

فصل ۵

۱. خط مماس بر منحنی‌ها و مشتق توابع
۲. روش‌های محاسبه‌ی مشتق توابع
۳. آهنگ تغییرات
۴. مشتق توابع مثلثاتی
۵. مشتق تابع وارون و توابع مرکب

وقتی هواپیما موشکی را شلیک می‌کند، موشک خط مستقیمی را طی می‌کند که مماس بر مسیر حرکت هواپیما است.

مشتق توابع





خط مماس بر منحنی‌ها و مشتق توابع

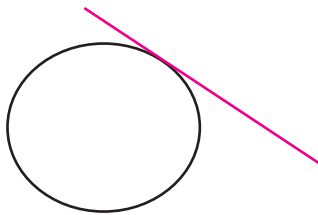


حل یک مسئله



چگونه خط مماس بر یک منحنی را به دست آوریم؟

قبلاً با مفهوم خط مماس بر یک دایره آشنا شده‌ایم.



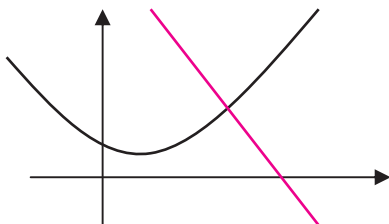
برای آن که خطی در نقطه‌ای بر دایره‌ای مماس باشد کافی است یکی از دو ویژگی‌های زیر برقرار باشد.
الف) خط و دایره فقط و فقط در آن نقطه برخورد داشته باشند.

ب) خط و دایره در آن نقطه برخورد داشته باشند و کل دایره در یک طرف خط قرار بگیرد.

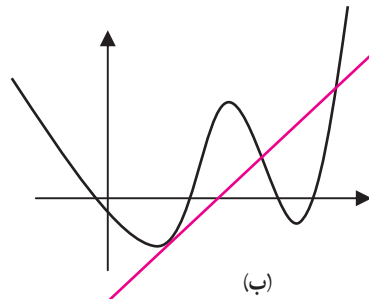
آیا از این ویژگی‌ها می‌توان برای به دست آوردن خط مماس بر منحنی‌های دیگر هم استفاده کرد؟

به شکل‌های زیر توجه کنید و در هر مورد حدس بزنید که آیا خط داده شده در نقطه تقاطع با منحنی، مماس بر آن منحنی محسوب

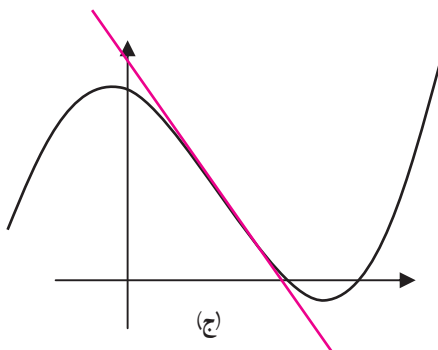
می‌شود یا نه، و کدام یک از دو ویژگی بالا را دارد.



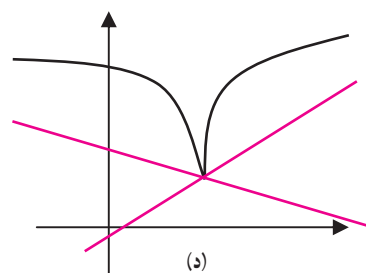
(الف)



(ب)



(ج)



(د)



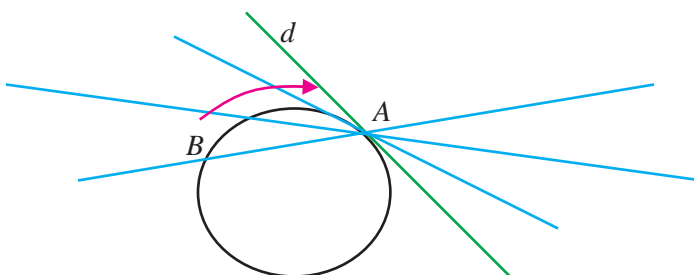
در تجربه صفحه‌ی قبل ممکن است حدس‌هایی درست یا نادرست زده باشید. اما این تجربه نشان می‌دهد که شرایط مماس بودن یک خط بر یک منحنی دلخواه با شرایط مماس بودن یک خط بر دایره فرق می‌کند، زیرا دایره منحنی خاصی است و لزومی ندارد برای یک منحنی دلخواه شرایط مماس بودن خط بر منحنی مانند حالت دایره باشد. باید مفهوم خط مماس بر دایره را به شکل دیگری به دست آوریم که برای یک منحنی دلخواه هم قابل قبول باشد.



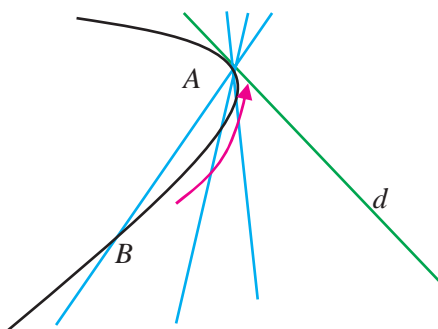
فعالیت ۱



۱- نقطه‌ی A را روی دایره‌ی زیر به طور ثابت در نظر بگیرید. نقطه‌ی دیگری روی دایره مانند B در نظر بگیرید و خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی B را روی دایره به نقطه‌ی A نزدیک می‌کنیم. خط AB به چه خطی نزدیک می‌شود؟



۲- در منحنی دلخواه زیر، نقطه‌ای مانند A به طور ثابت در نظر بگیرید. نقطه‌ی دیگری روی منحنی مانند B در نظر بگیرید و خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه B را روی منحنی به نقطه A نزدیک می‌کنیم. خط AB به چه خطی نزدیک می‌شود؟



فعالیت بالا نشان می‌دهد که برای یافتن خط مماس بر یک منحنی در نقطه‌ای مانند A باید نقطه‌ای مانند B روی منحنی در نزدیکی A در نظر بگیریم و با رسم خط AB ، نقطه‌ی B را به نقطه‌ی A نزدیک کنیم و ببینیم که آیا این خط‌ها به خط خاصی نزدیک می‌شوند. این عمل دقیقاً یک عمل حدگیری است.

از خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه، یک نقطه از خط مشخص است (همان نقطه‌ای که خط در آن نقطه بر منحنی مماس



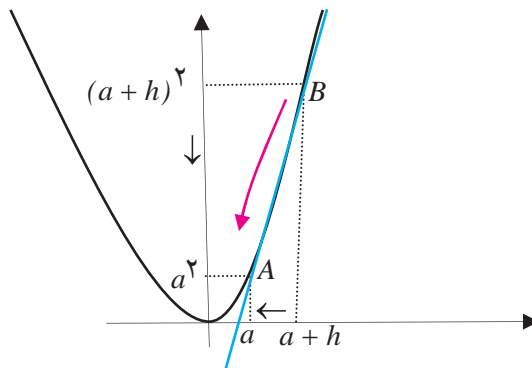
می‌شود.)، پس برای مشخص کردن این خط، کافی است شیب آن را مشخص کنیم و شیب با یک عمل حدگیری به دست می‌آید.



فعالیت ۲

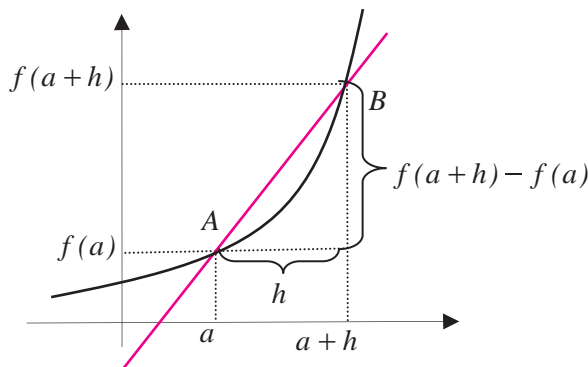


روی نمودار تابع $f(x) = x^2$ نقطه‌ی ثابت $A(a, a^2)$ را در نظر بگیرید. برای یک عدد حقیقی کوچک و ناصفر h (مثبت یا منفی) نقطه‌ی $B(a+h, (a+h)^2)$ را روی نمودار تابع در نزدیکی A در نظر بگیرید.



- ۱- شیب خط AB را حساب کنید که تابعی از h است.
- ۲- با نزدیک شدن h به صفر نقطه‌ی B به چه نقطه‌ای نزدیک می‌شود؟
- ۳- با نزدیک شدن h به صفر شیب خط AB به چه مقداری نزدیک می‌شود؟
- ۴- شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2$ در نقطه‌ی $A(a, a^2)$ چقدر است؟

محاسبات فعالیت بالا را در مورد هر تابع دیگری هم می‌توانیم انجام دهیم. تابع دلخواه $f(x)$ و نقطه‌ی ثابت $A(a, f(a))$ را روی نمودار آن در نظر می‌گیریم. برای یک عدد حقیقی کوچک و ناصفر h (مثبت یا منفی) نقطه‌ی $B(a+h, f(a+h))$ را روی نمودار تابع در نزدیکی A در نظر می‌گیریم.





