$$\frac{(-۴)^{۲}\times(-۱)^{۵}\times(-۸)}{(+۱۰)^{۳}\times(+۲)^{۴}\times(-۳)}$$

$$(-۱۰)\times((-۶)\div(-۲)) \overset{?}{=} ((-۱۰)\times(-۶))\div(-۲)$$

$$(-۱۰)\times((-۶)\div(-۲)) \overset{?}{=} ((-۱۰)\times(-۶))\div(-۲)$$

رسم ۱

این رسم، اوّلین رسم در سال تحصیلی است ؛ لذا سعی کنید برخورد شما به گونه‌ای باشد که دانش‌آموزان در طول سال خاطره‌ی خوبی از آن، درذهن داشته باشند.

سعی کنید رسم را به همراه تمرین‌های زیاد ریاضی به‌دانش‌آموزان ندهید تا دانش‌آموزان علاقه‌مند بتوانند لذت کشیدن رسم را حس کنند.

شروع کنید:

دانش‌آموزان کلاس دوم با چارچوب صفحات از سال گذشته آشنایی دارند ؛ فقط کافی است به صورت کلی، آن‌را یادآوری کنید.

نحوه‌ی کشیدن کادر را به صورت پرسش و پاسخ یادآوری کنید و از دانش‌آموزان بخواهید نکات مهم آن را ارزیابی کنند. راه‌حل‌های مختلف را در این زمینه بررسی کنید.

سپس، از دانش‌آموزان بخواهید الگوی قسمت «الف» را کشف کنند و آن‌را ادامه دهند.

روش کشیدن رسم

در مورد روش کشیدن رسم برای دانش‌آموزان توضیح دهید.

۱ــ ابتدا کادر مستطیلی این رسم را با طول ۲۵ سانتی‌متر و عرض ۵ سانتی‌متر در وسط کاغذ رسم کنند (چگونگی کادربندی را به کمک خود دانش‌آموزان یادآوری کنید).

۲ــ سپس، مستطیل به‌دست آمده را به یک صفحه‌ی شطرنجی ۱×۱ تبدیل کنند.

سپس، پرسش‌های زیر را مطرح کنید : تعداد نشانه‌گذاری‌ها چه‌قدر باشد؟ عرض و طول مستطیل به چند


رسم ۱

با توجه به الگوی داده شده، رسم را کامل کنید.

۱ـ یک مستطیل به اندازه‌ی ۲۵×۵ سانتی‌متر در وسط یک کاغذ سفید رسم کنید.
۲ـ مستطیل را به مربع‌های ۱×۱ سانتی‌متری تقسیم کنید تا صفحه‌ی شطرنجی به دست آید.
۳ـ با توجه به قسمت الف، خط‌های اصلی را پررنگ کنید.
۴ـ بقیه‌ی خطوط را پاک کنید.
۵ـ شکل نهایی

با توجه به این که اگر خطوط شطرنجی پاک می‌شوند، از ابتدا آن‌ها را کم‌رنگ بکشید.
در این رسم، پاک شدن بودن خطوط و نیز امتداد هم بودن پل‌ها خط‌ها اهمیت دارد.
برای این که رسم شما به پاک کردن نیاز نداشته باشد و تمیز بماند، چه راه‌حلی پیشنهاد می‌کنید؟

۲۰

قسمت تقسیم شود؟

ــ هم‌اندازه نبودن تقسیم‌بندی‌ها چه تأثیری در شکل خواهد داشت؟ طرح این پرسش‌ها و پرسش‌های مشابه آن‌ها باعث مشارکت دانش‌آموزان در بحث خواهد شد.

۳ــ با توجه به فعالیت آغازین در قسمت «الف»، خطوط اصلی را پیدا کرده و آن‌ها را پررنگ کنند.

به دانش‌آموزان یادآوری کنید که قبل از پررنگ کردن خطوط، از درستی انتخاب خود مطمئن شوند ؛ زیرا در صورت بروز اشتباه در ارائه‌ی کار، با مشکل روبه‌رو خواهند شد.

۴ــ خطوط اضافی را پاک کنند ؛ کم‌رنگ بودن خطوط اولیه در این مرحله به دانش‌آموزان کمک بسیاری می‌کند. کادر نیز در این مرحله پاک خواهد شد.

۵ــ شکل نهایی را به دانش‌آموزان نشان دهید و یادآوری کنید که شکل پایانی باید این‌گونه باشد.

نکات مهم رسم

۱ــ این رسم در مقایسه با رسم‌های دیگر کلاس، در گروه رسم‌های ساده است.

۲ــ دقت در تقسیم‌بندی اوّلیه باعث درستی و زیبایی رسم خواهد شد.

۳ــ یک‌نواختی خطوط و کلفتی و نازکی یکسان خطوط در زیبایی آن بسیار مؤثر است.

۴ــ نمایان نبودن خطوط اضافی رسم در پایان کار اهمیت فراوان دارد.

این نکات و بسیاری دیگر، از جمله تجربه‌هایی است که دانش‌آموزان پس از کشیدن رسم اوّل به آن خواهند رسید ؛ بنابراین، پس از ارزیابی رسم، در مورد این نکات بحث کنید تا دانش‌آموزان در رسم‌های دیگر به آن‌ها توجه بیشتری داشته باشند.

