

ماتریس

فصل 4



میوه فروشی وزن (برحسب کیلوگرم) میوه‌هایی را که در روزهای مختلف هفته جهت فروش عرضه کرده، به صورت زیر دسته‌بندی کرده است.

	سیب	پرتقال
شنبه	۲۴۰	۴۸۰
دوشنبه	۱۸۰	۳۲۰
چهارشنبه	۳۰۰	۵۶۰
جمعه	۱۷۰	۲۰۰

	سیب	پرتقال
یک‌شنبه	۸۰	۲۲۵
سه‌شنبه	۱۱۰	۲۵۰
پنجشنبه	۱۰۵	۲۲۵

اطلاعات فوق را می‌توان به صورت آرایشی از اعداد نشان داد.

$$\begin{bmatrix} 480 & 240 \\ 320 & 180 \\ 560 & 300 \\ 200 & 170 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 225 & 80 \\ 250 & 110 \\ 225 & 105 \end{bmatrix}$$

آرایش فوق از اعداد را یک ماتریس و هریک از اعداد را درایه‌ی ماتریس می‌نامند.

معمولاً ماتریس را با حروف بزرگ **A**، **B**، **C** و نشان می‌دهند.

سطر اول	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 11 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
سطر دوم	
سطر سوم	
	ستون سوم ستون دوم ستون اول

ماتریس مقابل ماتریسی با سه سطر و سه ستون است.

درایه‌ی ۴ در سطر سوم و ستون دوم واقع است.

مثال

یک ماتریس با m سطر و n ستون یک ماتریس از مرتبه $m \times n$ (بخوانید ماتریس m سطر در n ستون و یا به طور خلاصه ماتریس m در n) است. ماتریس مثال قبل یک ماتریس از مرتبه 3×3 (سه در سه) است.

در صورتی که تعداد سطرها و ستون‌های یک ماتریس برابر باشند، یعنی $m = n$ باشد، ماتریس را مربعی می‌نامند.



مثالی از یک ماتریس با مرتبه 3×2 به صورت زیر است که در آن عدد ۷ درایه‌ای است که در سطر دوم و ستون اول واقع شده است.

$$\begin{matrix} \text{دو سطر} & \left[\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 7 & 4 \end{array} \right] & \begin{matrix} \text{سه ستون} \end{matrix} \end{matrix}$$

جای هریک از درایه‌های ماتریس بالا را مشخص کنید.



در جدول‌های زیر موجودی حساب جاری پس‌انداز حسن و احمد در بانک ملی و بانک کشاورزی داده شده است.

موجودی حسن

	جاری	پس‌انداز
ملی	۷۰۰۰۰	۸۰۰۰۰
کشاورزی	۱۰۰۰۰۰	۹۰۰۰۰

موجودی احمد

	جاری	پس‌انداز
ملی	۶۰۰۰۰	۵۰۰۰۰
کشاورزی	۴۰۰۰۰	۹۰۰۰۰

موجودی حسن و احمد را در ماتریس‌هایی به صورت زیر می‌توان نشان داد :

$$\begin{bmatrix} 70000 & 80000 \\ 100000 & 90000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 60000 & 50000 \\ 40000 & 90000 \end{bmatrix}$$

ماتریسی که فقط یک سطر دارد را ماتریس سطری و ماتریسی که فقط یک ستون دارد را ماتریس ستونی می‌نامیم.

یک ماتریس سطری و $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ یک ماتریس ستونی است.

در هریک از ماتریس‌های داده شده، سطرها در ستون‌ها را مانند نمونه‌ی زیر مشخص کنید و مرتبه‌ی ماتریس را بنویسید.

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ستون} & \text{ستون} & \text{ستون} \\ \text{اول} & \text{دوم} & \text{سوم} \end{matrix} \begin{matrix} \text{سطر اول} \\ \text{سطر دوم} \end{matrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

در هریک از ماتریس‌های فوق درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون اول را مشخص کنید.

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ درایه‌ی a_{11} درایه‌ای است که در سطر اول و ستون اول جای

دارد و a_{21} درایه‌ای است که سطر دوم و ستون اول را مشخص می‌کند.

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ هریک از درایه‌ها را مشخص کنید.

$$a_{11} = 2 \quad a_{12} = 7 \quad a_{21} = 5 \quad a_{22} = 1$$

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ هر یک از درایه‌های a_{31} , a_{22} , a_{21} , a_{12} , a_{11} را مشخص کنید.