شکل صفحه‌ی قبل نشان می‌دهد که شیب خط AB برابر است با $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. اگر با نزدیک شدن h به صفر این کسر به عدد خاصی نزدیک شود، این عدد همان شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ی $A(a, f(a))$ خواهد بود به عبارت دیگر:

مقدار بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در a می‌نامند و با $f'(a)$ نشان می‌دهند.

$$\text{شیب خط مماس} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده است، در این صورت حد زیر را (در صورت وجود)، مشتق تابع f در a می‌نامند و با $f'(a)$ نشان می‌دهند.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

اگر حد بالا موجود نباشد، گوییم f در a مشتق پذیر نیست.

مثال

۱: مشتق تابع $f(x) = x^3$ را در نقطه دلخواه a حساب می‌کنیم و به کمک آن معادله خط مماس بر نمودار تابع را در نقطه‌ی $A(1, 1)$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2 \end{aligned}$$

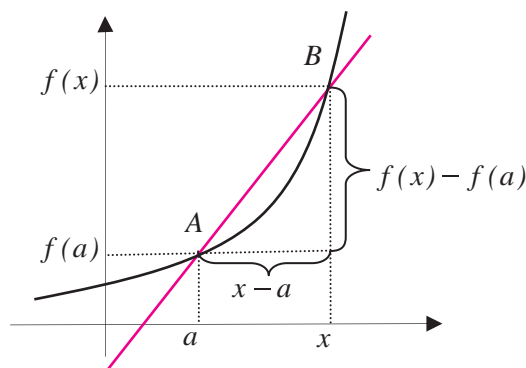
از آنجا که $f'(1) = 3$ ، شیب خط مماس بر نمودار این تابع در نقطه‌ی $A(1, 1)$ برابر ۳ می‌باشد و معادله خط مماس عبارت است از: $y - 1 = 3(x - 1)$.

۲: مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقطه‌ی دلخواه $a \neq 0$ حساب می‌کنیم و به کمک آن معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع را در نقطه‌ی $A(2, \frac{1}{2})$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{a(a+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2} \end{aligned}$$



از آنجا که $f'(2) = \frac{-1}{4}$ ، شیب خط مماس بر نمودار این تابع در نقطه‌ی $A(2, \frac{1}{4})$ برابر $\frac{-1}{4}$ می‌باشد و معادله‌ی خط مماس عبارت است از: $y - \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}(x - 2)$.
برای محاسبه‌ی مشتق یک تابع گاهی مناسب‌تر است نقطه‌ی B نزدیک نقطه‌ی $A(a, f(a))$ را به صورت $B(x, f(x))$ در نظر بگیریم.



در این حالت شیب خط AB برابر است با $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ و برای محاسبه مشتق f در a باید حد این کسر را در $x = a$ بیابیم، یعنی

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

۳: مشتق تابع $y(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه‌ی $a < 0$ حساب می‌کنیم.

$$y'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

تابعی که به هر نقطه a از دامنه تابع f که در a مشتق پذیر است، مشتق f در a را نظیر می‌سازد، تابع مشتق f می‌نامند و با f' نشان می‌دهند.



مثال

۴: اگر $f(x) = x^2$ آنگاه تابع مشتق آن به صورت $f'(x) = 2x$ است.

برخی توابع در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر نیستند، در این صورت دامنه تابع مشتق فقط از نقاطی تشکیل



می‌شود که تابع در آن نقاط مشتق پذیر باشد.

۵: تابع $y(x) = \sqrt{x}$ در همه‌ی نقاط بازه $(0, \infty)$ مشتق پذیر است و تابع مشتق آن $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ است.

تمرین در کلاس



مشتق پذیری و مشتق تابع $f(x) = |x|$ را در همه نقاط بررسی کنید و تابع مشتق آن را به دست آورید.

برای محاسبه مشتق یک تابع f در نقطه‌ای مانند a باید حد زیر را (در صورت وجود) حساب کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

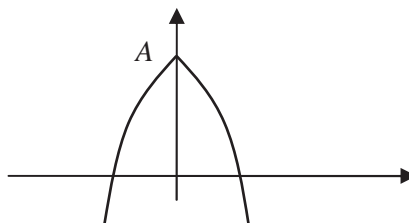
در برخی موارد ممکن است حد بالا موجود نباشد ولی حدهای چپ و راست آن موجود باشند.

فعالیت ۳

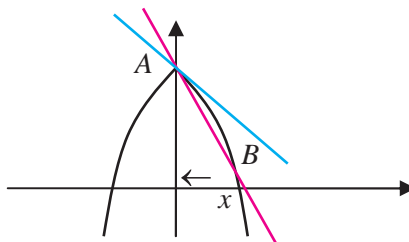


تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 4 & x \leq 0 \\ -(x+1)^2 + 4 & 0 < x \end{cases}$$

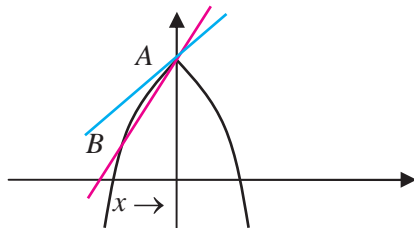


۱- نقطه‌ی $A(0, 3)$ ، و نقطه‌ی $B(x, f(x))$ را سمت راست A در نظر بگیرید و حد شیب خط AB را وقتی B به A نزدیک می‌شود حساب کنید.





۲- نقطه‌ی B را سمت چپ A در نظر بگیرید و حد شیب خط AB را وقتی B به A نزدیک می‌شود حساب کنید.



۳- آیا این تابع در $x = 0$ مشتق پذیر است؟ خط‌هایی که از نقطه‌ی A می‌گذرند و شیب آن‌ها اعدادی است که در بندهای قبل به دست آورده‌اید چه وضعیتی نسبت به نمودار تابع دارند؟

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، حد راست $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در $x = a$ را (در صورت وجود) مشتق راست f در a می‌نامند و یا $f'_+(a)$ نشان می‌دهند.

به‌طور مشابه، اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، حد چپ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در $x = a$ را (در صورت وجود) مشتق چپ f در a می‌نامند و با $f'_-(a)$ نشان می‌دهند.

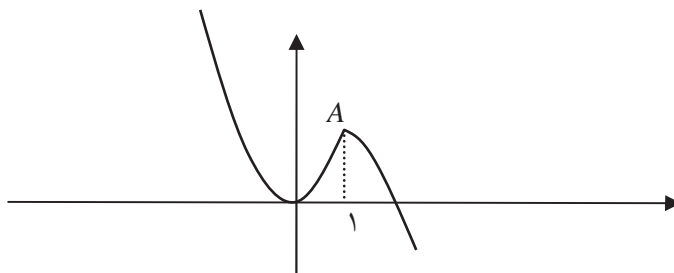
مشتق‌پذیری یک تابع در نقطه‌ای مانند a معادل با آن است که مشتق‌های چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و با هم مساویند.



مثال

نمودار تابع $k(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \leq 1 \\ -x^2 + 3 & 1 < x \end{cases}$ در زیر رسم شده است. پیوستگی و مشتق‌پذیری آن را در $x = 1$

بررسی می‌کنیم.





از روی شکل می توان حدس زد که تابع در $x=1$ باید پیوسته باشد. برای بررسی درستی این حدس، حد تابع را در $x=1$ بررسی می کنیم. از آنجا که وضعیت تابع در سمت چپ و راست $x=1$ متفاوت است حدهای چپ و راست تابع را در $x=1$ جداگانه حساب می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -x^2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 = 2$$

دیده می شود که حد تابع $k(x)$ در $x=1$ موجود است و برابر $k(1)$ است، پس تابع $k(x)$ در $x=1$ پیوسته است. برای بررسی مشتق پذیری از روی شکل می توان حدس زد نمودار تابع در سمت چپ و راست نقطه $A(1,2)$ متفاوت است و مماس های متفاوت دارد. بنابراین مشتق های چپ و راست تابع $k(x)$ را جداگانه محاسبه می کنیم.

$$k'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{k(x) - k(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -(x + 1) = -2$$

$$k'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{k(x) - k(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x + 1) = 4$$

دیده می شود که مشتق های چپ و راست تابع $k(x)$ در $x=1$ موجودند ولی مساوی نیستند. بنابراین این تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست و خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه موجود نیست، اگرچه خط های مماس چپ و راست در این نقطه موجودند.

تمرین در کلاس



۱- مشتق تابع $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را در نقطه -1 حساب کنید و به کمک آن، معادله خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطه $A(-1, 0)$ بنویسید. تابع مشتق g را بیابید و دامنه آن را تعیین کنید.

۲- تابعی بسازید که در $x=2$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق های چپ و راست متفاوت داشته باشد.

۳- فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد و به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x)$ را به صورت $g(x) = f(x - b)$ تعریف می کنیم.