یادداشت معلم

فصل دوم

حساب

فصل دوم شامل سه قسمت است. در ابتدا، ضمن یادآوری مباحث مربوط به معرفی توان، قوانین ساده کردن عبارت‌های توان‌دار به‌طور کامل بیان می‌شود. در قسمت دوم، دستگاه‌های شمارش عددها، نحوه‌ی تبدیل عددها از یک مبنا به مبنای ده و برعکس آموزش داده می‌شود. به کاربردهای این درس نیز اشاره می‌گردد. در بخش آخر این فصل، موضوع جذر مطرح می‌شود. جذر دقیق، جذر حاصل‌ضرب و حاصل تقسیم و محاسبه‌ی جذر تقریبی از درس‌های این قسمت‌اند. مفاهیم و محتوای این فصل به صورت زیر با هم در ارتباط‌اند.

همچنین، در این فصل راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب و رسم ۲ آموزش داده می‌شود.

ارتباط‌های مشخص شده بین مفاهیم و محتوای این فصل صرفاً به این منظور است که در آموزش به چنین ارتباط‌هایی توجه بشود تا دانش‌آموزان نیز در یادگیری ریاضی به این امر دقت داشته باشند. برای نمونه، این موضوع که برای نوشتن

عددهای مختلف در دستگاه‌های شمار، عدد توان و جذر اعداد از نمادهای قراردادی استفاده می‌شود، موضوع مهمی است که دانش‌آموزان باید به آن واقف باشند یا این‌که در تبدیل یک عدد از مبنای نامبرده به عددهای معمولی از محاسبه‌ی یک عبارت توان‌دار استفاده می‌شود.

$\sqrt{a}$ درواقع همان $a^{\frac{1}{2}}$ است. در جذر حاصل‌ضرب و حاصل تقسیم، در واقع از قانون ضرب و تقسیم با توان‌های مساوی استفاده می‌شود.

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}=(a\times b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a\times b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}=(\frac{a}{b})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

به همین ترتیب، به سایر ارتباط‌های موجود بین مفاهیم می‌توان توجه کرد.

زمان بندی

آبان ماه

هفته‌ی دوم: توان (یادآوری)، ضرب و تقسیم عددهای توان‌دار با پایه‌های مساوی ؛

هفته‌ی سوم: ضرب و تقسیم عددهای توان‌دار با توان‌های مساوی، شمارش ؛

هفته‌ی چهارم: تبدیل مبنا، راهبرد الگویابی، کاربرد مبناها.

آذر ماه

هفته‌ی اوّل: رسم یا مفهوم جذر، جذر حاصل‌ضرب و حاصل تقسیم، عددهای منفی جذر ندارد ؛

هفته‌ی دوم: محاسبه‌ی جذر تقریبی، راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب.

در زمان‌بندی پیشنهادی، آموزش راهبردها نیز منظور شده است. با توجه به این‌که دانش‌آموزان راهبردهای حلّ مسئله را در کلاس اول راهنمایی فراگرفته‌اند، در کلاس دوم راهنمایی صرفاً به مرور آن‌ها پرداخته می‌شود ؛ لذا میزان زمانی که برای آموزش هر راهبرد موردنظر است، به‌طور تقریبی کمتر از زمانی است که در کلاس اول راهنمایی اختصاص داده می‌شود.

نمونه‌ی سؤال برای مشخص کردن ارتباط‌ها

۱ــ با توجه به عبارت زیر، تساوی را کامل کنید.

$$(\quad)_{\square}=(\quad)_{\boxed{10}}$$

$$2\times3^3+1\times3^2+0\times3^1+2\times3^0=$$

۲ــ جذر مربع ۵ برابر است با ..... . (در مورد پاسخ خود توضیح دهید.)

۳ــ چرا تساوی‌های مقابل درست است؟ توضیح دهید.

$$\sqrt{7^4}=7^2$$

$$\sqrt{5^6}=5^3$$

ــ چه رابطه‌ای بین توان‌های عدد در دو طرف تساوی وجود دارد؟

ــ با توجه به آن، عبارت زیر را ساده کنید.

$$\sqrt{5^4\times7^6\times3^8}=$$

یادداشت معلم

توان

موضوعات در یک نگاه

در این درس ابتدا تعریف توان، مجذور، مکعب و پیدا کردن مقدار عددی یک عبارت توان‌دار یادآوری می‌شود. سپس، قوانین ساده کردن عبارت‌های توان‌دار شامل ضرب و تقسیم عبارت‌های توان‌دار با پایه‌ی مساوی و ضرب و تقسیم عبارت‌های توان‌دار با توان مساوی آموزش داده می‌شود. با استفاده از این قوانین، دانش‌آموزان باید عبارت‌های توان‌دار را ساده کنند.

اهداف

در فرایند آموزش این دروس انتظار می‌رود هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر دست یابد :

۱ــ تعریف توان را به کار برد و از رشد سریع عددهای توان‌دار، درکِ درستی داشته باشد.

۲ــ مقدار عددی یک عبارت توان‌دار را به‌دست آورد.

۳ــ قوانین ساده کردن عبارت‌های توان‌دار را درک کند و به کار برد.

۴ــ یک عبارت توان‌دار را تا حدّ امکان ساده کند.

۵ــ قوانین ساده کردن یک عبارت را در حلّ مسائل و پیدا کردن مقدار عبارت‌های توان‌دار به‌کار برد.

نمونه سؤال برای ارزش‌یابی

۱ــ عبارت زیر را ساده کنید.

$$۵^x + ۵^x + ۵^x + ۵^x + ۵^x$$

۲ــ ثلث عدد $۳^{۱۰}$ برابر است با ... .

