

فصل ۴

۱. حد توابع
۲. حد چپ و حد راست
۳. همسایگی‌های یک نقطه
۴. قضایای حد توابع
۵. محاسبه حد در توابع کسری
۶. پیوستگی توابع

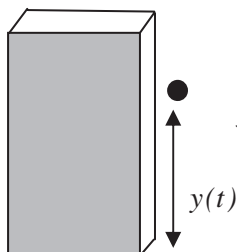
طبق نظریه انفجار بزرگ ، عالم در اثر یک انفجار بزرگ که در یک نقطه روی داده است به وجود آمده است. اگر در زمان به عقب بازگردیم رفته رفته به این نقطه نزدیک می‌شویم



حد و پیوستگی
توابع



حد توابع



اگر سنگی را از بالای یک ساختمان ۱۶ متری رها کنیم طبق قوانین فیزیکی ارتفاع آن در هر لحظه t به صورت $y(t) = 16 - 5t^2$ است که t برحسب ثانیه و $y(t)$ برحسب متر است.

حل یک مسئله

چگونه می توان سرعت سقوط این سنگ را در هر لحظه حساب کرد؟

این سؤالی بود که نیوتون از خود پرسید. نیوتون فیزیکدانی بود که حدود ۳۰۰ سال پیش می زیسته است و با طرح چنین مسائلی و حل آنها علم حسابان را پایه ریزی نمود.

معلم از دانش آموزان پرسید: آیا می دانید سرعت یک متحرک چیست و آن را چگونه حساب می کنند؟

سعید: من ورزشکار هستم و در تمرین ها زیاد می دویم. معمولاً موقع دویدن در هر ثانیه ۲ متر جلو می روم، یعنی سرعت من ۲ متر بر ثانیه است.

معلم: بله اگر متحرکی با سرعت ثابت حرکت کند، در هر ثانیه مسافت یکسانی طی می کند و اگر این مسافت v متر باشد، گوئیم سرعت آن v متر بر ثانیه است. به طور کلی متحرک هایی که با سرعت ثابت حرکت می کنند در هر فاصله زمانی $[t_1, t_2]$ اگر a متر طی کرده باشند مقدار $\frac{a}{t_2 - t_1}$ ثابت است و همان سرعت متحرک برحسب متر بر ثانیه است.

علی: اما اگر متحرکی سرعت ثابت نداشته باشد و سرعت آن در حال تغییر باشد در هر لحظه سرعت آن را چگونه حساب کنیم؟

محسن: من هر وقت سوار ماشین می شوم، ماشین از حالت ایستاده شروع به حرکت می کند و سرعت خود را از صفر تا ۵۰ کیلومتر بر ساعت افزایش می دهد و در هر لحظه عقربه سرعت شمار مقدار سرعت را نشان می دهد که از صفر تا ۵۰ افزایش می یابد.

معلم: بله ماشین در هر لحظه سرعتی دارد و این سرعت در حال افزایش است ولی آنچه که ما از ماشین می توانیم ببینیم آن است که در هر لحظه چند متر به جلو رفته است. آیا با دانستن این مطلب ما می توانیم تشخیص دهیم سرعت ماشین در هر لحظه چقدر است؟

سعید: اگر در هر لحظه ما بدانیم متحرک چقدر حرکت کرده است، از یک لحظه t_1 تا چند لحظه بعد مانند t_2 می توانیم حساب کنیم چند متر حرکت کرده است. اگر مسافت طی شده بین این دو لحظه a متر باشد مقدار $\frac{a}{t_2 - t_1}$ را می توان سرعت متحرک در فاصله زمانی $[t_1, t_2]$ بدانیم.



محسن: این درست نیست، ما می‌خواهیم بدانیم سرعت متحرک در هر لحظه چقدر است، این عدد چنین چیزی را به ما نمی‌گوید.