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس مساوی اند اگر هم مرتبه باشند و علاوه بر آن درایه‌های دو ماتریس نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -4 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -4 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

۱- مانند مثال‌های بالا شما هم سه مثال از تساوی و عدم تساوی دو ماتریس بنویسید.

۲- x و y را طوری بیابید که دو ماتریس زیر برابر باشند.

$$\begin{bmatrix} x+5 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1 \\ 2+y \end{bmatrix}$$

۳- مقادیر x و y و z را در عبارات زیر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2x+7 & y-2 \\ 0 & 4z+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & x-1 & y+4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

جمع دو ماتریس

به مثال میوه فروش باز می گردیم. مصرف میوه برحسب کیلوگرم در دو هفته ی متوالی و در روزهای شنبه و سه شنبه خانواده ای به صورت جدول های زیر است.

	سیب	پرتقال
شنبه	۵	۸
سه شنبه	۴	۷

هفته ی اول

	سیب	پرتقال
شنبه	۴	۵
سه شنبه	۶	۳

هفته ی دوم

که می توان آن ها را به شکل ماتریس نوشت.

$$\text{مصرف هفته ی اول } A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{مصرف هفته ی دوم } B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

میزان مصرف میوه ی این خانواده در دو هفته مجموعاً عبارت خواهد بود از جمع دو ماتریس A و B :

$$A + B = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+5 & 5+4 \\ 7+3 & 4+6 \end{bmatrix}$$

شنبه سیب پرتقال سیب پرتقال

سه شنبه سیب پرتقال سیب پرتقال

دو ماتریس که دارای تعداد سطرهای برابر و تعداد ستون های برابر باشند را می توان با هم جمع کرد. به این صورت که درایه های نظیر به نظیر دو ماتریس با هم جمع می شوند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 11 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

به هر ماتریس مانند $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ که درایه‌های آن همگی صفر هستند، ماتریس صفر می‌گوییم و آن را با نماد $O_{m \times n}$ نشان می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 9 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -1 & -9 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس $O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ که ماتریسی با سه سطر و دو ستون است را نیز ماتریس صفر می‌نامند.

مانند جمع دو ماتریس، تفاضل دو ماتریس در صورتی که ماتریس‌ها هم مرتبه باشند، امکان‌پذیر است.

$$\begin{bmatrix} 2 & 11 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 11-2 & 6-0 \\ 4-2 & 3-3 & -1+1 \\ 5-3 & 9-1 & 7-6 \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در ماتریس

حاصل ضرب عدد حقیقی k در ماتریس با مرتبه $m \times n$ ، ماتریسی با مرتبه $m \times n$ است که هریک از درایه‌های آن برابر حاصل ضرب عدد k در درایه نظیر در ماتریس اولیه است.

مثال

ماتریس $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ و $k = 2$ را در نظر بگیرید. ماتریس kA عبارت است از:

$$k \times A_{2 \times 3} = 2 \times \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 5 & 2 \times 0 & 2 \times 2 \\ 2 \times 1 & 2 \times 4 & 2 \times (-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & -14 \end{bmatrix}$$

تمرین

ماتریس $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریس $5A$ و $-3A$ را مشخص کنید.

قرینه‌ی ماتریس

قرینه‌ی ماتریس $A_{m \times n}$ ، ماتریس $(-1)A_{m \times n}$ است که مجموع آن‌ها ماتریس صفر $O_{m \times n}$ خواهد بود.

مثال

اگر $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ باشد، قرینه‌ی ماتریس A عبارت است از:

$$(-1)A_{2 \times 2} = (-1) \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \times 5 & -1 \times 6 \\ -1 \times 2 & -1 \times 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$$



۱- در مثال فوق مجموع ماتریس A و ماتریس قرینه‌اش را به دست آورید.

۲- قرینه‌ی هریک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید و سپس مجموع هر ماتریس با قرینه‌اش را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

۳- معادله‌های ماتریسی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الف) مرتبه‌ی ماتریس‌های B و A را مشخص کنید.

ب) درایه‌های ماتریس‌های B و A را معلوم کنید.



۱- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف) حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$A+B, B+C, C+A$$

ب) عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$2A, 3C, 2A+B, B-C$$

ج) آیا رابطه ی $A+B=B+A$ برقرار است؟

آیا رابطه ی $(A+B)+C=A+(B+C)$ برقرار است؟

آیا این رابطه ها برای هر سه ماتریس $A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$, $C_{m \times n}$ برقرار است؟ مثال بزنید.