۳ــ اگر $۳^x = ۱۰$ باشد، حاصل عبارت ۹^x چند است؟

۴ــ چه تفاوتی بین دو عبارت $(\frac{۳}{۴})^۲$ و $\frac{۳^۲}{۴}$ است؟

۵ــ چه تفاوتی بین دو عبارت $-۳^۲$ و $(-۳)^۲$ است؟

شناسنامه‌ی مبحث توان

درس‌ها	صفحات	مفاهیم و محتوا	هدف‌ها	فعالیت‌ها	پیش‌بینی امکانات	واژگان
یادآوری	۴۱ ۴۲	تعریف توان مجذور و مکعب محاسبه‌ی یک عبارت توان‌دار	ــ تعریف توان را بداند و در محاسبه به کار برد. ــ از عددهای توان‌دار درکِ درستی داشته باشد. ــ مقدار عددی یک عبارت توان‌دار را به‌دست آورد. ــ نحوه‌ی استفاده از پرانتز را در عددهای توان‌دار بداند.	ــ انجام‌دادن فعالیت برای درک عددهای توان‌دار ــ انجام‌دادن کار در کلاس برای تمرین محاسبه‌ی مقدار یک عدد یا عبارت توان‌دار	کاغذهای مربع شکل به‌تعداد دانش‌آموزان	توان پایه عدد توان‌دار مجذور ــ مربع مکعب
ضرب و تقسیم عددهای توان‌دار با پایه‌های مساوی	۴۲ ۴۳ ۴۴	ساده کردن عبارت توان‌دار با پایه‌های مساوی	ــ قانون ضرب با پایه‌های مساوی را کشف کند و در تمرین‌ها به‌کار برد. ــ قانون تقسیم با پایه‌های مساوی را کشف کند و در تمرین‌ها به‌کار برد. ــ در ساده کردن یک عبارت توان‌دار، در صورت لزوم پایه‌ی مساوی را ایجاد کند.	ــ انجام‌دادن فعالیت برای کشف قانون ساده کردن ضرب با پایه‌های مساوی ــ انجام‌دادن کار در کلاس برای به کار بردن قانون بالا ــ انجام‌دادن فعالیت برای کشف قانون ساده کردن تقسیم با پایه‌های مساوی ــ انجام‌دادن کار در کلاس برای به کار بردن قانون بالا	ــ	ساده کردن یک عبارت
ضرب و تقسیم عددهای توان‌دار با توان‌های مساوی	۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷	ساده کردن عبارت توان‌دار با توان‌های مساوی	ــ قانون ضرب با توان‌های مساوی را کشف کند و در تمرین‌ها به‌کار برد. ــ قانون تقسیم با توان‌های مساوی را کشف کند و در تمرین‌ها به کار برد. ــ با توجه به قوانین بالا، عبارت توان‌دار را باز کند.	ــ انجام‌دادن فعالیت برای کشف قانون ساده کردن ضرب با توان مساوی ــ انجام‌دادن کار در کلاس برای به کار بردن قانون بالا ــ انجام‌دادن فعالیت برای کشف قانون ساده کردن تقسیم با توان مساوی ــ انجام‌دادن کار در کلاس برای به کار بردن قانون بالا	ــ	ساده کردن یک عبارت

توان

با وجود این که ریاضی‌دانان عیلام و بابل، توان و عمل با آن را می‌شناختند و در این باره جدول‌هایی تنظیم کرده بودند، با نابودی تمدن دو رود (بین‌النهرین) دستاوردهای ریاضی آن‌ها فراموش شد. یونانیان که پس از آن‌ها آمدند، توان عددها را به‌کمک هندسه نشان دادند. یونانی‌ها در زمینه‌ی حساب و جبر پیشرفت اندکی داشتند و همه‌ی تلاش خود را بر هندسه متمرکز کردند ؛ به طوری که هندسه را تا درون هندسه‌ی عالی پیش بردند.

آن‌ها عدد را بیشتر به یاری یک پاره‌خط راست، توان دوم عدد را با مربعی به ضلع آن پاره‌خط راست و توان سوم را با مکعبی نشان می‌دادند که ضلع آن همان پاره‌خط راست باشد و به توان بالاتر از ۳ کاری نداشتند.

ریاضی‌دانان هندی هم به عددهای بزرگ و توان آن‌ها علاقه‌مند بودند. مسئله‌ی مربوط به صفحه‌ی شطرنج معروف است. روایت می‌کنند که روزی حاکم، مخترع شطرنج را خواست و از او طلب کرد چیزی از حاکم بخواهد. او در پاسخ گفت : در خانه‌ی نخست جدول یک دانه گندم، در خانه‌ی دوم آن، ۲ دانه، در خانه‌ی سوم، ۴ دانه، و در خانه‌ی چهارم، ۸ دانه بگذارید و همین طور تا خانه‌ی شصت و چهارم، در هر خانه دو برابر خانه‌ی قبلی گندم قرار دهید و آن‌ها را به من بدهید. حاکم که گمان می‌کرد، این فرد به مقداری گندم نیاز دارد، گفت : «چند کیسه گندم به این فرد بدهید» ولی مخترع شطرنج خواهش کرد حساب کنند و بعد مقدار دقیق آن را به او بدهند. در خانه‌ی شصت و چهارم صفحه شطرنج $۲^{۶۳}$ دانه گندم باید می‌گذاشتند. وقتی ریاضی‌دانان محاسبه کردند، متوجه شدند که اگر همه‌ی سطح زمین را گندم بکارند، به اندازه‌ی گندمی که مخترع شطرنج خواسته است، نمی‌شود.