معلم: محسن درست می‌گوید ولی سعید گام مهمی را در حل مسئله برداشته است. مقدار $\frac{a}{t_2 - t_1}$ سرعتی را نشان می‌دهد که اگر متحرک در فاصله زمانی $[t_1, t_2]$ به‌طور ثابت با آن سرعت حرکت می‌کرد به همان جایی می‌رسید که اکنون رسیده است. این مقدار را در فیزیک سرعت متوسط متحرک در فاصله زمانی $[t_1, t_2]$ می‌نامند.

محسن: ما چگونه می‌توانیم از طریق سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای برسیم؟

سعید: اگر t_2 به t_1 نزدیک باشد، مقدار متوسط سرعت نیز باید به سرعت لحظه‌ای نزدیک باشد. بنابراین بهتر است بینیم زمانی که t_2 به t_1 نزدیک می‌شود، سرعت متوسط به چه عددی نزدیک می‌شود.

معلم: نکات خوبی را مطرح کردید، بیایید ببینیم که آیا با این روش می‌توانیم سرعت سقوط سنگ را در هر لحظه حساب کنیم.



فعالیت ۱



- ۱- در مسئله سقوط سنگ، پس از گذشت ۱ ثانیه سنگ در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟
- ۲- اگر h عددی کوچک باشد در لحظه $1+h$ سنگ در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟
- ۳- بین دو لحظه ۱ و $1+h$ سنگ چند متر حرکت کرده و این حرکت در چند ثانیه انجام شده است؟
- ۴- اگر h ناصفر باشد، سرعت متوسط سنگ بین دو لحظه ۱ و $1+h$ چقدر است؟
- ۵- اگر h منفی باشد لحظه $1+h$ چه معنایی دارد؟
- ۶- جدول زیر را تکمیل کنید.

h	$0/1$ $0/01$ $0/001$ \rightarrow 0 \leftarrow $0/001$ $0/01$ $0/1$
سرعت متوسط	\rightarrow $?$ \leftarrow

۷- اگر h ناصفر باشد و آن را به تدریج کوچک و کوچک‌تر کنیم و به صفر نزدیک کنیم، سرعت متوسط سنگ به چه عددی نزدیک می‌شود؟ این عدد چه چیزی را نشان می‌دهد؟

در فعالیت بالا سرعت متوسط سنگ بین دو لحظه ۱ و $1+h$ وابسته به مقدار h است و تابعی بر حسب h می‌باشد که اگر آن را با $g(h)$ نشان دهیم داریم:

$$g(h) = \frac{(16 - 5 \times 1^2) - (16 - 5(1+h)^2)}{h} = 5h + 10$$



توجه کنید که $g(h)$ فقط برای h های ناصفر تعریف شده است و ما حق نداریم به جای h صفر قرار دهیم، با این حال ما دقیقاً می‌خواهیم بدانیم مقدار این تابع در $h = 0$ چقدر باید باشد. (چرا؟).

اگرچه ما حق نداریم جای h صفر قرار دهیم ولی می‌توانیم مقدارهای ناصفر کوچک جای h قرار دهیم و هر چقدر دلمان بخواهد آن را کوچک‌تر کنیم و بررسی کنیم مقدارهای $g(h)$ چگونه تغییر می‌کنند و آیا به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟

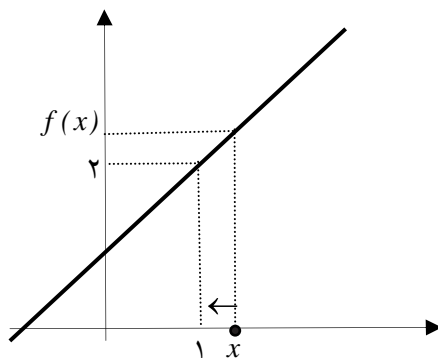
تمرین در کلاس



۱- برای تابع $f(x) = x + 1$ جدول زیر را تکمیل کنید و سپس حدس بزنید که اگر مقدارهای x را به ۱ نزدیک کنیم مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

x	$0/9$	$0/99$	$0/999$	\rightarrow	1	\leftarrow	$1/001$	$1/01$	$1/1$
$f(x)$					\rightarrow	?	\leftarrow		

۲- نمودار تابع $f(x) = x + 1$ در زیر رسم شده است. از روی نمودار توضیح دهید وقتی مقدارهای x به ۱ نزدیک می‌شوند، مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند.



