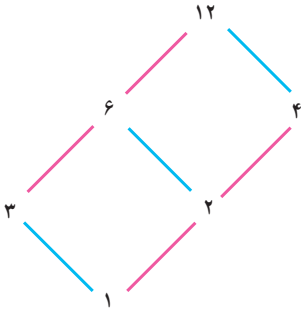


مقسوم علیه



مقسوم علیه های یک عدد



معلم ریاضی می خواهد دانش آموزان کلاس را در دسته های مساوی و برای کارهای مختلف گروه بندی کند. آیا برای این کار تعداد دانش آموزان کلاس اهمیت دارد؟ اگر تعداد دانش آموزان ۲۴ نفر باشد بهتر است یا ۲۷ نفر یا ۲۳ نفر؟ چرا؟



۱۲ لوبیا (یا هر چیز دیگری مثل آن) را بردارید و آن ها را به دسته های مساوی تقسیم کنید؛ به طوری که تعداد لوبیاهای همه ی دسته ها با هم مساوی باشند و هیچ لوبیایی باقی نماند. تا آن جا که می توانید، حالت های مختلف را به دست آورید و جدول زیر را کامل کنید.

تعداد لوبیاهای هر دسته							
تعداد دسته ها							

همین کار را در مورد ۱۸ لوبیا انجام دهید و جدول مربوط به آن را تکمیل کنید.

تعداد لوبیاهای هر دسته							
تعداد دسته ها							

در مورد رابطه هایی که بین عددهای جدول و تعداد لوبیاها وجود دارد، فکر کنید.



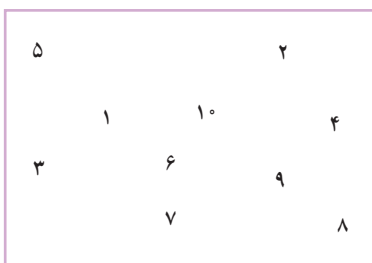
اگر ۶ را بر ۳ تقسیم کنیم، باقی مانده صفر می شود. ۳ یک مقسوم علیه ۶ است.
 ۵ یک مقسوم علیه ۶ نیست؛ زیرا در تقسیم ۶ بر ۵، باقی مانده صفر نمی شود. مقسوم علیه های
 ۶ عبارت اند از ۱، ۲، ۳ و خود ۶.

$$\text{مجموعه ی مقسوم علیه های ۶} = \{1, 2, 3, 6\}$$

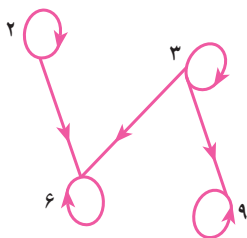
حالا عدد ۸ را در نظر می گیریم. مقسوم علیه های ۸ عبارت اند از ۱، ۲، ۴ و خود ۸.
 هیچ کدام از عددهای ۳، ۵ و ۷ مقسوم علیه ۸ نیستند.

$$\text{مجموعه ی مقسوم علیه های ۸} = \{1, 2, 4, 8\}$$

کار در کلاس

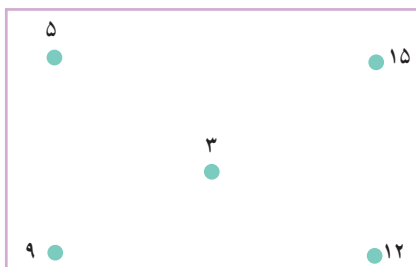
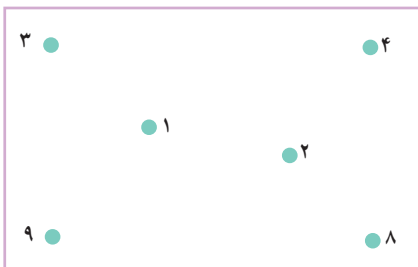


۱- در شکل مقابل، دور
 مجموعه ی مقسوم علیه های ۹ با مداد
 قرمز و دور مجموعه ی مقسوم علیه های
 ۵ با مداد سیاه خط بکشید.



۲- به شکل مقابل توجه کنید.