ریاضی‌دانان ایرانی، مانند خوارزمی، کرجی، خیام و کاشانی، که در زمینه‌ی «جبر» کار کرده‌اند، برای نوشتن یک عبارت جبری از هیچ نمادی استفاده نمی‌کردند. آن‌ها مجهول را «شیء»، توان دوم را «مال»، توان سوم را «کعب» [به جای «مکعب»]. توان چهارم را «مال مال»، توان پنجم را «مال کعب» و توان ششم را «کعب کعب» می‌نامیدند و همه چیز را با کلمه شرح می‌دادند.

در ضمن، با یاری گرفتن از هندسه ــ مثل یونانی‌ها ــ تا توان سوم را با مربع و مکعب مشخص می‌کردند. واژه‌های «مربع» به جای توان دوم و «مکعب» به جای توان سوم، که هنوز هم به‌کار می‌بریم، از دوران یونان باستان باقی مانده است.

به این مسئله، که از کتاب «جبر و مقابله» خوارزمی برداشته شده است، توجه کنید :

«ده را طوری به دو بخش تقسیم کنید که اگر هر بخش را در خودش ضرب و حاصل‌ضرب‌ها را با هم جمع کنیم، پنجاه و هشت به‌دست آید». در واقع، هدف خوارزمی، حلّ این معادله است :

$$x^{۲} + (۱۰ - x)^{۲} = ۵۸$$

نمادی که امروز برای توان‌ها به کار می‌بریم و آن‌ها را به‌صورت $a^{۲}$ ، $a^{۳}$ ، $a^{۴}$ ، ... می‌نویسیم، از رنه دکارت، ریاضی‌دان فرانسوی، است که آن را از سال ۱۶۴۷ میلادی معمول کرد.

در همین جا یادآوری کنیم که نشانه‌ی برابری «=» که بین دو عبارت برابر گذاشته می‌شود، کمتر از ۵۰۰ سال است که رواج یافته است. در سده‌ی شانزدهم، هروبرت رکورد (۱۵۵۸ــ۱۵۱۰)، پزشک و ریاضی‌دان انگلیسی، این نماد را برای برابری انتخاب کرد. رکورد می‌نویسد : «هیچ‌چیز، مانند دو پاره‌خط راست موازی، نمی‌تواند مفهوم برابری را برساند.»


حساب

توان

یادآوری

فعالیت

کار در کلاس

یادآوری

ایجاد انگیزه کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید یک کاغذ را مانند فعالیت تا کنند و تعداد لایه‌های آن‌را در هر بار تا زدن پیدا کنند. از آن‌ها بپرسید که این عمل را چند بار می‌توانند تکرار کنند.

هدف فعالیت:

هدف این فعالیت، یادآوری مفهوم توان و نشان دادن یکی از کاربردهای آن و نیز یادآوری مفهوم رشد توانی به‌صورت ضمنی است.

شروع کنید:

از گروه‌ها بخواهید فعالیت را انجام داده و به پرسش‌های مطرح شده در آن پاسخ دهند. با استفاده از جدولی مشابه جدول زیر و ثبت اعداد به‌دست آمده در آن، می‌توان جدول توان‌های ۲ را به‌دست آورد. دانش‌آموزان می‌توانند چند سطر اوّل جدول را

تعداد تا	تعداد لایه‌ها	تعداد لایه‌ها به‌صورت توانی از ۲
⋮	⋮	⋮

با شمارش تعداد لایه‌ها در هر مرحله و سطرهای بعدی را با به‌کارگیری راهبرد الگویابی پرکنند.

بپرسید!

پس از انجام‌دادن فعالیت از دانش‌آموزان بپرسید : آیا ارتفاع قلّه‌ی دماوند بلندتر از کاغذی است که ۲۶ بار تا شده است؟ ارتفاع قلّه‌ی اورست چه‌طور؟

ادامه دهید:

از گروه‌ها بخواهید متن کتاب را مطالعه کنند. سپس با ذکر چند مثال در کلاس، عبارت‌های «پایه»، «توان»، «اعداد توان‌دار»، «مجذور»، «مربع» و «مکعب» را یادآوری کنید. برای مفاهیم اخیر می‌توانید از مثال مساحت مربع و حجم مکعب استفاده کنید. سپس، از دانش‌آموزان بخواهید کار در کلاس را حل کنند و پاسخ‌هایشان را در گروه مطرح و بررسی نمایند.

هدف کار در کلاس :

یافتن حاصل عبارت‌های توان‌دار در تمرین ۱ برای ایجاد مهارت بیشتر در دانش‌آموزان مطرح شده است. این تمرین، لازم است $\frac{۲}{۳}$ در گروه‌ها و در کلاس به بحث و بررسی بیشتر گذاشته شود. هدف از تمرین ۲، یادآوری مفهوم توان است که نمادی برای خلاصه کردن ضرب‌های مکرر یک عبارت می‌باشد. در این تمرین کسر، اعداد منفی و نیز عبارت‌های جبری به‌صورت توان آمده است.

بپرسید!

با طرح پرسش‌های زیر درباره‌ی اعداد توان‌دار با پایه‌ی

منفی در کلاس بحث کنید.

۱) علامت = یا ≠ قرار دهید.

$-۲^۳ \bigcirc (-۲)^۳$

$-۳^۲ \bigcirc (-۳)^۲$

$-۳^۴ \bigcirc (-۳)^۴$

۲) حاصل جمع‌های زیر را بیابید.