۲- قرینه ی ماتریس های داده شده را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

۳- اگر $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $Q = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 4 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس R را طوری بیابید که $P+Q+R=0$.

۴- در رابطه ی زیر x و y را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 2x-3y \\ x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس ها

	پرتقال	سیب
شنبه	۱	۲
سه شنبه	۲	۳

شخصی میوه ی مورد نیاز خانواده اش را در روزهای شنبه و سه شنبه مطابق جدول مقابل تهیه کرده است.

اطلاعات جدول را به صورت ماتریس زیر نشان می دهیم.

$$\begin{matrix} & \text{پرتقال} & \text{سیب} \\ \begin{matrix} \text{شنبه} \\ \text{سه شنبه} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

اگر قیمت پرتقال هر كيلو ۱۵۰۰ تومان و سيب هر كيلو ۱۰۰۰ تومان باشد در صورتی كه بخواهيم قيمت كل ميوه‌ای كه شخص در روز شنبه پرداخته است را محاسبه كنيم می‌توانيم ماتريس سطرى $\begin{bmatrix} ۱۵۰۰ \\ ۱۰۰۰ \end{bmatrix}$ را در ماتريس ستونی $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ كه بردار قيمت هر كيلو ميوه است ضرب كنيم. در اين صورت خواهيم داشت :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱۵۰۰ \\ ۱۰۰۰ \end{bmatrix} = (۱ \times ۱۵۰۰) + (۲ \times ۱۰۰۰) = ۳۵۰۰$$

و قيمت كل ميوه برای روز سه‌شنبه به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱۵۰۰ \\ ۱۰۰۰ \end{bmatrix} = (۲ \times ۱۵۰۰) + (۳ \times ۱۰۰۰) = ۶۰۰۰$$

اطلاعات فوق را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو ماتريس زیر نوشت :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱۵۰۰ \\ ۱۰۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۵۰۰ \\ ۶۰۰۰ \end{bmatrix}$$

اکنون اگر قيمت ميوه‌ها در دو ميوه فروشی متفاوت و به صورت زیر باشد :

	ميوه فروشی دوم
ميوه فروشی اول	
قيمت هر كيلو پرتقال	$\begin{bmatrix} ۱۵۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix}$
قيمت هر كيلو سيب	$\begin{bmatrix} ۱۰۰۰ & ۹۰۰ \end{bmatrix}$

برای به‌دست آوردن هزینه‌ی كل ميوه در روزهای شنبه و سه‌شنبه و در صورت خريد از هريك از دو ميوه‌فروشی، لازم است دو ماتريس را در هم ضرب كنيم :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱۵۰۰ & ۱۰۰۰ \\ ۱۰۰۰ & ۹۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \times ۱۵۰۰ + ۲ \times ۱۰۰۰ & ۱ \times ۱۰۰۰ + ۲ \times ۹۰۰ \\ ۲ \times ۱۵۰۰ + ۳ \times ۱۰۰۰ & ۲ \times ۱۰۰۰ + ۳ \times ۹۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۵۰۰ & ۲۸۰۰ \\ ۶۰۰۰ & ۴۷۰۰ \end{bmatrix}$$

برای آشنایی بيش‌تر با ضرب ماتريس‌ها به مثال‌های بعد توجه كنيد.

ماتریس $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ و ماتریس $B_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. حاصل ضرب آن‌ها

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 7 + 5 \times 3 \\ 1 \times 7 + 9 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 34 \end{bmatrix}$$

به صورت زیر است :

توجه کنید که تعداد درایه‌های سطر اول ماتریس A با تعداد درایه‌های ستون اول ماتریس B برابر است. همین‌طور در سطر دوم ماتریس A و ستون اول ماتریس B تعداد درایه‌ها برابرند.

اکنون ماتریس $C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ و ماتریس A در مثال قبل را در نظر بگیرید. حاصل ضرب

$A_{2 \times 2} \times C_{2 \times 2}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 7 + 5 \times 5 & 2 \times 2 + 5 \times 3 \\ 1 \times 7 + 9 \times 5 & 1 \times 2 + 9 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & 19 \\ 52 & 29 \end{bmatrix}$$

دو ماتریس $D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

۱- مرتبه‌ی ماتریس‌های فوق را بنویسید.

۲- حاصل ضرب دو ماتریس را به دست آورید.

$$A_{2 \times 2} \times D_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} =$$

۳- آیا حاصل ضرب $D_{2 \times 3} \times A_{2 \times 2}$ انجام پذیر است؟ چرا؟

حاصل ضرب دو ماتریس در صورتی امکان پذیر است که تعداد ستون‌های اولی با تعداد سطرهای دومی برابر باشند.