۶. → ۲ نشان می دهد که ۲
 مقسوم علیه ۶ است. ۲ نشان
 می دهد که ۲ مقسوم علیه خودش نیز
 هست. همین نمودار را برای هر دسته از
 اعداد زیر بکشید.



مقسوم علیه‌های هر عدد را به ترتیب از کوچک به بزرگ در جدول بنویسید. با توجه به جدول، جمله‌های زیر را کامل کنید.

عدد	مقسوم علیه‌های عدد			
۹	۱			
۱۵				
۷				
۱۴				
۵				
۱۳				

- عدد مقسوم علیه همه‌ی عددهاست.
- کوچک‌ترین مقسوم علیه هر عدد است.
- هر عدد خودش بوده و بزرگ‌ترین مقسوم علیه هر عدد است.
- بعضی از عددها فقط دو مقسوم علیه دارند که عبارت‌اند از: و
- در مورد نتایج دیگری که از جدول بالا می‌توان به دست آورد، با معلم ریاضی و هم کلاسی‌های خود در گروه گفت‌وگو کنید.

کار در کلاس



- ۱- مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های ۱۷ را بنویسید.
- ۲- مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های ۱۲ را بنویسید.
- ۳- آیا ۱ مقسوم علیه ۱۱ است؟ مقسوم علیه ۱۵ چه‌طور؟
آیا ۱ مقسوم علیه هر عددی است؟
- ۴- بزرگ‌ترین مقسوم علیه ۸ چند است؟ در مورد ۱۲ چه‌طور؟
آیا هر عدد مقسوم علیه خودش است؟
- ۵- دیدید که تنها مقسوم علیه‌های ۵، خود ۵ و ۱ هستند. آیا ۳ غیر از خودش

و ۱، مقسوم علیه دیگری دارد؟ ۷ چه طور؟
 ۵ عدد دیگر بنویسید که هر کدام غیر از خودشان و ۱ مقسوم علیه دیگری نداشته باشند.

عدد اول



آیا دانش آموزان این کلاس را می توان گروه بندی کرد؟ (گروه با تعداد مساوی)

هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۱ که غیر از خودش و ۱ مقسوم علیه دیگری نداشته باشد،
 عدد اول نامیده می شود.

در زیر، اعداد اول کوچک تر از ۵۰ نوشته شده است.

۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷



فعالیت

اگر به مثال های زیر توجه کنید، می بینید که چگونه با استفاده از ضرب عددهای
 ۲ و ۳ اعداد زیادی ساخته می شوند.

$$2 \times 3 = 6 \quad 2 \times 2 \times 3 = 12 \quad 2 \times 3 \times 3 = 18 \quad 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$$

شما هم به همین ترتیب، ۴ عدد دیگر بنویسید که فقط با ۲ و ۳ ساخته شده
 باشند.

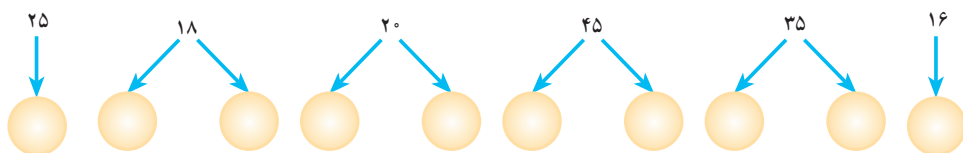
۴ عدد بنویسید که فقط از ضرب عددهای ۲ و ۵ ساخته شوند. به این ترتیب،
 چند عدد می توانیم بسازیم؟

عدد ۱۲ عدد اول نیست. مقسوم علیه های ۱۲ عبارت اند از : ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲.
در بین این عددها، ۲ و ۳ اعداد اول هستند. ۲ و ۳ **مقسوم علیه های اول** ۱۲ هستند.

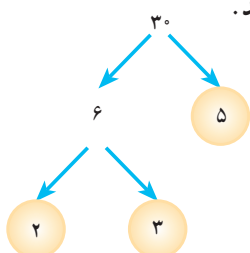
کار در کلاس



۱- مقسوم علیه اول هریک از این عددها را حدس بزنید.



