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد، برابر است با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند.

یعنی اگر در مثلث ABC ، EF موازی BC باشد، آن‌گاه $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

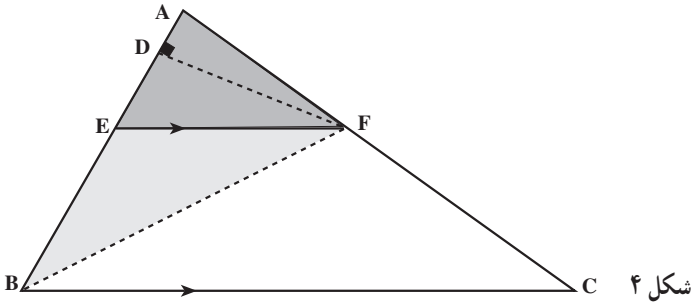


شکل ۳

قبل از این که به اثبات قضیه تالس بپردازیم، کاربرد این قضیه را در مثال سد می‌بینیم. در شکل ۲، چون پاره‌خط BE موازی AM است و ضلع‌های DM و DA را قطع می‌کند، در نتیجه طبق قضیه‌ی تالس، نسبت طول دو پاره‌خط DB و BA برابر نسبت طول دو پاره‌خط DE و EM است. یعنی:

$$\frac{DB}{BA} = \frac{DE}{EM}$$

حال قضیه‌ی تالس را در چهار مرحله با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت می‌کنیم. مرحله‌ی ۱: از F به B وصل کرده، سپس پاره‌خط FD را بر AB عمود می‌کنیم. پاره‌خط FD ارتفاع نظیر قاعده‌ی AE از مثلث AFE و همچنین ارتفاع نظیر قاعده‌ی EB از مثلث EFB خواهد بود. بنابراین



شکل ۴

$$\text{مساحت مثلث } AFE = \frac{1}{2} AE \times FD$$

$$\text{مساحت مثلث } EFB = \frac{1}{2} EB \times FD$$