الف) از طریق نموداری نشان دهید که اگر خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه a وجود داشته باشد، آنگاه خط مماس بر نمودار f در نقطه $a - b$ موجود است و این دو خط با هم موازیند.

ب) با محاسبه جبری نشان دهید که اگر g در نقطه a مشتق پذیر باشد آنگاه f در نقطه $a - b$ مشتق پذیر است و $g'(a) = f'(a - b)$.



ج) با محاسبه جبری نشان دهید که اگر $f(x)$ در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر باشد، آنگاه $g(x)$ نیز در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر است و برای هر مقدار x (در دامنه g) داریم: $g'(x) = f'(x-b)$.



مثال

۱: مشتق تابع $y(x) = \frac{1}{x+b}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \frac{1}{x}$ داریم $y(x) = f(x+b)$ بنابراین

$$y'(x) = f'(x+b) = -\frac{1}{(x+b)^2}$$

۲: مشتق تابع $y(x) = \sqrt{x-b}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \sqrt{x}$ داریم $y(x) = f(x-b)$. محاسبه نشان می‌دهد $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ بنابراین

$$y'(x) = f'(x-b) = \frac{1}{2\sqrt{x-b}}$$

شاید این سؤال برای شما مطرح شده باشد که مشتق پذیری و پیوستگی چه فرقی با هم دارند. آیا هر تابع پیوسته‌ای مشتق پذیر است؟ آیا هر تابع مشتق پذیری پیوسته است؟

پیوستگی به معنای مشتق پذیری نیست. در مثال‌ها دیدید که یک تابع ممکن است در نقطه‌ای پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق پذیر نباشد.

اما از مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه می‌توان پیوستگی آن تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت. در فصل قبل دیدیم که پیوستگی یک تابع مانند f در نقطه‌ای مانند a به معنای آن است که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. این تساوی معادل با آن است که $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و ما می‌توانیم درستی این تساوی را از شرط مشتق پذیری f در a به دست آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

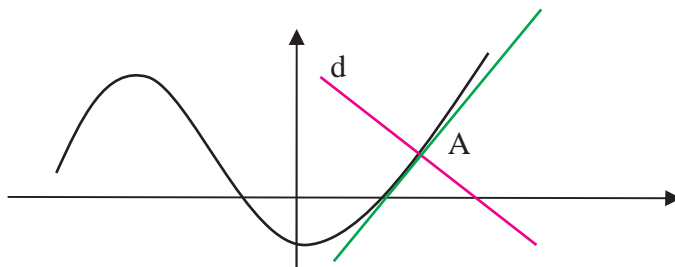
$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

با این استدلال می‌توانیم قضیه‌ی صفحه‌ی بعد را به دست آوریم.



اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق پذیر باشد در آن نقطه پیوسته نیز خواهد بود.

فرض کنید خطی مانند d نمودار تابعی مانند f را در نقطه‌ای مانند $A(a, f(a))$ قطع کند.



گوییم این خط بر نمودار تابع در نقطه‌ی A عمود است، هرگاه d بر خط مماس بر نمودار تابع در A عمود باشد. اگر شیب خط d برابر m باشد، شرط عمود بودن معادل با آن است که $m = -\frac{1}{f'(a)}$.



مثال

معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ که در نقطه‌ی $A(2, \frac{1}{4})$ این منحنی را قطع می‌کند به دست می‌آوریم.

شیب این خط $-\frac{1}{f'(2)}$ است. از آنجا که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ داریم $f'(2) = -\frac{1}{4}$ ، پس شیب خط قائم برابر است با ۴. نقطه A روی این خط است، بنابراین معادله این خط عبارت است از:

$$y - \frac{1}{4} = 4(x - 2)$$


مسائل



۱- مشتق توابع زیر را در یک نقطه دلخواه a از دامنه‌ی آن‌ها تعیین کنید.

الف) $f(x) = c$ ب) $g(x) = 3x + 5$ ج) $x(t) = t^4$

د) $y(u) = \frac{u}{1+u}$ ه) $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

۲- معادله‌ی خط مماس و خط عمود بر نمودار توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده به دست آورید.

الف) $x = 1$ ، $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ب) $x = -1$ ، $y(x) = \sqrt{4-x^2}$



۳- نمودار توابع زیر را رسم کنید و حدس بزنید این توابع در چه نقاطی مشتق پذیر نیستند و در این نقاط مشتق‌های چپ و راست را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$y(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & 0 < x \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \text{الف) } y(x) = 2|x+1|$$

$$y(x) = -|x| + |x-1| \quad \text{(د)} \quad \text{ج) } y(x) = |1-x^2|$$

۴- نمودار تابع $y(x) = \sqrt{x}$ را رسم کنید. اگر خط $y=2x$ را به موازات خود در صفحه بالا و پایین ببریم آیا جایی پیدا می‌شود که خط جا به جا شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می‌افتد؟

۵- فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر در نقطه‌ای مانند a باشد. به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x)$ را به صورت $g(x) = f(x) + b$ تعریف می‌کنیم. از طریق نموداری و وجود خط مماس بر نمودار f در نقطه به طول a نشان دهید g نیز در a مشتق پذیر است و $g'(a) = f'(a)$. از طریق حدگیری و محاسبه نیز درستی این تساوی را به دست آورید.

۶- از مبدأ به نقاط مختلف نمودار تابع $f(x) = x^2 + 1$ خط رسم می‌کنیم. آیا نقطه یا نقاطی یافت می‌شوند که خط رسم شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می‌افتد؟ درستی محاسبات خود را با رسم نمودار این تابع نشان دهید.

۷- فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد و a عددی حقیقی باشد، با محاسبه و حدگیری نشان دهید تابع $g(x) = f(ax)$ نیز مشتق پذیر است و $g'(x) = af'(ax)$.

روش‌های محاسبه‌ی مشتق توابع

در مثال‌ها و تمرین‌ها صفحات قبل مشتق برخی از توابع را حساب کرده‌ایم. برای مثال مشتق برخی توابع خاص را در زیر محاسبه می‌کنیم.

۱- اگر $f(x) = c$ تابع ثابت باشد، مشتق آن در هر نقطه صفر است، یعنی برای هر مقداری از x ، $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

۲- اگر $f(x) = x^n$ که n عددی طبیعی است، مشتق آن برای هر مقدار x به صورت $f'(x) = nx^{n-1}$ است.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$



$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) = a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} = na^{n-1}$$

۳- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ در مثال‌های قبل دیدیم که برای هر مقدار مثبت x داریم $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.



فعالیت ۴



۱- مشتق دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ را در یک نقطه دلخواه مانند a می‌شناسید. مشتق تابع $f + g$ را در همین نقطه a حساب کنید.

۲- چه ارتباطی بین $(f + g)'(a)$ و $f'(a)$ و $g'(a)$ مشاهده می‌کنید.

۳- آیا این ارتباط برای هر دو تابع دیگری هم برقرار است؟

فرض کنید دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق پذیر باشند. می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا تابع $f + g$ نیز در a مشتق پذیر است.

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(a+h) - (f + g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) + g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

محاسبه‌ی بالا نشان می‌دهد که $f + g$ نیز در a مشتق پذیر است و مشتق آن مجموع مشتق‌های f و g در a است. بنابراین قضیه زیر برقرار است.

اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق پذیر باشند، تابع $f + g$ نیز در a مشتق پذیر است و

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$



مثال

۱: مشتق تابع $y = x^3 + \sqrt{x}$ را در یک عدد مثبت x حساب می‌کنیم.

$$(x^3 + \sqrt{x})' = (x^3)' + (\sqrt{x})' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۲: مشتق تابع $y = \frac{x^5 + 1}{x}$ را در یک عدد ناصفر x حساب می‌کنیم.

$$\left(\frac{x^5 + 1}{x}\right)' = \left(x^4 + \frac{1}{x}\right)' = (x^4)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 4x^3 - \frac{1}{x^2}$$

تمرین در کلاس



۱- مشتق تابع $y = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ را در یک عدد مثبت a حساب کنید.

۲- اگر f تابع مشتق‌پذیری در نقطه‌ای a باشد و c عدد دلخواهی باشد، با محاسبه نشان دهید تابع cf نیز در نقطه‌ای a مشتق‌پذیر است و $(cf)'(a) = cf'(a)$.

۳- اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیر باشند، نشان دهید تابع $f-g$ نیز در a مشتق‌پذیر است و $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$.

۴- برای سه تابع f و g و k که همگی در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیرند، نشان دهید $f+g+k$ نیز در a مشتق‌پذیر است و $(f+g+k)'(a) = f'(a) + g'(a) + k'(a)$. آیا این تساوی برای جمع تعداد بیشتری از توابع نیز درست است؟

دیدیم که اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیر باشند، تابع $f+g$ نیز در a مشتق‌پذیر است. یک سؤال مهم آن است که آیا fg نیز در a مشتق‌پذیر است و مشتق آن چه خواهد بود؟ شاید اولین حدس این باشد که fg در a مشتق‌پذیر است و $(fg)'(a) = f'(a)g'(a)$. اما نادرستی این تساوی را در یک مثال می‌توانید مشاهده کنید. مثلاً برای دو تابع $f(x) = 1$ ، $g(x) = x$ نادرستی آن تساوی را بررسی کنید. برای یافتن مشتق تابع fg در a بهتر است مستقیماً آن را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))}{x - a} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} g(x) + f(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
 &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)
 \end{aligned}$$

این محاسبه نشان می‌دهد که قضیه‌ی زیر برقرار است.

اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیر باشند، تابع fg نیز در a مشتق‌پذیر است و

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

مثال

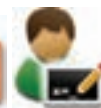
۱: مشتق تابع $x^3\sqrt{x}$ را در یک عدد مثبت x حساب می‌کنیم.

$$(x^3\sqrt{x})' = (x^3)' \sqrt{x} + x^3 (\sqrt{x})' = 3x^2\sqrt{x} + x^3 \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۲: مشتق تابع $\frac{1}{x^2}$ را در یک عدد ناصفر x حساب می‌کنیم.

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-2}{x^3}$$

تمرین در کلاس



۱- اگر $f(x)$ تابع مشتق‌پذیری باشد، با استفاده از فرمول مشتق حاصلضرب دو تابع نشان دهید

$$(f(x))^2)' = 2f(x)f'(x) \text{ . در حالت کلی تر (با استقرا) برای یک عدد طبیعی } n \text{ نشان دهید:}$$

$$(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1}f'(x)$$

۲- اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع مشتق‌پذیری باشند و بتوانیم تابع $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ را تشکیل دهیم داریم

$$k(x)g(x) = f(x) \text{ . با فرض آن که می‌دانیم } k(x) \text{ تابعی مشتق‌پذیر است، با استفاده از فرمول مشتق حاصلضرب}$$

دو تابع نشان دهید:

$$k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$



مثال

۱: مشتق تابع $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ را در یک مقدار دلخواه $x \neq 1$ حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x-1) - (x-1)'x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

۲: تابع مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ را حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{(x)'\sqrt{x+1} - (\sqrt{x+1})'x}{\sqrt{x+1}^2} = \frac{\sqrt{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}x}{x+1} = \frac{2(x+1) - x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

مسائل

۱- مشتق توابع زیر را در یک نقطه دلخواه حساب کنید.

(الف) $y = x^4 - \frac{1}{x^4} - \sqrt{3}$ (ب) $y = (x^3 - x^2 - 1)(x - \sqrt{x} + 5)$

(ج) $y = (2x+1)(4-3x)(x^2+x+5)$ (د) $y = \frac{2}{x^3-1}$ (ه) $y = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$

۲- نقاطی از نمودار تابع $y(x) = x^3 - 2x - 6$ را معین کنید که مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد. در چند نقطه این اتفاق می‌افتد؟

۳- نمودار تابع $y(x) = -4x^2 + 16x + 1$ را رسم کنید. به کمک مشتق تابع معین کنید در چه نقاطی از این نمودار، مماس بر منحنی موازی محور x ها است. در چند نقطه این اتفاق می‌افتد؟ این نقطه چه ویژگی خاصی دارد؟

۴- نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنید. اگر خط دلخواهی را که موازی محور y ها نیست به موازات خود در صفحه بالا و پایین ببریم آیا جایی پیدا می‌شود که خط جا به جا شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در چند نقطه این اتفاق می‌افتد؟ جواب را از طریق هندسی حدس بزنید و حدس خود را با محاسبات جبری ثابت کنید. همین مسئله را برای تابع $y(x) = \sqrt{|x|}$ تکرار کنید.

۵- نقطه‌ای در صفحه بیابید که از آن نقطه دو خط مماس بر سهمی $y = x^2$ بتوان رسم کرد و این خط‌ها بر هم عمود باشند. این مسئله چند جواب دارد؟ مجموعه جواب‌های این مسئله را ترسیم کنید.



۶- اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه a تعریف شده باشد و ناصفر باشد و f در a مشتق پذیر باشد و

$$f'(a) \neq 0, \text{ با استفاده از تعریف نشان دهید که } \frac{1}{f} \text{ نیز در } a \text{ مشتق پذیر است و } \left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$$

۷- برای تابع $f(x) = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$ روی دامنه $(0, \infty)$ داریم $f(x)^k = x$. با فرض آن که می دانیم $f(x)$ تابعی

$$\text{مشتق پذیر است، با محاسبه ی مشتق طرفین ثابت کنید } f'(x) = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1}$$

۸- اگر r عددی گویای مثبتی باشد به کمک مسئله ی قبل نشان دهید تابع $y(x) = x^r$ که روی اعداد مثبت

تعریف شده است، مشتق پذیر است و $y'(x) = rx^{r-1}$. سپس درستی این رابطه را برای اعداد گویای منفی هم به دست آورید.

۹- مشتق تابع $y = 6\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x}$ را حساب کنید.

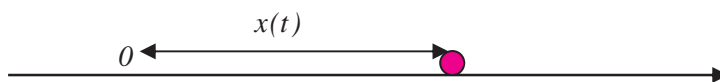
آهنگ تغییرات



فعالیت ۵



متحرکی روی محور x ها طبق ضابطه ی $x(t) = t^2 - t$ حرکت می کند. یعنی متحرک در لحظه t در مکان $x(t)$ قرار دارد. $x(t)$ را تابع حرکت متحرک می نامند.



۱- لحظه t_0 را به طور ثابت در نظر بگیرید. سرعت متوسط متحرک بین دو زمان $t_0 + h$ و t_0 (عدد h ناصفر و کوچک) را بنویسید.

۲- با نزدیک کردن h به صفر مقدار بالا به چه عددی نزدیک می شود؟

۳- عدد بالا با مشتق تابع $x(t)$ چه رابطه ای دارد؟

۴- سرعت این متحرک در هر لحظه با مشتق تابع $x(t)$ چه رابطه ای دارد؟

اگر متحرکی روی یک محور طبق تابع حرکت $x(t)$ حرکت کند، سرعت متوسط آن بین دو لحظه $t_0 + h$ و t_0 برابر است با

$$\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$



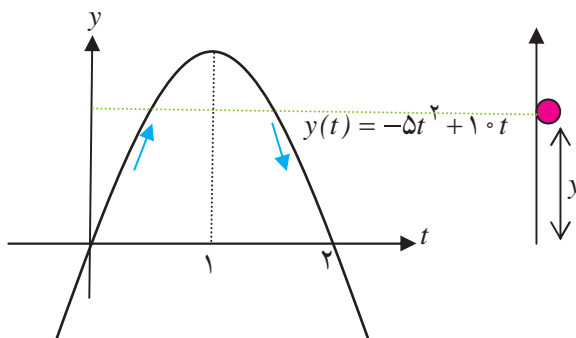
با نزدیک کردن h به صفر، اگر کسر بالا به عددی نزدیک شود، این عدد همان سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه‌ی t است. از طرف دیگر، این عدد همان حد کسر بالا در $h=0$ است که قبلاً آن را مشتق $x(t)$ در t نامیده‌ایم. بنابراین:

اگر $x(t)$ تابع حرکت متحرکی روی محور باشد، سرعت آن در هر لحظه t برابر است با $x'(t)$.



مثال

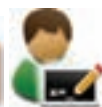
مثال: اگر سیبی را در راستای عمودی به بالا پرتاب کنیم، ابتدا رو به بالا حرکت می‌کند و سپس به زمین باز می‌گردد. تابع حرکت این سیب می‌تواند به شکل $y(t) = -5t^2 + 10t$ باشد. t را بر حسب ثانیه و $y(t)$ را بر حسب متر در نظر بگیرید.



نمودار $y(t)$ نشان می‌دهد که سیب در لحظه‌های صفر و ۲ در زمین قرار دارد و بین این دو لحظه از زمین به طرف بالا رفته و پس از مدتی به زمین برگشته است. دامنه اعتبار تابع $y(t)$ فاصله $[0, 2]$ است، زیرا خارج از این فاصله حرکت سیب با این تابع انجام نمی‌شود.

مشتق $y(t)$ در یک لحظه دلخواه به صورت $y'(t) = -10t + 10$ است. از آنجا که $y'(0) = 10$ ، سرعت سیب در شروع حرکت ۱۰ متر بر ثانیه است. با افزایش t مقدار $y'(t)$ کم می‌شود تا در لحظه $t = 1$ صفر می‌شود. یعنی سیب در این لحظه یک ایست‌آنی دارد. این همان لحظه‌ای است که سیب به بالاترین ارتفاع خود رسیده است. برای $t < 1$ ، $y'(t)$ منفی می‌شود که به معنای آن است که سیب رو به پایین در حال حرکت است. از آنجا که $y'(2) = -10$ ، سرعت سیب در موقع برخورد با زمین همان ۱۰ متر بر ثانیه است ولی جهت حرکت رو به پایین است.