$(-۱)^{۱۰۰} - ۱^{۱۰۰} =$

$(-۱)^{۹۹} - ۱^{۹۹} =$

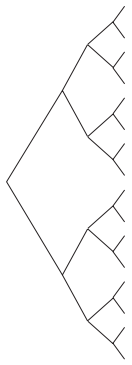
توصیه‌ی آموزشی:

برای جذاب‌تر شدن اجرای فعالیت، بهتر است قبل از انجام‌دادن کار و محاسبه‌ی مقدار ضخامت، از همه‌ی دانش‌آموزان بخواهید تا حدس خود را بیان کنند.

تلفیق با سایر دروس:

استفاده از توان برای نمایش علمی اعداد بسیار بزرگ (و بسیار کوچک) در بسیاری از علوم مانند نجوم، فیزیک، شیمی و ... یکی از کاربردهای توان است. رواج این کاربرد باعث آن شده است که برای برخی توان‌های ۱۰ از نام‌هایی استفاده شود؛ مثلاً $۱۰^۲$:سانتی، $۱۰^۳$:کیلو، $۱۰^۶$: مگا و ... .

توان در تقسیم برخی پدیده‌ها نیز کاربرد دارد؛ مثلاً، در تفسیر شیوع یک بیماری یا تکثیر سلولی در زیست‌شناسی یا حتی در تقسیم برخی پدیده‌های اجتماعی مانند شایعه پراکنی.



استفاده از ابزار و تکنولوژی:

برای این که دانش‌آموزان، بزرگی یک عدد توان‌دار را بهتر احساس کنند، از آن‌ها بخواهید به کمک ماشین‌حساب یا رایانه اعداد زیر را محاسبه کنند.

$۷^{۱۲}$ ، $۱۱^۵$ و ...

می‌توانید با استفاده از نرم‌افزارهای مختلف مانند excel و Drives و به کمک دانش‌آموزان، نمودارهای ستونی ۲^x ، $x^۲$ ، $(-۲)^x$ و $(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید تا آنان بتوانند رشد توانی را بهتر درک کنند.

فعالیت خارج از کلاس:

با توجه به کاربرد برخی اعداد توان‌دار و احساس نیاز به‌حفظ کردن آن‌ها می‌توانید از دانش‌آموزان علاقه‌مند بخواهید که با طرح‌های جالب، معادل عددی اعداد توان‌دار زیر را بنویسند و در کلاس نصب کنند؛ بدین ترتیب، عمل حفظ توان تسریع می‌شود.

$۱^۲, ...۲۰^۳$

$۱^۳, ...۵^۳$

$۱^۴, ...۴^۴$

$۱^۵, ۲^۵$

$۱^۶, ۲^۶$

توسعه:

۱) بحث درباره‌ی تفاوت $(\frac{a}{b})^۵$ و $\frac{a^۵}{b}$ ؛

۲) بحث درباره‌ی این که آیا می‌توان حدس زد یک عدد توان‌دار چند رقمی است؛ مثلاً :

$۱\times۱۰^۴ \quad ۶\times۱۰^۵ \quad ۲۵\times۱۰^۶ \quad ۲^۵\times۱۰^{۴۰}$

<=>

۳) طرح پرسش‌هایی مانند پرسش‌های زیر :

$۳^{۴۲}=۲^{۶۳} \qquad (-۲)^{۵۰}=-۲^{۵۰}$

$(-۸)^۷=-۸^۶ \qquad ۳^{۱۰۰}=۲^{۱۰۰}$

۴) بحث در مورد به توان رسیدن پایه‌های منفی و حالت‌های مختلف آن؛

۵) آموزش درس ترتیب انجام‌دادن عملیات برای پیدا کردن حاصل عبارت‌های توان‌دار و پرانتزی.

ضرب و تقسیم عددهای توان‌دار با پایه‌های مساوی

ایجاد انگیزه کنید:

عبارت‌های زیر را روی ۸ کارت کوچک بنویسید. چند سری از این کارت‌ها درست کنید و به هر گروه یک سری از آن‌ها را بدهید. از آن‌ها بخواهید عبارت‌های مساوی را جدا کنند و برای هر دسته یک تساوی از ضرب یا تقسیم اعداد توان‌دار بنویسند:

$(۵\times۵\times۵)\times(۵\times۵)$ $\quad$ $(۵\times۵\times۵)/(۵\times۵)$

$(۵\times۵\times۵\times۵)\times۵$ $\quad$ $(۵\times۵\times۵\times۵)/(۵\times۵\times۵)$

$(۵\times۵\times۵\times۵\times۵)\times(۵\times۵)$ $\quad$ $(۵\times۵\times۵)/(۵\times۵\times۵\times۵\times۵)$

$۵\times(۵\times۵\times۵\times۵\times۵)$ $\quad$ $(۵\times۵)/(۵\times۵\times۵\times۵)$

هدف فعالیت:

هدف این فعالیت، یادآوری و کشف مجدد قاعده‌ی ضرب اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی و بیان آن است.

شروع کنید:

از گروه‌ها بخواهید فعالیت را انجام دهند و قاعده‌ای برای ضرب دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی بیابند. به دانش‌آموزان فرصت دهید تا با بحث در گروه این قاعده را کشف کنند. سپس، نماینده‌ی یکی از گروه‌ها قاعده‌ای را که گروه به‌دست آورده است، در کلاس مطرح کند. دیگر گروه‌ها را نیز تشویق کنید تا به تکمیل یا تصحیح آن بپردازند.