۳- برای توابع $k(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ وقتی مقدارهای x به ۱ نزدیک می‌شوند، مقدارهای $g(x)$ و $k(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند.

۴- سه تابع $f(x)$ و $g(x)$ و $k(x)$ با هم مساوی نیستند. این سه تابع چه تفاوت‌ها و چه شباهت‌هایی دارند و چه چیز باعث شده است که همه‌ی آن‌ها با نزدیک شدن x به ۱ به عدد یکسانی نزدیک شوند.

۵- جدول صفحه‌ی بعد را تکمیل کنید و سپس حدس بزنید که وقتی مقدار x به صفر نزدیک می‌شود مقدار تابع $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ به چه عددی نزدیک می‌شود؟



x	$-\infty$ $-\infty/1$ $-\infty/0.1$ $-\infty/0.01$ \rightarrow 0 \leftarrow $0/0.01$ $0/0.1$ $0/1$
$\sin x$	$0/0.0099999$ $0/0.009999$ $0/0.99983$
$\frac{\sin x}{x}$	\rightarrow $?$ \leftarrow

در تمرین‌های بالا با تابعی مانند $f(x)$ روبرو بودیم که متغیر x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک می‌شد و این سؤال مطرح بود که آیا مقدارهای $f(x)$ نیز به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ این مفهوم را حدگیری از تابع f در نقطه a می‌نامند.

برای یک تابع f اگر مقدارهای x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک شوند و مشاهده شود که مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک می‌شوند، گوئیم تابع f در نقطه a حد دارد و حد آن برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

عبارت بالا را به صورت «حد $f(x)$ در نقطه a برابر L است» بخوانید.

به‌طور دقیق‌تر، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ به معنای آن است که اگر x (در دامنه f) به اندازه کافی به a نزدیک شود آن‌گاه فاصله $f(x)$ تا L از هر مقداری که انتخاب کرده باشیم کوچک‌تر می‌شود.



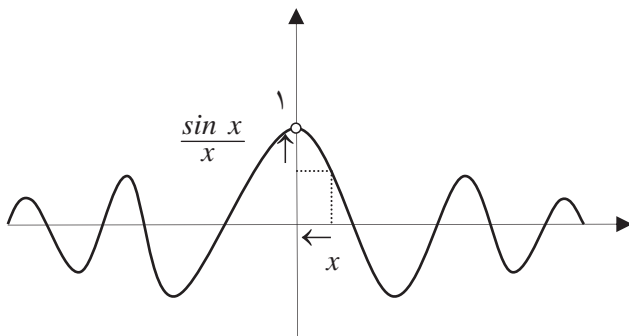
مثال

۱: حد تابع $\frac{x^2-1}{x-1}$ در نقطه ۱ برابر ۲ است، $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

۲: با محاسبه مقدارهای تقریبی

تابع $\frac{\sin x}{x}$ برای مقدارهای x نزدیک صفر می‌توان حدس زد که حد آن در نقطه صفر

برابر ۱ است، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$





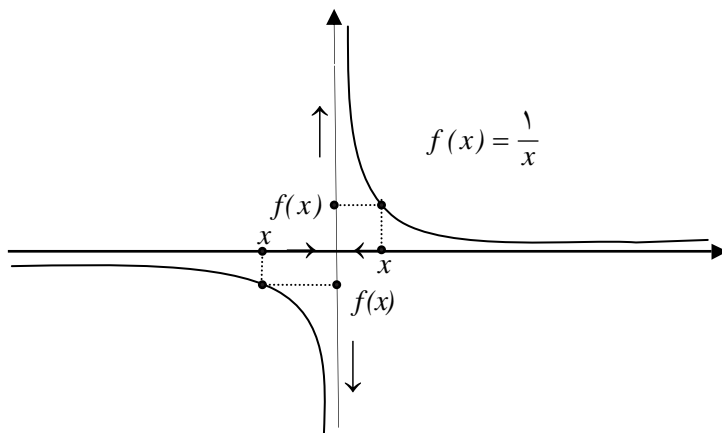
فعالیت ۲



۱- برای تابع $\frac{1}{x}$ جدول زیر را تکمیل کنید و حد این تابع را در صفر بررسی کنید.