تمرین در کلاس

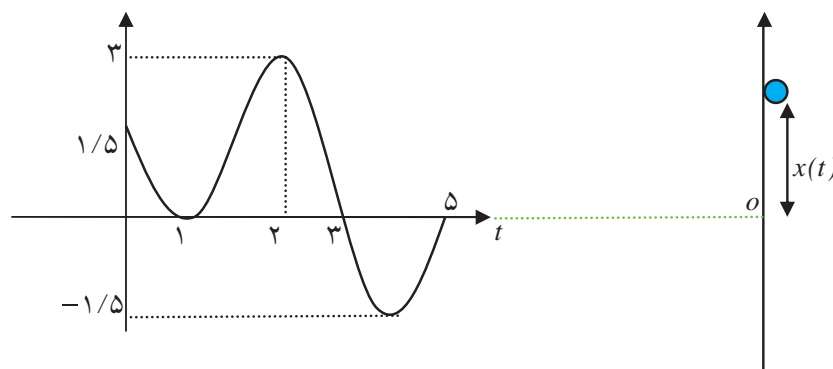


۱- تابع حرکت متحرکی روی محور x ها به صورت $x(t) = 1$ است. شیوه‌ی حرکت متحرک را توصیف کنید. سرعت حرکت متحرک در هر لحظه چقدر است؟ مشتق $x(t)$ در هر لحظه چقدر است؟

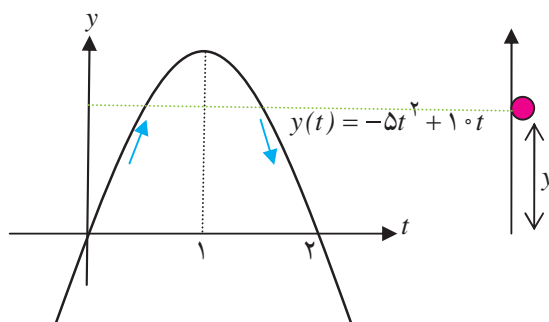


- ۲- تابع حرکت متحرکی روی محور x ها به صورت $x(t) = 2t + 1$ است. شیوه‌ی حرکت متحرک را توصیف کنید. سرعت حرکت متحرک در هر لحظه چقدر است؟ مشتق $x(t)$ در هر لحظه چقدر است؟
- ۳- تابع حرکت متحرکی روی محور x ها در فاصله زمانی $[0, 4]$ به صورت $x(t) = -t^2 + 4t + 1$ است. با رسم نمودار این تابع، شیوه‌ی حرکت متحرک را توصیف کنید. با استفاده از مشتق‌گیری تعیین کنید سرعت متحرک در هر لحظه چقدر است. متحرک حداکثر چقدر از مبدأ فاصله می‌گیرد؟ سرعت متحرک در نقطه‌ای که حداکثر فاصله از مبدأ را دارد چقدر است؟
- ۴- تابع حرکت، متحرکی $x(t)$ است. واحد زمان را ثانیه و واحد مکان را متر در نظر بگیرید. نمودار $x(t)$ در شکل زیر داده شده است. چگونگی حرکت این متحرک را از لحاظ مدت زمان حرکت و مکان‌هایی که رفته است و سرعت آن توصیف کنید.

- (الف) از چه نقطه‌ای حرکت شروع شده است و در چه نقطه‌ای حرکت پایان یافته است؟
 (ب) در چه نقاطی سرعت صفر شده است و جهت حرکت تغییر کرده است؟
 (ج) چند بار از مبدأ رد شده است و در چه زمان‌هایی رد شده است؟
 (د) حداکثر فاصله آن از مبدأ در چه زمانی رخ داده است و این فاصله چقدر بوده است؟



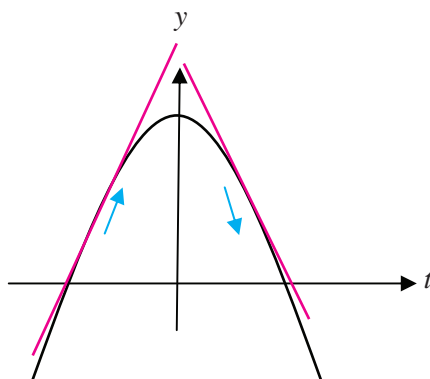
در یکی از مثال‌ها دیدیم که اگر سیبی را در راستای عمودی به بالا پرتاب کنیم، ابتدا رو به بالا حرکت می‌کند و سپس به زمین باز می‌گردد. تابع حرکت این سیب را به صورت $y(t) = -5t^2 + 10t$ در نظر گرفته بودیم که t بر حسب ثانیه و $y(t)$ بر حسب متر بوده است.





- ۱- در دو لحظه $t_1 = \frac{1}{4}$ و $t_2 = \frac{3}{4}$ سیب در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟
- ۲- سرعت سیب را در این دو لحظه حساب کنید. چرا علامت سرعت در این دو لحظه متفاوت است؟
- ۳- علامت سرعت با افزایش یا کاهش ارتفاع سیب چه رابطه‌ای دارد؟
- ۴- اندازه‌ی سرعت در لحظه $t=1$ از بقیه لحظات کمتر است و صفر است و اندازه‌ی سرعت در لحظات صفر و ۲ از بقیه لحظات بیشتر است. اندازه‌ی سرعت با چگونگی افزایش یا کاهش ارتفاع سیب چه رابطه‌ای دارد؟

در زیر نمودار تابع $y(x) = 4 - x^2$ و چند خط مماس بر آن رسم شده است.



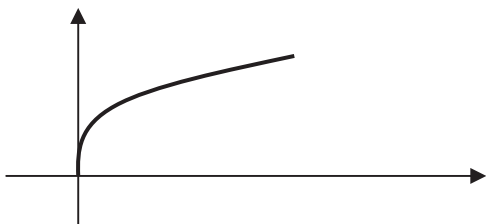
مشتق این تابع به صورت $y'(x) = -2x$ است. در x ‌های منفی مشتق تابع، مثبت است که یعنی شیب خط مماس مثبت است. این نکته نشان دهنده آن است که در این نقاط، تابع در حال افزایش است و صعودی است. البته هر چه از نقطه به طول صفر نزدیک می‌شویم اندازه‌ی مشتق کم می‌شود که به معنای آن است که میزان افزایش یا صعود تابع کم می‌شود. در x ‌های مثبت مشتق تابع، منفی است که یعنی شیب خط مماس منفی است. این نکته نشان دهنده آن است که در این نقاط، تابع در حال کاهش است و نزولی است. هر چه در اعداد مثبت مقدارهای x بزرگتری انتخاب کنیم مشتق تابع هم چنان منفی است ولی از لحاظ اندازه بزرگتر می‌شود. این به معنای آن است که میزان کاهش و نزول تابع مرتباً در حال افزایش است.

- مثبت بودن مشتق یک تابع در یک بازه به معنای آن است که تابع در آن بازه صعودی است و اندازه‌ی مشتق در نقاط آن بازه نشان می‌دهد شدت صعود تابع در آن نقاط چقدر است.**
- منفی بودن مشتق یک تابع در یک بازه به معنای آن است که تابع در آن بازه نزولی است و اندازه‌ی مشتق در نقاط آن بازه نشان می‌دهد شدت نزول تابع در آن نقاط چقدر است.**



مثال

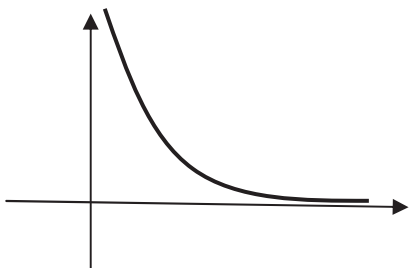
۱: برای تابع $y = \sqrt{x}$ که دامنه‌ی آن بازه $[0, \infty)$ است



داریم $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. مقدار مشتق مثبت است، پس تابع همواره در حال افزایش است ولی با افزایش x مقدار مشتق کم می‌شود و این به معنای آن است که شدت افزایش تابع در حال کم شدن است.

نمودار بالا نیز این مطلب را به خوبی نشان می‌دهد که اگرچه تابع در حال افزایش است اما شدت افزایش در حال کاهش است.

۲: تابع $y = \frac{1}{x}$ را روی بازه $(0, \infty)$ در نظر می‌گیریم. مشتق این



تابع به صورت $y' = -\frac{1}{x^2}$ است و مقدار آن همواره منفی است. پس این تابع همواره نزولی است. برای x های نزدیک صفر مقدار مشتق از لحاظ قدر مطلق بسیار بزرگ است، یعنی برای x های نزدیک صفر تابع به شدت در حال نزول است. ولی برای x های بزرگ مقدار مشتق منفی و بسیار کوچک می‌شود، یعنی تابع در حال نزول است ولی بسیار آهسته نزول می‌کند. نمودار تابع این حقیقت را به خوبی نشان می‌دهد.

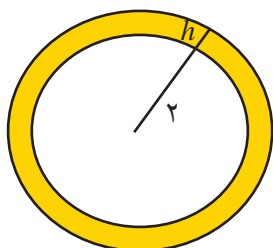
فعالیت ۷



مساحت یک دایره تابعی از شعاع آن است. دایره به شعاع r دارای مساحت $S(r) = \pi r^2$ است.