سپس، از دانش‌آموزان بخواهید با استفاده از قاعده‌ای که آموخته‌اند، کار در کلاس این قسمت را ابتدا به‌صورت فردی حل کنند و بعد به بررسی پاسخ‌هایشان در گروه بپردازند.

بپرسید!

در زمانی که دانش‌آموزان سرگرم بحث گروهی و انجام‌دادن فعالیت هستند، می‌توانید با طرح پرسش‌هایی چون $۲^{۷۰}\times۲^{۴۰}=?$ آن‌ها را متوجه ضرورت وجود قاعده‌ای برای تسهیل ضرب اعداد توان‌دار کنید و به کشف این قاعده سوق دهید.

هدف کار در کلاس:

هدف تمرین ۱، کسب مهارت بیشتر دانش‌آموزان در به‌کارگیری قاعده‌ای است که برای ضرب عبارت‌های توان‌دار با پایه‌های مساوی آموخته‌اند. تمرین ۲، به استفاده از این قاعده در عبارت‌هایی که پایه‌ی آن‌ها به صورت یک حرف (پارامتری) نوشته شده است، اختصاص دارد.

در تمرین سوم، استفاده از این قاعده در عبارت‌هایی با پایه‌های کسری و اعشاری مطرح شده است. آنچه در این تمرین جالب به نظر می‌رسد، تفاوت شکلی پایه‌های مساوی است، مثلاً $\frac{۵}{۳}$ و $۱\frac{۲}{۳}$ مساوی‌اند امّا در دو عدد توان‌دار، این تمرین به شکل‌های متفاوت نوشته شده است. دانش‌آموزان باید بتوانند پایه‌های مساوی عبارت‌ها را به رغم تفاوت شکلی‌شان بیابند و

قاعده‌ی موردنظر را در ضرب آن‌ها به‌کار ببرند.

هدف فعالیت:

هدف این فعالیت، یادآوری و کشف قاعده‌ای برای تقسیم عبارت‌های توان‌دار با پایه‌های مساوی و بیان آن است.

ادامه دهید:

از دانش‌آموزان بخواهید فعالیت این قسمت را انجام دهند. به آن‌ها فرصت دهید تا با بحث گروهی قاعده‌ی خواسته شده در فعالیت را کشف کرده و با زبانی گویا در کلاس بیان کنند. پس از آن‌که هر گروه قاعده‌ای را که یافته است در کلاس مطرح کرد، می‌توانید این قاعده را به صورت مختصر روی تخته بنویسید. سپس، از دانش‌آموزان بخواهید کار در کلاس این قسمت را حل کنند و پاسخ‌هایشان را در گروه طرح و بررسی نمایند. تمرین این قسمت را نیز به عنوان تکلیف منزل به دانش‌آموزان توصیه کنید.

هدف کار در کلاس:

تمرین ۱ کار در کلاس جهت کسب مهارت بیشتر در به‌کارگیری قاعده‌ی تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی مطرح شده است. در تمرین ۲، همین قاعده برای عبارت‌هایی که پایه‌های آن‌ها به صورت یک حرف (پارامتری) است، به‌کار گرفته شده است. در تمرین ۳، تلفیقی از دو قاعده‌ی ضرب و تقسیم عبارت‌های توان‌دار با پایه‌های مساوی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فعالیت خارج از کلاس:

با توجه به کاربرد برخی از کسرها و معادل اعشاری آن‌ها می‌توانید از دانش‌آموزان علاقه‌مند بخواهید با طرح‌هایی زیبا و جالب، تساوی‌های زیر را بنویسند و در کلاس نصب کنند تا دانش‌آموزان بتوانند سریع‌تر آن‌ها را حفظ کنند:

$\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۱۰}=۰/۲$ $\qquad$ $\frac{۱}{۸}=۰/۱۲۵$

$\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$ $\qquad$ $\frac{۱}{۲}=۰/۵$

$\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$

توسعه:

۱ــ بحث و بررسی و یافتن قاعده‌ای برای نوشتن اعدادی مانند عددهای زیر به‌صورت عدد توان‌دار:

$(۳^۴)^۲ \quad (a^۲)^۶ \quad (۲^a)^b$

$(۲^۵)^۳ = ۲^۵ \times ۲^۵ \times ۲^۵ = ۲^{۱۵}$

۲ــ بحث کلاسی و یافتن قاعده‌هایی برای به‌دست آوردن یکان اعداد توان‌دار با پایه‌های ۱ تا ۱۰ بدون به‌دست آوردن حاصل آن‌ها؛ مثلاً یکان اعدادی مانند:

$۱^{۲۵} \quad ۲^{۲۵} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ۱۰^{۲۵}$

۳ــ بحث درباره‌ی $a^۰ : a^۰ = \frac{a^b}{a^b} = ۱$.

ضرب و تقسیم عددهای توان‌دار با توان‌های مساوی

ایجاد انگیزه کنید:

$۲^۳$	$۴^۳$	$۳^۳$	$۳۲^۳$	$۲^۳$	$۲^۳$	×	×
$۸^۳$	$۶^۳$	$۱۸^۳$	$۱^۳$	$۲^۳$	$۱۶^۳$	×	×

۲۰ کارت کوچک برای هر گروه تهیه کنید و از آن‌ها بخواهید روی کارت‌ها را با ۲۰ عبارت بالا پرکنند؛ سپس، با استفاده از کارت‌هایشان ۴ حاصل‌ضرب بسازند. با توجه به این‌که دانش‌آموزان با قانون ضرب عددهای توان‌دار با توان‌های مساوی آشنا نیستند، می‌توانید استفاده از ماشین‌حساب را به آن‌ها پیشنهاد کنید.