x	$-0/1$ $-0/01$ $-0/001$ \rightarrow 0 \leftarrow $0/001$ $0/01$ $0/1$
$\frac{1}{x}$	\rightarrow ? \leftarrow

۲- آیا مقدارهای $\frac{1}{x}$ وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ جواب خود را از طریق نمودار تابع $\frac{1}{x}$ که در زیر آمده است توضیح دهید.



فعالیت بالا نشان می‌دهد این طور نیست که هر تابعی در هر نقطه‌ای حتماً حد داشته باشد. توابعی مانند f هستند که مقدارهای آن‌ها، با نزدیک شدن x (در دامنه f) به عددی مانند a به هیچ عددی نزدیک نمی‌شوند. گوییم این گونه توابع در آن نقطه حد ندارند.

مثال

تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ در نقاط 1 و -1 حد ندارد، زیرا با نزدیک شدن x به 1 یا -1 مقدارهای $\frac{x}{x^2 - 1}$ به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند و از لحاظ قدرمطلق مرتباً افزایش می‌یابند.



فعالیت ۳

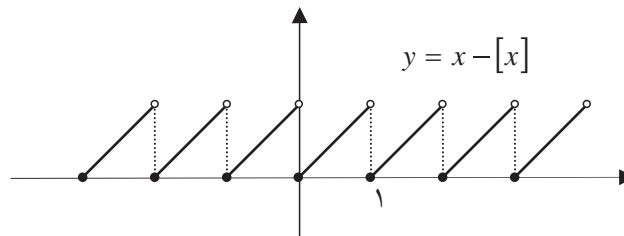


۱- جدول زیر را برای تابع $x - [x]$ تکمیل کنید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→ ۱ ←	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$x - [x]$				→ ? ←			

۲- اگر x با مقدارهای بزرگتر از ۱ به ۱ نزدیک شود، آیا مقدارهای $x - [x]$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟
 اگر x با مقدارهای کوچکتر از ۱ به ۱ نزدیک شود، آیا مقدارهای $x - [x]$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ آیا این دو عدد یکی هستند؟

۳- نتایج خود را روی نمودار تابع $x - [x]$ که در زیر آمده است توضیح دهید.



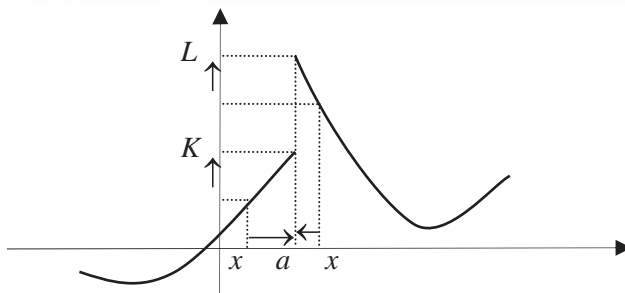
۴- آیا تابع $x - [x]$ در ۱ حد دارد؟

در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقدارهای بزرگتر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه a حد راست دارد و مقدار این حد L است. این مطلب را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقدارهای کوچکتر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند K نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه a حد چپ دارد و مقدار این حد K است. این مطلب را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

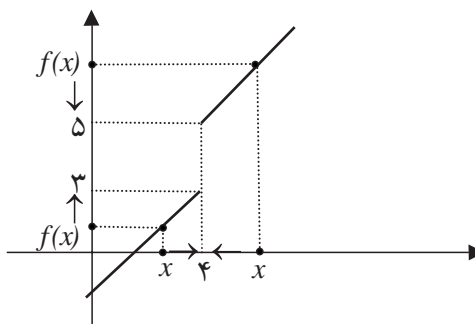
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = K$$



مثال

۱: نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 4 \\ x+1 & 4 < x \end{cases}$ در زیر رسم شده است.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 4 \\ x+1 & 4 < x \end{cases}$$