۱- اگر $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد،
 $A \times B$ ، $C \times B$ را محاسبه کنید.

۲- اگر $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، $A \times B$ ، $B \times A$ را محاسبه کنید.
 نشان دهید: $A \times B \neq B \times A$

ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. حاصل ضرب
 $A \times B$ ، $B \times A$ را به دست آورید.

ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را ماتریس واحد یا یکه می‌نامیم و آن را با $I_{2 \times 2}$ نشان می‌دهیم.
 حاصل ضرب ماتریس $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ را در $I_{2 \times 2}$ بیابید. آیا $CI = IC$ است؟

برای دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه‌ی A و B در صورتی که $AB = I$ باشد، ماتریس B را ماتریس وارون ماتریس A می‌نامیم و آن را با نماد A^{-1} نشان می‌دهیم.
 در فعالیت بالا ماتریس B ماتریس وارون ماتریس A است. $B = A^{-1}$

ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ و C را در نظر بگیرید.

$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

کدام یک از ماتریس‌ها، وارون ماتریس A است؟

حل دستگاه دو معادله دو مجهول با استفاده از ماتریس

همان طور که می‌دانید دستگاه زیر مثالی از یک دستگاه دو معادله دو مجهولی است.

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

می‌توان دستگاه فوق را با استفاده از تساوی ماتریس‌ها به صورت زیر نوشت :

$$\begin{bmatrix} 2x - y \\ -x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

با توجه به ضرب ماتریس‌ها، ماتریس سمت چپ را می‌توان به صورت ضرب دو ماتریس نوشت :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

اگر در رابطه‌ی فوق $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد، می‌توان رابطه‌ی

ماتریسی رو برو را نوشت : $AX=C$

با راه حل معادله‌ی $3x=7$ آشنا هستید. یک بار دیگر آن را مرور می‌کنیم.

$$3x = 7$$

$$\left(\text{عدد } \frac{1}{3} \text{ وارون عدد } 3 \text{ است.} \right) \quad \frac{1}{3} \times 3x = \frac{1}{3} \times 7$$

$$\left(\text{عدد } 1 \text{ عضو بی اثر عمل ضرب اعداد است.} \right) \quad 1x = \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{7}{3}$$

اکنون به نظر شما برای حل معادله‌ی ماتریس $AX=C$ به چه چیزی احتیاج داریم؟



ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و ماتریس $B = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

حاصل ضرب دو ماتریس را به دست آورید. چه نتیجه‌ای از این حاصل ضرب می‌گیرید؟

ماتریس B وارون ماتریس A می‌باشد و مقدار $ad - bc$ را دترمینان ماتریس A می‌نامیم.



وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

اگر A^{-1} را وارون ماتریس A بنامیم داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{3+2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$



۱- به نظر شما شرط وارون پذیری ماتریس 2×2 مانند A چیست؟

۲- دستگاه $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -x + y = 4 \end{cases}$ را حل کنید.



۱- دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ و $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۲- وارون هر یک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

۳- کدام یک از عبارت‌های زیر برقرار نیست؟

الف) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ (فرض کنیم A و B و AB وارون پذیر باشند)

ب) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ (فرض کنیم A و B و $A+B$ وارون پذیر باشند)

۴- مثالی از یک ماتریس 2×2 بزنید که وارون آن با خودش برابر باشد.

۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ در این صورت $(A^{-1})^{-1}$ را پیدا کنید.

۶- مقدار a را به گونه‌ای پیدا کنید که ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & a+1 \\ a-2 & 4 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.

۷- در هریک از دستگاه‌های دو معادله دوجمله‌ای زیر، ماتریس ضرایب را نوشته و با استفاده از ماتریس معکوس ضرایب جواب دستگاه را به دست آورید.

$$\begin{array}{lll} \text{الف)} \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 2y = 3 \end{cases} & \text{ب)} \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 6x + 4y = 1 \end{cases} & \text{ج)} \begin{cases} -x + y = 7 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases} \end{array}$$

۸- رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$ مفروض است :

ماتریس سمت چپ را به صورت حاصل ضرب ۲ ماتریس بنویسید و مقادیر x و y را به دست آورید.

۹- معادلات زیر را با توجه به محاسبات در ماتریس‌های مربعی مرتبه‌ی 2×2 حل کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \text{ب)} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$