۲- مجموعه ی مقسوم علیه های ۱۸ را بنویسید و زیر مقسوم علیه های اول آن خط بکشید.



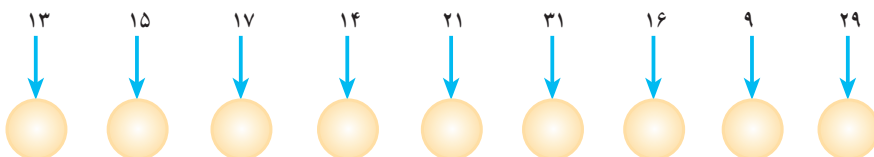
۳- مانند نمونه عمل کنید تا به مقسوم علیه اول عددها برسید.

۹۰ ۲۱۰ ۴۲



فعالیت

کدام یک از اعداد زیر اول هستند؛ زیر آن ها خط بکشید.



یک مقسوم علیه اول برای هر یک از اعداد بالا، در دایره زیر آن بنویسید.
با توجه به شکل های بالا، یک ویژگی برای عددهای اول بیان کنید.





۱- کدام یک از جمله‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ هر جمله‌ی درست را با ✓ و هر جمله‌ی غلط را با × مشخص کنید و علت نادرستی آن را توضیح دهید.

الف - عدد ۲۹ اول است.

ب - هر عدد اول از ۱ بزرگ‌تر است.

پ - ۱ عددی اول نیست.

ت - ۱ مقسوم‌علیه اول ندارد.

ث - هر عدد دست کم یک مقسوم‌علیه اول دارد.

ج - هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، دست کم یک مقسوم‌علیه اول دارد.

چ - اگر عددی زوج باشد، اول نیست.

ح - عدد ۳۰ دارای سه مقسوم‌علیه اول است.

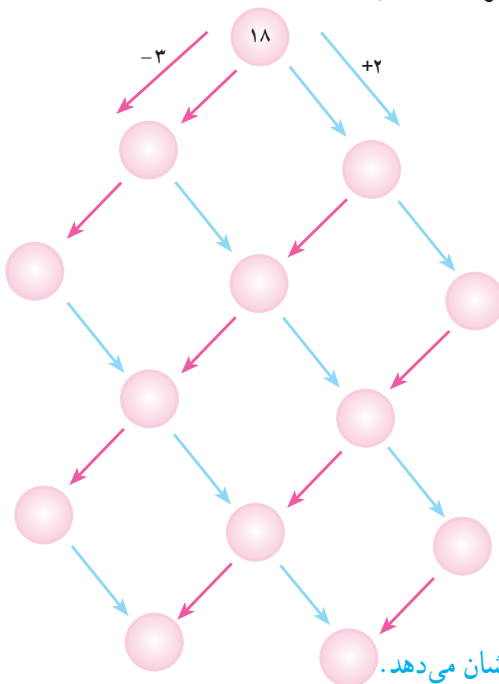
۲- دانش‌آموزی مقسوم‌علیه‌های ۲۴ را در جدول

۲۴	۱۲	۶	۳
۸	۴	۲	۱

مقابل نوشته است. آیا می‌توانید حدس بزنید آن‌ها را

چگونه به دست آورده است؟

۳- نمودار را کامل کنید.



پیکان آبی، جمع به اضافه‌ی ۲ را نشان می‌دهد.

پیکان قرمز، تفریق منهای ۳ را نشان می‌دهد.

نمودار مقسوم علیه های یک عدد

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \div 2 \\ 4 \\ 4 \div 2 \\ 2 \\ 2 \div 2 \\ 1 \end{array}$$

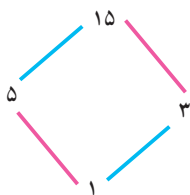
می خواهیم مقسوم علیه های عدد ۸ را به دست آوریم. عدد ۲ مقسوم علیه اول ۸ است و ۸ مقسوم علیه اول دیگری ندارد. برای یافتن مقسوم علیه های ۸، ابتدا آن را به ۲ تقسیم می کنیم؛ عدد ۴ به دست می آید که یک مقسوم علیه ۸ است. مجدداً ۴ را به ۲ تقسیم می کنیم و این کار را ادامه می دهیم. نمودار مقابل، روش انجام دادن این کار را نشان می دهد. نمودار مقابل، نمودار مقسوم علیه های ۸ است.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 9 \div 3 \\ 3 \\ 3 \div 3 \\ 1 \end{array}$$