این تابع در نقطه $x = 4$ تعریف نشده است و دیده می‌شود که با نزدیک شدن x به ۴ با مقادیرهای بزرگ‌تر از ۴، مقادیرهای $f(x)$ به ۵ نزدیک می‌شوند، یعنی

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 5$$

هم‌چنین با نزدیک شدن x به ۴ با مقادیرهای کوچکتر از ۴، مقادیرهای $f(x)$ به ۳ نزدیک می‌شوند، یعنی $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$. بنابراین، این تابع در ۴ حد ندارد.

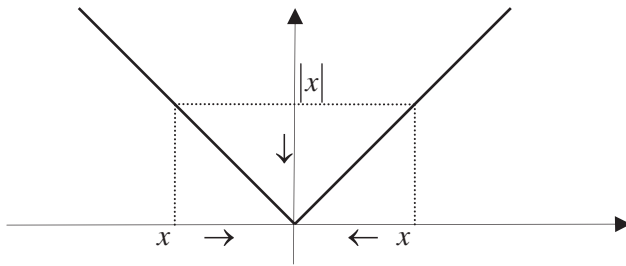
تذکر: در علامت‌گذاری حد راست و چپ نمادهای «+» و «-» معنای راست و چپ دارند، نه مثبت و منفی. با توجه به مفهوم حدهای چپ و راست، قضیه زیر برقرار خواهد بود.

اگر تابعی در نقطه‌ای حدهای چپ و راست متفاوت داشته باشد، در آن نقطه حد ندارد. اما اگر حدهای چپ و راست تابع در نقطه‌ای موجود و مساوی باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار مشترک حدهای چپ و راست است.



مثال

۲: حد تابع $|x|$ را در صفر بررسی می‌کنیم.



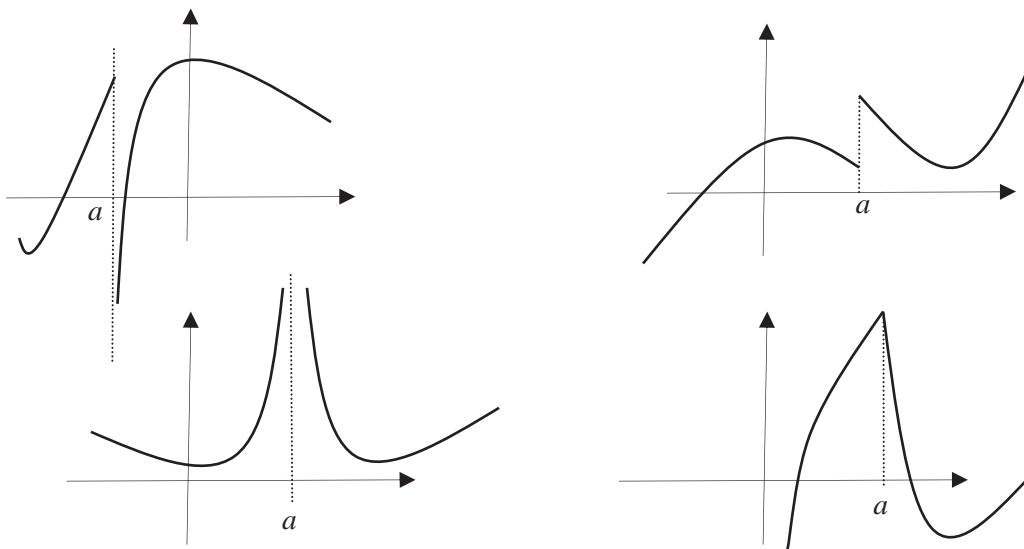
با نزدیک شدن x به صفر چه از چپ و چه از راست $|x|$ به صفر نزدیک می‌شود، یعنی حد چپ و حد راست هر دو موجودند

و برابر صفر می‌باشند، پس $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

تمرین در کلاس



۱- در زیر نمودار چند تابع داده شده است. در هر کدام از نمودارهای داده شده در نقطه مشخص شده وجود حدهای چپ و راست و وجود حد تابع را بررسی کنید.