هدف فعالیت:

هدف این فعالیت کشف قاعده‌ی ضرب دو عدد توان‌دار با توان‌های مساوی است.

شروع کنید:

به دانش‌آموزان فرصت کافی دهید تا درباره‌ی این قاعده فکر کنند؛ قاعده‌ای بیابند و قاعده‌هایی را که یافته‌اند، آزمایش کنند. توجه داشته باشید که دانش‌آموزان، اولین بار است که با این قاعده برخورد کرده‌اند.

مشاهده کنید:

در مدتی که دانش‌آموزان به انجام‌دادن فعالیت می پردازند، به بحث آن‌ها در گروه توجه کنید. آیا آن‌ها منظور مثالی را که در ابتدای فعالیت آمده است، دریافته‌اند؟ آیا می‌توانند دو مثال دیگر را با استفاده از مثال حل شده، حل کنند؟ آیا می‌توانند روشی را که برای حل مثال‌ها به‌کار برده‌اند، به زبان خود برای هم‌گروهی‌هایشان بیان کنند؟ آیا با بحث در گروه به کشف قاعده‌ی ضرب اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی نزدیک شده‌اند؟ آیا قاعده‌ای را که یافته‌اند، آزمایش می‌کنند تا از درستی آن مطمئن شوند؟

آموزش دهید:

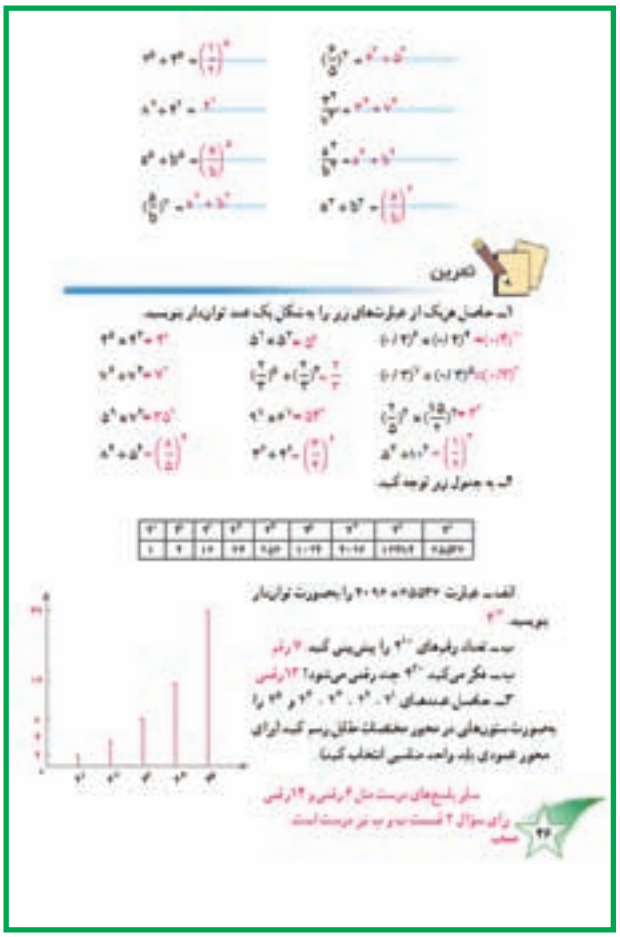
از نماینده‌ی یکی از گروه‌ها بخواهید قاعده‌ای را که یافته‌اند بیان کند. دیگر گروه‌ها را به تکمیل و تصحیح این قاعده ترغیب کنید. قاعده‌ای را که به‌دست آمده است، روی تخته بنویسید.

هدف کار در کلاس:

برای کسب مهارت در به‌کارگیری قاعده‌ی ضرب اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی، تمرین‌هایی در این قسمت مطرح شده است. در تمرین اوّل، پایه‌های منفی و کسری نیز مطرح شده‌اند. در تمرین ۲ باید عکس قاعده‌ی ضرب را به‌کار برد. در تمرین ۳، پایه‌های اعداد با حروف نشان داده شده‌اند. در تمرین ۴، عکس قاعده را برای عبارت‌ها باید به‌کار برد. برای دانش‌آموزان توضیح دهید که عبارت‌های $۳a$، $۲x$، $۴b$ و $۲xy$، به‌ترتیب، خلاصه‌شده‌ی $۳\times a$، $۲\times x$، $۴\times b$ و $۲\times x\times y$ هستند.

ادامه دهید:

از دانش‌آموزان بخواهید تمرین‌های کار در کلاس را ابتدا به‌تنهایی حل کنند و سپس در گروه، به بررسی پاسخ‌هایشان بپردازند.



از گروه‌ها بخواهید فعالیت را انجام دهند و با دقت به سؤال مطرح شده در آن پاسخ گویند.

هدف فعالیت:

این فعالیت با هدف کشف قاعده‌ای برای ساده کردن و تقسیم اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی توسط دانش‌آموزان طرح شده است.

آموزش دهید:

از یکی از گروه‌ها بخواهید قاعده‌ای را که یافته است، بیان کند و دیگر گروه‌ها را به تکمیل و تصحیح این قاعده ترغیب کنید. سپس، با استفاده از مجموع بحث‌های مطرح‌شده در کلاس، قاعده‌ی به‌دست آمده برای تقسیم اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی را روی تخته بنویسید.