۱- اگر دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر داشته باشیم و شعاع آن را h سانتی‌متر

افزایش دهیم، مساحت آن چقدر افزایش می‌یابد (بر حسب h به دست می‌آید)؟



۲- نسبت افزایش مساحت دایره به افزایش شعاع چقدر است؟ این مقدار را آهنگ تغییرات متوسط مساحت

دایره بین دو شعاع ۲ و $2+h$ می‌نامند.



- ۳- آهنگ تغییرات متوسط مساحت دایره بین دو شعاع ۲ و $2+h$ وقتی h را به صفر نزدیک می‌کنیم به چه عددی نزدیک می‌شود؟ این عدد را آهنگ تغییرات مساحت دایره به شعاع آن، در شعاع ۲ سانتی‌متر می‌نامند.
- ۴- آهنگ تغییرات مساحت دایره به شعاع آن، با مشتق $S(r)$ چه رابطه‌ای دارد؟

اگر کمیتی مانند A تابعی از کمیت دیگری مانند r باشد و این تابع را به صورت $A(r)$ نشان دهیم، یک سؤال مهم این است که تغییرات در مقدار r چه مقدار تغییرات در A ایجاد می‌کند؟ نسبت افزایش مقدار $A(r)$ به افزایش مقدار r چقدر است؟ اگر مقدار کمیت r برابر r_0 باشد و آن را h واحد افزایش دهیم، مقدار A از $A(r_0)$ به $A(r_0+h)$ تغییر می‌کند و نسبت افزایش مقدار A به افزایش مقدار r برابر است با:

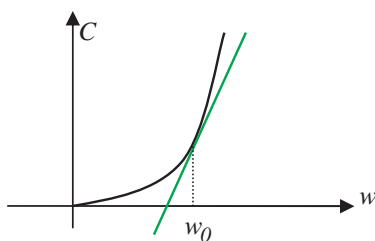
$$\frac{A(r_0+h) - A(r_0)}{h}$$

این کسر را آهنگ تغییرات متوسط کمیت A به کمیت r در دو مقدار r_0 و r_0+h می‌نامند. حد این کسر در $h=0$ را آهنگ تغییرات کمیت A به کمیت r در $r=r_0$ می‌نامند که همان مشتق تابع $A(r)$ در r_0 است.



مثال

- ۱: مساحت هر دایره‌ای تابعی از محیط آن است. اگر مساحت را با S و محیط را با P نشان دهیم داریم $S(P) = \frac{1}{4\pi} P^2$. آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به محیط آن برای دایره‌ای به محیط 3π برابر است با $S'(3\pi) = \frac{3}{2}$. از آنجا که $S'(P) = \frac{1}{2\pi} P$ ، خواهیم داشت $S'(3\pi) = \frac{3}{2}$.
- ۲: هزینه‌ی ساخت هر برجی تابعی از ارتفاع آن برج است. هزینه را با C و ارتفاع را با w نشان می‌دهیم و فرض کنید تابع $C(w)$ نموداری به شکل زیر داشته باشد.



آهنگ تغییرات C نسبت به w در ارتفاع w_0 همان شیب خط مماس بر نمودار تابع $C(w)$ در نقطه به طول w_0 است. اندازه این شیب نشان می‌دهد که برای اضافه کردن یک واحد به ارتفاع برجی که ارتفاع آن w_0 است، تقریباً چقدر باید هزینه شود.

همان‌طور که دیده می‌شود برای مقدارهای کم w_0 ، شیب خط مماس کم است، یعنی هزینه بالا بردن برج از ارتفاع‌های پایین زیاد نیست. ولی با زیاد شدن w_0 شیب خط مماس زیاد می‌شود، یعنی هر چه ارتفاع برج بالاتر می‌رود هزینه اضافه کردن ارتفاع برج هم بالاتر می‌رود.



تمرین در کلاس

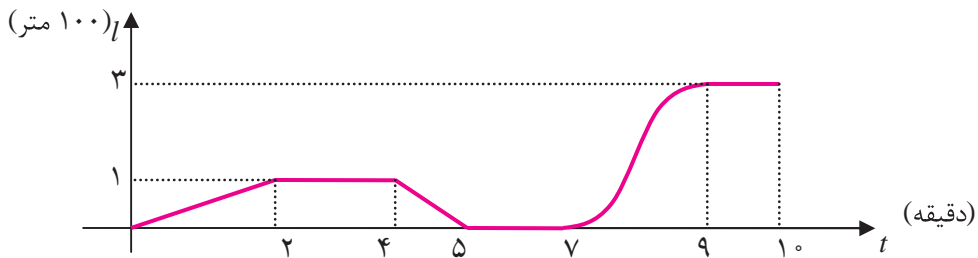


- ۱- آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۸ واحد است به دست آورید.
- ۲- آهنگ تغییرات محیط یک مربع را نسبت به مساحت آن برای مربعی که مساحت آن ۴ واحد است به دست آورید.
- ۳- آهنگ تغییرات مکان متحرکی که روی یک محور حرکت می کند نسبت به زمان چه معنایی دارد؟

مسائل



- ۱- محیط هر دایره‌ای تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره‌ای به مساحت π حساب کنید.
- ۲- بادکنکی کروی توسط تلمبه‌ای در لحظه $t=0$ شروع به باد شدن می کند. هر ثانیه ۴ سانتی متر مکعب هوا وارد بادکنک می شود. حداکثر حجمی که این بادکنک تحمل می کند $\pi 4500$ سانتی متر مکعب است.
 - (الف) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است؟
 - (ب) آهنگ تغییرات مساحت سطح بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است؟
 - (ج) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به سطح بادکنک (در هر مقداری از سطح بادکنک) چقدر است؟
 - (د) در آخرین لحظه که بادکنک می ترکد، آهنگ تغییرات سطح بادکنک نسبت به شعاع بادکنک چقدر است؟
- ۳- ماشینی که با سرعتی ثابت در حال حرکت است در لحظه $t=0$ ترمز می کند تا این که متوقف می شود. فاصله مکان ماشین از نقطه‌ای که ترمز گرفته است را با s نشان می دهیم. فرض کنید s (برحسب متر) به عنوان تابعی از t (برحسب ثانیه) به صورت $s(t) = 25t - \frac{5}{4}t^2$ باشد.
 - (الف) نمودار $s(t)$ را رسم کنید و دامنه اعتبار آن را مشخص کنید.
 - (ب) سرعت ماشین در لحظه شروع ترمز چقدر بوده است؟
 - (ج) سرعت ماشین پس از چند ثانیه صفر می شود؟
 - (د) ماشین از شروع ترمز چند متر را طی می کند تا متوقف شود؟
- ۴- مدرسه علی در انتهای خیابانی است که خانه علی در آن خیابان است. علی موقع رفتن به مدرسه ممکن است راه برود یا بدود یا برای دیدن مغازه‌ها بایستد یا به عقب برگردد یا برای به موقع رسیدن سوار ماشین شود. نمودار حرکت یکی از روزهایی که علی به مدرسه رفته است به شکل صفحه‌ی بعد است. واحد زمان را دقیقه و واحد مکان را 100 متر در نظر بگیرید.



- ۵- با توجه به نمودار بالا به سؤالات زیر پاسخ بگویید.
- الف) فاصله مدرسه علی تا خانه او چقدر است و چقدر طول کشیده است تا علی به مدرسه برسد؟
- ب) در دو دقیقه اول حرکت سرعت حرکت علی چقدر بوده است؟
- ج) در دو دقیقه دوم حرکت احتمالاً علی چکار می کرده است؟
- د) در دقایق بین ۴ و ۵ علی با چه سرعتی و در چه جهتی حرکت می کرده است؟ در حال دویدن بوده است یا راه رفتن؟
- ه) در دقایق بین ۵ و ۷ علی کجا بوده و احتمالاً چه می کرده است؟
- و) در بین دقایق ۷ و ۹ حدوداً سرعت حرکت او چقدر بوده است و احتمالاً علی چه عملی انجام داده است؟
- ز) بین دقایق ۹ و ۱۰ علی کجا بوده است و احتمالاً چه می کرده است؟

مشتق توابع مثلثاتی

اگر تابع حرکت متحرکی روی محور x ها به صورت $y(t) = \sin t$ باشد، این متحرک یک حرکت تناوبی حول مبدأ دارد و مرتباً به جلو و عقب حرکت می کند. سرعت این متحرک نیز حالت تناوبی خواهد داشت و مرتباً در حال افزایش و کاهش و تغییر جهت است. برای تشخیص چگونگی سرعت این متحرک باید مشتق تابع $\sin x$ را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2})}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = 1 \cdot \cos x = \cos x
 \end{aligned}$$

به کمک تساوی $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ می توانیم مشتق تابع $\cos x$ را نیز محاسبه کنیم.

$$(\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = (-\sin(x - \frac{\pi}{2}))' = -\cos(x - \frac{\pi}{2}) = -\sin x$$



تمرین در کلاس



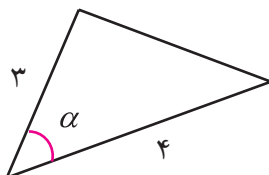
۱- نشان دهید مشتق تابع $\tan x$ در هر نقطه از دامنه اش به شکل زیر است.