عدد ۹ نیز تنها یک مقسوم علیه اول دارد. نمودار مقابل مقسوم علیه های ۹ را نشان می دهد.

$$\begin{array}{r} 15 \\ 15 \div 3 \\ 5 \\ 5 \div 5 \\ 1 \end{array}$$

مقسوم علیه های اول ۱۵ عبارت اند از: ۳ و ۵. مقسوم علیه های ۱۵ را به کمک تقسیم بر ۳ و تقسیم بر ۵ به دست می آوریم. نمودار مقابل، روش انجام دادن این کار را نشان می دهد.

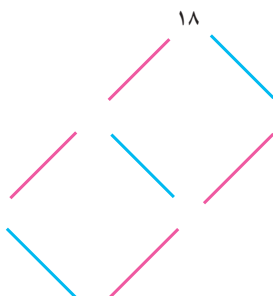


نمودار مقسوم علیه های ۱۵ به صورت روبه روست. پاره خط های آبی، تقسیم به ۳ و پاره خط های قرمز، تقسیم به ۵ را نشان می دهند.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \div 2 \\ 6 \\ 6 \div 2 \\ 3 \\ 3 \div 3 \\ 1 \end{array}$$

عدد ۱۲ دو مقسوم علیه اول دارد که ۲ و ۳ هستند. در نمودار مقابل، روش به دست آوردن مقسوم علیه های ۱۲ را می بینید.

نمودار آن را با رسم خط های قرمز و آبی کامل کنید.

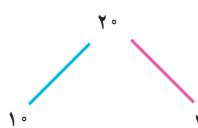
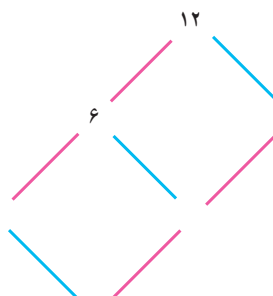


۱- در نمودار مقابل، پاره خط‌های قرمز تقسیم به ۳ و پاره خط‌های آبی تقسیم به ۲ را نشان می‌دهند. نمودار را کامل کنید.

۲- با استفاده از نمودار مقابل، مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های ۱۸ را بنویسید.

$$\{ \text{مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های ۱۸} = \{ \quad \} \}$$

۳- نمودارهای زیر را کامل کنید.



۴- با استفاده از نمودارهای بالا، ابتدا نمودار مقسوم علیه‌های ۱۰ و ۶ را مشخص کنید. سپس، مجموعه‌های زیر را با اعضایشان بنویسید.

$$\{ \text{مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های ۱۰} = \{ \quad \} \}$$

$$\{ \text{مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های ۶} = \{ \quad \} \}$$

۵- مقسوم علیه‌های اول عدد ۱۵ را بنویسید.

۶- مقسوم علیه‌های اول عدد ۴۵ را بنویسید.

نمودار مقسوم علیه‌های ۱۵ را رسم کنید.

نمودار مقسوم علیه‌های ۴۵ را رسم کنید.

تمرین



۱- مقسوم علیه‌های اول عدد ۱۶ را بنویسید و نمودار مقسوم علیه‌های آن را رسم کنید.



۲- مقسوم علیه‌های اول عدد ۲۱ را بنویسید و نمودار مقسوم علیه‌های آن را رسم کنید.

۳- مقسوم علیه‌های اول عدد ۲۴ را بنویسید و نمودار مقسوم علیه‌های آن را رسم کنید.

۴- عدد ۳۶ را در نظر بگیرید. مقسوم علیه‌های اول ۳۶، عددهای ۲ و ۳ هستند.

الف - مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های ۳۶ را

بنویسید.

ب- نمودار مقسوم علیه‌های ۶ را در داخل نمودار

پیدا کنید.