هدف کار در کلاس:

هدف، کسب مهارت در به‌کارگیری قاعده‌ای است که دانش‌آموزان آموخته‌اند. در یکی از تمرین‌های این کار در کلاس، پایه‌ها با حروف نمایش داده شده‌اند.

ادامه دهید:

از دانش‌آموزان بخواهید ابتدا کار در کلاس را به‌صورت فردی حل کرده و سپس در گروه بررسی کنند. تمرین و حلّ مسئله را به‌عنوان تکلیف منزل به دانش‌آموزان پیشنهاد کنید و در جلسه‌ی بعد به بررسی پاسخ‌ها در کلاس بپردازید.

تمرین ۲، یکی از تمرین‌هایی است که به بررسی بیشتر در کلاس نیاز دارد. درباره‌ی فایده‌ی استفاده از جدول ارائه شده در سؤال ۲، در کلاس بحث کنید. به دانش‌آموزان فرصت دهید تا پاسخ‌ها و نظریات خود را در کلاس مطرح کنند. تمرین ۳ این قسمت نیز به بحث و بررسی بیشتر در کلاس نیاز دارد. با انجام‌دادن این تمرین و تمرین‌های مشابه، دانش‌آموزان بهتر می‌توانند رشد توانی را احساس کنند. تمرین و حلّ مسئله را به‌عنوان تکلیف دانش‌آموزان تعیین کنید.

توصیه‌ی آموزشی:

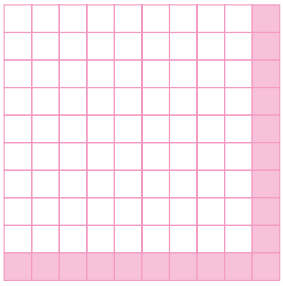
۱ــ در تمرین ۲ نیز با استفاده از جدول می‌توان عبارت‌های $۴^۶ = ۴۰۹۶$ و $۴^۸ = ۶۵۵۳۶$ را پیدا و جایگزین کرد.

$$۴^۶ \times ۴^۸ = ۴^{۱۴}$$

هدف پرسش‌های بعدی این تمرین نیز توجه دادن به رشد عددها و پیدا کردن یک الگو در جدول است.

۲ــ در حلّ تمرین ۳، انتخاب واحد مناسب برای محور عمودی اهمیت دارد تا بتوان روی آن، عددهای ۲ و ۳۲ را نمایش داد و مقایسه کرد. هدف این تمرین، نشان دادن رشد بسیار سریع توابع توانی است.

۳ــ در قسمت حلّ مسئله می‌توان از راهبرد رسم شکل برای حلّ مسئله‌های ۲ و ۳ استفاده کرد؛ برای مثال، در حلّ مسئله‌ی سوم می‌توان شکل زیر را رسم کرد.



اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

عبارت a^b را معادل $a \times b$ فرض می‌کنند. مثلاً می‌نویسند $۲^۳ = ۶$ گاهی نیز در تقسیم دو عدد توان‌دار با پایه‌ها و توان‌های نامساوی از هر دو قاعده‌ی تقسیم اعداد توان‌دار به‌طور هم‌زمان استفاده می‌کنند؛ مثلاً می‌نویسند: $\frac{۱۵۶}{۳^۵} = ۵^۱$

توسعه:

۱ــ طرح پرسش‌هایی مانند پرسش‌های زیر می‌تواند دانش‌آموزان را در درک بهتر مطالبی که آموخته‌اند، یاری دهد.

الف) جای خالی را پر کنید.

$$۷^{\square} = ۵^{\square} \qquad \square^۳ = ۵^۳$$

ب) عدد $۱۶^{۱۱} \times ۵^{۲۷}$ چند رقمی است؟

پ) اگر $۳^a = ۱۰$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$۳^{a-۱} ، ۳^{a+۲} ، ۲۷^{a+۱} ، ۳^{۲a-۲}$$

ت) بین $۷^{۲۰۰}$ و $۷^{۲۰۱}$ عددی بیابید که بر ۵ قابل قسمت باشد.

۲ــ یکی از عددهای مهم توسعه در این قسمت ترکیب ۴ قانون برای ساده کردن عبارت‌های توان‌دار است. در این قسمت، دانش‌آموزان باید به‌دنبال پایه یا توان مساوی بگردند.

$$۴^۳ \times ۶^۳ \times ۳^۷ \times ۸^۷ = ۲۴^۳ \times ۲۴^۷ = ۲۴^{۱۰}$$

در بعضی موارد، لازم است پایه‌های مساوی ایجاد کنند؛ به این مثال‌ها توجه کنید.

الف) $(-۳)^۲ \times ۳^۷ = ۳^۲ \times ۳^۷ = ۳^۹$

ب) $(۱\frac{۱}{۲})^۵ \times (\frac{۳}{۲})^۲ \times ۱/۵^۳ = ۱/۵^۵ \times ۱/۵^۲ \times ۱/۵^۳ = ۱/۵^{۱۰}$

پ) $۴^۳ \times ۸^۵ = (۲^۲)^۳ \times (۲^۳)^۵ = ۲^۶ \times ۲^{۱۵} = ۲^{۲۱}$

ت) $\frac{۵^۳ \times ۵^۴}{۳ \times ۴۵^۲} = \frac{۵^۳ \times ۵^۴}{۳ \times ۳^۴ \times ۵^۲} = \frac{۵^۵}{۳^۵} = (\frac{۵}{۳})^۵$