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

۲- نشان دهید مشتق تابع $\cot x$ در هر نقطه از دامنه اش به شکل زیر است.

$$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

۳- مثلثی ساخته ایم که طول دو ضلع آن ۳ و ۴ است و زاویه بین آن‌ها را مقدار متغیر α قرار می‌دهیم.



الف) آهنگ تغییرات مساحت این مثلث نسبت به a را در زاویه α به دست آورید.

ب) در کدام زاویه‌ها آهنگ تغییرات منفی است و معنای آن چیست؟

ج) در کدام زاویه‌ها آهنگ تغییرات مثبت است و معنای آن چیست؟

د) در کدام زاویه آهنگ تغییرات صفر است و در این زاویه مساحت مثلث به دست آمده چه ویژگی دارد؟



مثال

۱: مشتق تابع $y(x) = \sin x (1 + \cos x)$ را حساب می‌کنیم.

$$y'(x) = (\sin x)'(1 + \cos x) + \sin x(1 + \cos x)'$$

$$= \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$$

۲: مشتق تابع $y(x) = \frac{x \sin x}{\sin x + \cos x}$ را حساب می‌کنیم.

$$y'(x) = \frac{(x \sin x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)'x \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\sin x + x \cos x)(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)x \sin x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + x \cos x \sin x + x \cos^2 x - x \cos x \sin x + x \sin^2 x}{1 + \sin 2x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + x}{1 + \sin 2x}$$



مسائل



۱- مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y(x) = \sin^3 x$ ب) $y(x) = x \tan \frac{x}{4}$ ج) $y(x) = \sin^2 x$

د) $y(x) = \frac{\sin x}{x}$ هـ) $y(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$ و) $y(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$

۲- مشتق تابع $y = \cos x$ را مستقیماً از طریق تعریف به دست آورید.

۳- نمودار تابع $y = \sin x$ با چه زاویه‌ای از مبدأ می‌گذرد (زاویه خط مماس بر نمودار تابع نسبت به محور x ‌ها)؟
نمودار تابع $\tan x$ با چه زاویه‌ای از مبدأ می‌گذرد؟

۴- در چه نقاطی خط مماس بر نمودار تابع $y(x) = \sin^3 x$ موازی محور x ‌ها است.

۵- آیا می‌توان بر نمودار تابع $y(x) = \sin x + \cos x$ خط مماسی رسم کرد که با خط $y = 3x - 1$ موازی باشد؟

۶- در خط $y = mx + 2$ چه مقدارهایی می‌تواند داشته باشد تا بتوان بر نمودار تابع $y(x) = \tan^3 x$ خط مماسی رسم کرد که با آن موازی باشد.

۷- تابع حرکت متحرکی روی محور x ‌ها به صورت $x(t) = 1 + 2 \sin^2 x$ است. چگونگی حرکت این متحرک را توصیف کنید. در چه نقاطی روی محور x ‌ها این متحرک ایست‌آنی دارد؟ در چه نقاطی این متحرک بیشترین سرعت را دارد و مقدار این سرعت چقدر است؟

مشتق تابع وارون و توابع مرکب

حل یک مسئله



مشتق یک تابع وارون‌پذیر و مشتق وارون آن چه رابطه‌ای با هم دارند؟

نمودار یک تابع و وارون آن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند، پس مماس‌های این دو نمودار در نقاط متناظر نیز قرینه هم خواهند بود و شیب‌های آن‌ها رابطه مشخصی با هم خواهند یافت. برای یافتن این رابطه در فعالیت زیر در حالتی خاص این رابطه را جستجو می‌کنیم.



فعالیت ۸



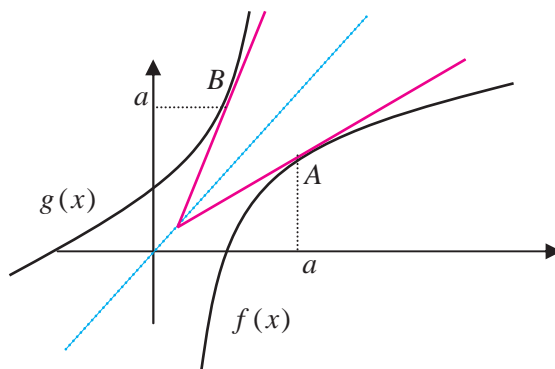
تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ روی دامنه $[1, \infty)$ تعریف شده است و صعودی است. وارون $f(x)$ تابع $g(x) = x^2 + 1$ با دامنه $[0, \infty)$ است.

۱- نمودارهای این دو تابع را رسم کنید و نقطه‌ی $A(5, 1)$ روی نمودار f و نقطه‌ی $B(1, 5)$ روی نمودار g را مشخص کنید.

۲- وضعیت خط‌های مماس بر نمودارهای این دو تابع در این نقاط نسبت به نیمساز ربع اول و سوم چگونه است؟ شیب‌های این دو خط مماس چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۳- آیا برای نقاط دیگر هم چنین رابطه‌ای وجود دارد؟ چه حدسی می‌زنید؟ حدس خود را ثابت کنید.

فرض کنید $f(x)$ تابعی وارون پذیر و مشتق پذیر باشد و وارون آن را با $g(x)$ نشان دهیم. فرض کنید $A(a, b)$ نقطه‌ای از نمودار f باشد ($f(a) = b$)، در این صورت $B(b, a)$ نقطه‌ای از نمودار g خواهد بود که در شکل زیر نمایش داده شده‌اند.



نمودار g قرینه نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است. این نکته باعث می‌شود خط مماس بر نمودار g در نقطه‌ی $B(b, a)$ نیز قرینه خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $A(a, b)$ شود. در فصل دوم دیدیم که شیب‌های این دو خط وارون یکدیگرند. اما شیب‌های این دو خط $f'(a)$ و $g'(b)$ هستند، بنابراین

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که باید $f'(a) \neq 0$.

اگر $f'(a) = 0$ ، خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $A(a, b)$ موازی محور x ها خواهد بود و در نتیجه خط مماس بر نمودار g در نقطه‌ی $B(b, a)$ موازی محور y ها خواهد بود که به معنای آن است که g در b مشتق پذیر نیست. به طور کلی قضیه زیر برقرار است.



اگر f تابعی وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر باشد و وارون آن تابع g باشد، در این صورت g نیز مشتق پذیر

است و $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$



مثال

۱: تابع $f(x) = x^k$ در دامنه $(0, \infty)$ صعودی و وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر است و وارون آن تابع

بنابراین $g(x) = \sqrt[k]{x}$ است.

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{kg(x)^{k-1}} = \frac{1}{k\sqrt[k]{x^{k-1}}}$$

۲: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر است و وارون آن خودش است. بنابراین باید

داشته باشیم $f'(x) = \frac{1}{f'(f(x))}$. درستی این تساوی را بررسی می کنیم.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'(f(x)) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -x^2$$

در بسیاری از موارد تابع وارون ممکن است قابل محاسبه نباشد اما مشتق آن را می توانیم با استفاده از این فرمول حساب

کنیم.

تمرین در کلاس



۱- $g(x) = \sin^{-1}x$ وارون تابع $f(x) = \sin x$ است که دامنه f را به فاصله $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ محدود کرده ایم.

دامنه g فاصله $[-1, 1]$ است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای x های در فاصله $(-1, 1)$

داریم:

$$(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

در نقاط $x = \pm 1$ وضعیت مشتق پذیری $\sin^{-1}x$ چگونه است؟

۲- $g(x) = \cos^{-1}x$ وارون تابع $f(x) = \cos x$ است که دامنه f را به فاصله $[0, \pi]$ محدود کرده ایم.

دامنه g فاصله $[-1, 1]$ است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای x های در فاصله $(-1, 1)$

داریم:

$$(\cos^{-1}x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$



در نقاط $x = \pm 1$ وضعیت مشتق پذیری $\cos^{-1} x$ چگونه است؟

۳- $g(x) = \tan^{-1} x$ وارون تابع $f(x) = \tan x$ است که دامنه‌ی f را به فاصله‌ی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ محدود کرده‌ایم. دامنه‌ی g کل IR است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای هر مقدار x داریم:

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$



مثال

۱: مشتق تابع $f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ را حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

صفر شدن مشتق این تابع در همه‌ی نقاط به معنای آن است که این تابع، ثابت است. قبلاً در فصل سوم دیدیم که

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

۲: مشتق تابع $f(x) = (x + \sin x) \sin^{-1} x$ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x + \sin x)' \sin^{-1} x + (x + \sin x) (\sin^{-1} x)' \\ &= (1 + \cos x) \sin^{-1} x + \frac{x + \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

اگر f و g دو تابع صعودی باشند، $f \circ g$ نیز تابعی صعودی است. اگر شدت صعود g در نقطه‌ای مانند a برابر m_1 (یعنی، $m_1 = g'(a)$) و شدت صعود f در نقطه‌ی $g(a)$ برابر m_2 (یعنی، $m_2 = f'(g(a))$) باشد، شدت صعود $f \circ g$ در نقطه‌ی a چه خواهد بود؟ به عبارت دیگر چه رابطه‌ای بین $g'(a)$ و $f'(g(a))$ و $(f \circ g)'(a)$ وجود دارد؟ برای داشتن یک حدس مناسب بهتر است چند مثال را بررسی کنیم.