پ- نمودار مقسوم علیه‌های ۱۲ را در داخل

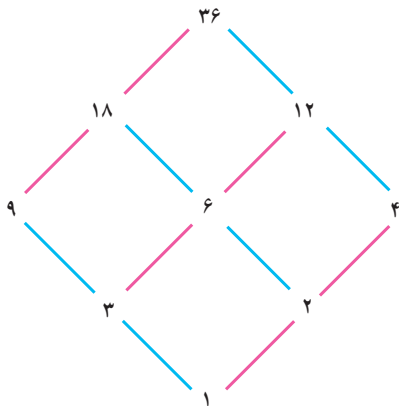
نمودار پیدا کنید.

ت- نمودار مقسوم علیه‌های ۱۸ را در داخل

نمودار پیدا کنید.

ث- نمودار مقسوم علیه‌های کدام عددها را

می‌توانیم از این نمودار پیدا کنیم؟



نمودار مقسوم علیه‌های ۳۶

حل مسئله



- رسم شکل
- زیر مسئله
- حل مسئله‌ی ساده‌تر
- الگویابی
- جدول نظام‌دار
- حدس و آزمایش

۱- در یک پادگان، فرمانده از سربازان خود می‌خواهد، برای رژه رفتن تمرین کنند. شرط او برای یک گروه ۱۲ نفره از سربازان این است که ستون‌ها و ردیف‌های رژه را طوری طراحی کنند که یک مستطیل درست شود. برای مثال در زیر یکی از آرایش‌های مستطیل شکل یک گروه ۶ نفره مشخص شده است.



این گروه ۱۲ نفره در چند نوع آرایش مستطیل شکل می‌توانند تمرین کنند؟
 ۲- در کلاسی ۴ گروه ۳ نفره و ۶ گروه ۴ نفره وجود دارد. دانش‌آموزان این کلاس را در چند حالت می‌توانیم به گروه‌هایی با تعداد اعضای برابر و بیش‌تر از ۲ نفر و کم‌تر از ۷ نفر تقسیم کنیم؟





بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد

فعالیت



دانش آموزان سال اول راهنمایی یک مدرسه می خواهند به اردو بروند. آن‌ها تصمیم گرفته اند که در اردو چادر بزنند و در دسته های مساوی از چادرها استفاده کنند. کلاس اول الف ۳۰ نفر دانش آموز دارد. این کلاس را به دسته های چند نفره می توان تقسیم کرد؟

کلاس اول ب نیز ۳۶ دانش آموز دارد. این کلاس را به دسته های چند نفره می توانیم تقسیم کنیم؟

اگر مسئولان مدرسه بخواهند برای هر دو کلاس یک نوع چادر تهیه کنند، بهتر است چادرها چند نفره باشند؟



عدد ۶ به هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۶ بخش پذیر است. اعداد ۱، ۲، ۳ و ۶ مقسوم علیه های ۶ هستند. به همین ترتیب، مقسوم علیه های ۹ عبارتند از: ۱، ۳ و ۹؛ بنابراین

$$\{1, 2, 3, 6\} = \text{مجموعه ی مقسوم علیه های } 6$$

$$\{1, 3, 9\} = \text{مجموعه ی مقسوم علیه های } 9$$

هر کدام از اعداد ۱ و ۳، هم مقسوم علیه ۶ و هم مقسوم علیه ۹ است. این اعداد، مقسوم علیه های مشترک ۶ و ۹ هستند.

$$\{1, 3\} = \text{مجموعه ی مقسوم علیه های مشترک } 6 \text{ و } 9$$



۱- مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۴ را بنویسید.

۲- مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۲۱ را بنویسید.

۳- مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مشترک عددهای ۱۴ و ۲۱ را بنویسید.

۴- تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$= \text{مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های } ۱۲$$

$$= \text{مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های } ۱۶$$

$$= \text{مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مشترک } ۱۶ \text{ و } ۱۲$$



فعالیت

در مسئله‌ی صفحه‌ی قبل، اگر دانش‌آموزان از چادرهایی که ظرفیت آن‌ها بیش‌تر است استفاده کنند، قیمت تمام‌شده‌ی چادرها کم‌تر می‌شود؛ بنابراین، خریدن چادرِ چند نفره بهتر و به صرفه‌تر است؟

دو عدد ۸ و ۱۲ را در نظر می‌گیریم، می‌دانیم که

$$\{1, 2, 4\} = \text{مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های } ۸$$

$$\{1, 2, 3, 4, 6, ۱۲\} = \text{مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های } ۱۲$$

است؛ بنابراین

$$\{1, 2, ۴\} = \text{مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مشترک } ۸ \text{ و } ۱۲$$

همان‌طور که می‌بینید، ۴ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۸ و ۱۲ است؛ یعنی، عدد

۴ بزرگ‌ترین عددی است که اگر ۸ و ۱۲ را بر آن تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ی هر دو تقسیم، صفر می‌شود.

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۸ و ۱۲ را به صورت $۸ \square ۱۲$ می‌نویسیم. پس

$$۸ \square ۱۲ = ۴$$

گاهی عبارت «بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک» را کوتاه می‌کنند و به صورت

«ب.م.م» می‌نویسند.

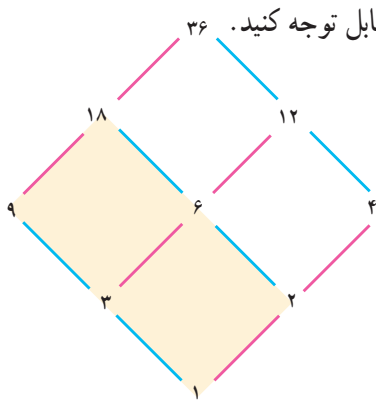




- ۱- الف - مجموعه ی مقسوم علیه های عدد ۱۰ را بنویسید.
 - ب - مجموعه ی مقسوم علیه های ۶ را بنویسید.
 - پ - مجموعه ی مقسوم علیه های مشترک دو عدد ۱۰ و ۶ را بنویسید.
 - ت - بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک ۱۰ و ۶ را پیدا کنید و تساوی زیر را کامل کنید.
- $$۱۰ \div ۶ =$$

۲- تساوی های زیر را کامل کنید.

$$\begin{aligned} &= \text{مجموعه ی مقسوم علیه های } ۱۲ \\ &= \text{مجموعه ی مقسوم علیه های } ۱۸ \\ &= \text{مجموعه ی مقسوم علیه های مشترک } ۱۲ \text{ و } ۱۸ \\ &۱۲ \div ۱۸ = \end{aligned}$$



به نمودار مقسوم علیه های عدد ۳۶ در شکل مقابل توجه کنید.
نمودار مقسوم علیه های عدد ۱۸ مشخص شده است.

نمودار مقسوم علیه های عدد ۱۲ را مشخص کنید.

کدام قسمت نمودار، مقسوم علیه های مشترک ۱۸ و ۱۲ را نشان می دهد؟

ب. م. دو عدد ۱۸ و ۱۲ چه عددی است؟

چگونه می توان به کمک نمودار، ب. م. دو عدد را پیدا کرد؟ توضیح دهید.

روش تعیین بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد

می خواهیم بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک ۱۲ و ۲۰ را تعیین کنیم. می دانیم که

$$۱۲ = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\}$$

$$۲۰ = \{۱, ۲, ۴, ۵, ۱۰, ۲۰\}$$

$$۲۰ \text{ و } ۱۲ = \{۱, ۲, ۴\}$$



پس بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۲ و ۲۰ مساوی ۴ است.
 بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد را می‌توانیم با استفاده از تقسیم‌های متوالی
 حساب کنیم؛ مثلاً، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۱۲ و ۲۰ را به صورت زیر حساب می‌کنیم.

$$\begin{array}{r}
 20 \overline{) 12} \\
 \underline{-12} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 12 \overline{) 8} \\
 \underline{-8} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 8 \overline{) 4} \\
 \underline{-8} \\
 0
 \end{array}$$

چگونه می‌توانیم با انجام دادن تقسیم‌های صفحه‌ی قبل ب. م. م دو عدد را به دست
 آوریم و این تقسیم‌ها تا کجا ادامه می‌یابند؟ توضیح دهید.