فعالیت ۹



- ۱- برای دو تابع $f(x) = m_1 x$ و $g(x) = m_2 x$ ، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبه $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f \circ g)'(x)$ ، بررسی کنید که چه رابطه‌ای بین آن‌ها وجود دارد.
- ۲- برای تابع دلخواه $f(x)$ و $g(x) = m_2 x$ ، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبه‌ی $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f \circ g)'(x)$ ، بررسی کنید که چه رابطه‌ای بین آن‌ها وجود دارد.



۳- برای تابع $f(x) = x^3$ و تابع دلخواه $g(x)$ ، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبه $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f \circ g)'(x)$ ، بررسی کنید که چه رابطه‌ای بین آن‌ها وجود دارد.

تمام مثال‌های بالا نشان می‌دهند که شدت صعود $f \circ g$ در نقطه‌ای مانند a برابر است با حاصلضرب شدت صعود g در a در شدت صعود f در $g(a)$ ، به عبارت دیگر:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

درستی این رابطه در حالت کلی قابل اثبات است و قضیه‌ی زیر برقرار است.

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه $f \circ g$ نیز مشتق‌پذیر است و

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$


مثال

۱: مشتق تابع $\sin x^2$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x^2$ داریم $\sin x^2 = f(g(x))$. بنابراین

$$(\sin x^2)' = f'(g(x))g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

۲: مشتق تابع $\sqrt{1 + \sin^2 x}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 1 + \sin^2 x$ داریم $\sqrt{1 + \sin^2 x} = f(g(x))$. بنابراین

$$(\sqrt{1 + \sin^2 x})' = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cdot 2 \sin x \cos x = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$$

۳: مشتق تابع $\sin \sqrt{1 + x^2}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$ داریم $\sin \sqrt{1 + x^2} = f(g(x))$. بنابراین

$$(\sin \sqrt{1 + x^2})' = f'(g(x))g'(x) = \cos \sqrt{1 + x^2} \cdot (\sqrt{1 + x^2})'$$

$$= \cos \sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = \frac{x \cos \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}$$



تمرین در کلاس



- ۱- مشتق تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ را حساب کنید.
- ۲- مثلثی ساخته‌ایم که طول دو ضلع آن ۱ و ۳ می‌باشد و زاویه‌ی بین این دو ضلع α است که قابل تغییر از صفر تا π رادیان است. طول ضلع سوم را l بنامید.
- الف) l را بر حسب α و آهنگ تغییرات l نسبت به α را به دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟
- ب) α را بر حسب l و آهنگ تغییرات α نسبت به l را به دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟
- ج) آهنگ تغییرات در (الف) و (ب) چه رابطه‌ای با هم دارند؟

مسائل

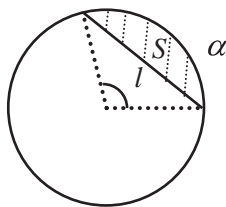


- ۱- مشتق توابع زیر را حساب کنید و تعیین کنید که در کدام نقاط از دامنه‌ی خود مشتق پذیری برقرار نیست.
- الف) $y(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$ ب) $f(t) = \cos \sqrt[3]{t}$
- ج) $g(\alpha) = \sqrt[3]{1+\tan \alpha}$ د) $y(\alpha) = \tan^2\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} \alpha\right)$
- ه) $x(t) = \sqrt{1+\sqrt{1+t^2}}$ و) $k(z) = \sqrt{1+\cos^2 \sqrt{1+z^2}}$
- ۲- آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق پذیر است؟ آیا تابع $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق پذیر است؟
- ۳- دامنه و برد تابع $f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$ را تعیین کنید و نشان دهید این تابع متناوب است و نمودار آن را رسم کنید. این تابع در چه نقاطی مشتق ناپذیر است و مشتق آن را در بقیه‌ی نقاط تعیین کنید.
- ۴- تابع $y(x) = 1$ را در نظر می‌گیریم و از نقطه‌ی $(x, 1)$ روی نمودار این تابع خطی واصل به مبدأ را رسم می‌کنیم. زاویه‌ی این خط با محور x ها را α می‌نامیم که تابعی از x است. تابع α و دامنه و برد آن را حساب کنید و مشتق α نسبت به x را حساب کنید. مقدار α با افزایش x افزایش می‌یابد یا کاهش؟ علامت مشتق α چگونه است؟
- ۵- در مثلثی طول دو ضلع آن ۲ و ۴ می‌باشد و طول ضلع سوم مقدار متغیر l می‌باشد. زاویه‌ی مقابل به این ضلع را با α نشان می‌دهیم.
- الف) l تابعی از α است این تابع را محاسبه کنید و دامنه و برد آن را بیابید.



(ب) تابع وارون تابع قسمت (الف) چه چیزی را نشان می‌دهد؟
 (ج) مساحت این مثلث تابعی از α است، این تابع را حساب کنید و آهنگ تغییرات آن را به دست آورید. آهنگ تغییرات به ازای چه مقدارهای α مثبت است و معنای آن چیست؟ آهنگ تغییرات به ازای چه مقدارهای α منفی است و معنای آن چیست؟ آهنگ تغییرات به ازای چه مقدار α صفر است و مثلث در این مقدار چگونه است و مساحت آن چه ویژگی دارد؟

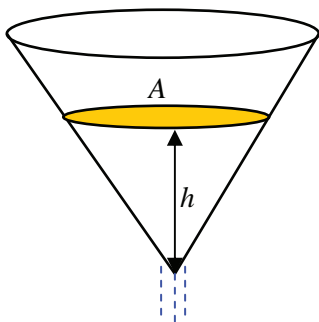
۶- در شکل زیر وتری از دایره به شعاع واحد به طول l رسم شده است که کمانی به زاویه α را از دایره جدا کرده است. مساحت قسمت هاشور خورده را با S نشان می‌دهیم.



(الف) S را بر حسب α و α را بر حسب l و S را بر حسب l حساب کنید.
 (ب) آهنگ تغییرات S را نسبت به α و آهنگ تغییرات α را نسبت به l و آهنگ تغییرات S را نسبت به l را حساب کنید.

تمرینات دوره‌ای

از نقطه‌ی $A(2,5)$ به نقاط مختلف نمودار تابع $y = (x-2)^2$ خط رسم می‌کنیم. آیا نقطه یا نقاطی یافت می‌شوند که خط رسم شده بر نمودار این تابع عمود شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می‌افتد؟ درستی محاسبات خود را با رسم نمودار این تابع نشان دهید.

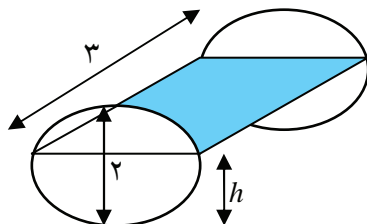


قیفی به شکل مخروط دوار داریم که ارتفاع آن 1° سانتی‌متر و شعاع قاعده آن 5 سانتی‌متر است. این قیف را پر از آب می‌کنیم و در لحظه‌ی $t = 0$ شیر آن را باز می‌کنیم و آب با سرعت دو سانتی‌متر مکعب در ثانیه از آن خارج می‌شود.
 (الف) اگر ارتفاع آب باقیمانده در قیف را با h نشان می‌دهیم، حجم آب باقیمانده را بر حسب h به دست آورید.
 (ب) h را بر حسب زمان به دست آورید و آهنگ تغییرات h را نسبت به زمان در هر لحظه حساب کنید.



ج) سطح آب باقیمانده در قیف را با A نشان می دهیم. با محاسبه ی A بر حسب زمان، آهنگ تغییرات A را نسبت به زمان در هر لحظه حساب کنید.

د) با محاسبه A بر حسب h ، آهنگ تغییرات A را نسبت به h در هر مقداری از h حساب کنید. یک منبع گازوئیل به شکل استوانه در اختیار داریم که به شکل خوابیده روی زمین قرار دارد. قطر دایره ی قاعده آن ۲ متر و ارتفاع آن (که به طور افقی روی زمین است) برابر ۳ متر است.



اگر منبع خالی را به گونه ای پر کنیم که ارتفاع گازوئیل با سرعت ثابت ۳ سانتی متر بر دقیقه افزایش یابد، سرعت افزایش حجم گازوئیل در هر لحظه t چقدر خواهد بود؟