کار در کلاس



۱- تقسیم‌های زیر را کامل کنید تا ب. م. م دو عدد ۱۸ و ۳۰ به دست آید.

$$30 \overline{) 18}$$

$$18 \overline{) \quad}$$

$$\overline{) \quad}$$

۲- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۱۸ و ۶۶ را تعیین کنید.

۳- پیدا کردن ب. م. م به روش نوشتن مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌ها بهتر است یا
 روش تقسیم‌های متوالی؟ چرا؟

برای تعیین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۱۸ و ۱۴ به شکل زیر عمل می‌کنیم تا
 نوشتن تقسیم‌های متوالی ساده‌تر شود.

$$\begin{array}{r}
 18 \overline{) 14} \\
 \underline{-14} \\
 0
 \end{array}$$



	۱		
۱۸	۱۴	۴	
۱۴			

$$\begin{array}{r}
 14 \overline{) 4} \\
 \underline{-12} \\
 2
 \end{array}$$



	۱	۳	
۱۸	۱۴	۴	۲
۱۴	۱۲		



$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 2} \\ -4 \\ \hline 0 \end{array}$$



	۱	۳	۲
۱۸	۱۴	۴	۲
۱۴	۱۲	۴	

مقسوم علیه آخرین تقسیم، بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک ۱۸ و ۱۴ است؛ یعنی

$$۱۸ \square ۱۴ = ۲$$

با توجه به شکل نردبان به دست آمده، این روش محاسبه ی بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک را **روش نردبانی** می نامیم.

کار در کلاس



در هر قسمت، بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد داده شده را حساب کنید.

	۲	۱			
۵۲	۲۰	۱۲			
۴۰	۱۲				

$$\rightarrow ۵۲ \square ۲۰ =$$

۱۶۲	۹۰	

$$\rightarrow ۱۶۲ \square ۹۰ =$$

$$\rightarrow ۱۰۵ \square ۹۹ =$$

تمرین



بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک هر دو عدد زیر را به دست آورید.

$$۹۶ \square ۱۶۴$$

$$۲۰۸ \square ۱۷۶$$

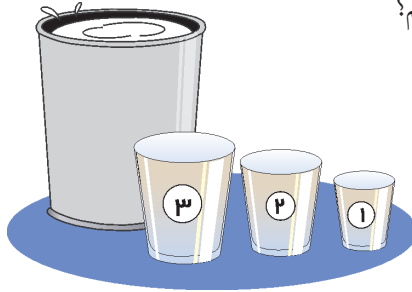
$$۲۵۲ \square ۳۵۷$$

$$۷۸ \square ۲۳۴$$



- رسم شکل
- زیر مسئله
- حل مسئله ی ساده تر
- الگویابی
- جدول نظام دار
- حدس و آزمایش

۱- می خواهیم ۱۲ لیتر شیر را پیمانه کنیم؛ به طوری که هر بار پیمانه کاملاً پر و سپس خالی شود. با کدام یک از پیمانه های ۱ لیتری، ۲ لیتری، ۳ لیتری و... می توانیم این کار را انجام دهیم؟



۲- دو ظرف به گنجایش ۱۲ لیتر و ۱۸ لیتر داریم. می خواهیم هر دو ظرف را فقط با استفاده از یکی از پیمانه های تمرین ۱، از مایعی پر کنیم؛ به شرطی که همه ی محتوای پیمانه را در هر بار در ظرف ها خالی کنیم. از کدام پیمانه ها می توانیم استفاده کنیم؟ بزرگ ترین پیمانه ای که می توانیم به کار ببریم، کدام است؟

۳- می خواهیم مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۱۶ سانتی متر را با کاغذهای مربع شکل که اندازه ی ضلع آن ها عددی طبیعی است بپوشانیم. اندازه ی ضلع مربع چه عددی می تواند باشد؟ با استفاده از کدام یک از این عددها تعداد مربع ها به کم ترین حد خواهد رسید؟