۲- با رسم جدول و نمودار توابع زیر وجود حدهای چپ و راست و حد تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید و مقدار این حدها را به دست آورید.

الف) $y = \sqrt{1+x}$, $a = 3$



$$\text{ب) } a = 0, y = \frac{x}{|x|}$$

$$\text{ج) } a = 2, y = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 2 \\ x + 1 & 2 < x \end{cases}$$

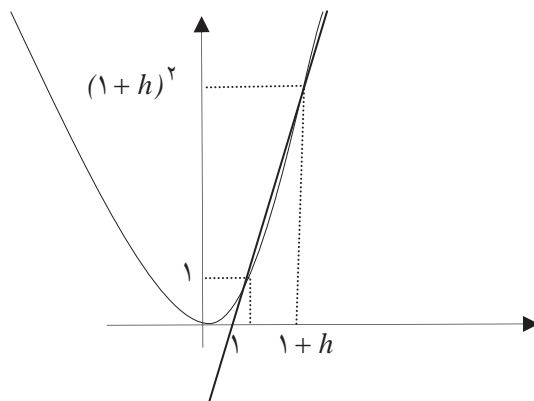
حل یک مسئله



چگونه می‌توانیم معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = x^2$ در نقطه $(1, 1)$ را به دست آوریم؟

با انجام مراحل زیر سعی کنید این مسئله را حل کنید.

۱- معادله خطی را که از این نقطه و یک نقطه نزدیک به آن که روی نمودار قرار دارد بنویسید. یک نقطه نزدیک به $(1, 1)$ روی نمودار این تابع را می‌توانید به شکل $(1+h, (1+h)^2)$ در نظر بگیرید.



۲- اگر h به صفر نزدیک شود این خط به چه خطی نزدیک می‌شود؟ شیب این خط و عرض از مبدأ این خط به چه اعدادی نزدیک می‌شوند؟

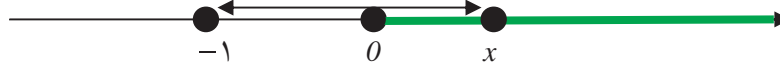
۳- معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = x^2$ را در نقطه $(1, 1)$ بنویسید.

با استفاده از این روش می‌توانید معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = x^2$ را در نقاط دیگر نیز بیابید. آیا برای نمودار توابع دیگر نیز می‌توان معادله خط مماس بر نقاط آن‌ها را یافت؟ در مورد چند تابع دیگر این مطلب را آزمایش کنید.

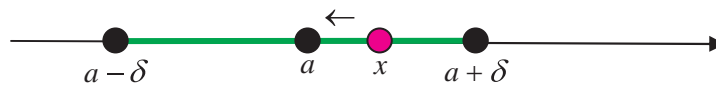


همسایگی های یک نقطه

آیا می توان از حد تابع \sqrt{x} در نقطه -1 صحبت کرد؟ شرط اصلی در بررسی حد یک تابع در یک نقطه مانند a آن است که بتوان از نقاط دامنه آن تابع به نقطه a نزدیک شد. اما دامنه تابع \sqrt{x} بازه $[0, \infty)$ است و نمی توان از نقاط این بازه به -1 نزدیک شد.



منظور از نزدیک شدن مقادیرهای یک متغیر به یک نقطه مانند a آن است که بتوان مقادیرهایی برای متغیر قرار داد که فاصله آن تا a از هر عددی که انتخاب شده کمتر شود. برای آن که بتوان از داخل دامنه تابعی، به نقطه ای مانند a از دو طرف (راست و چپ) نزدیک شد، دامنه آن تابع باید شامل یک بازه به صورت $(a - \delta, a + \delta)$ باشد. البته خود a لزومی ندارد در دامنه آن تابع باشد.



بازه های به صورت $(a - \delta, a + \delta)$ که δ عددی مثبت است را یک همسایگی a می نامند. اگر a را از این همسایگی حذف کنیم آن را یک همسایگی محذوف a می نامند.

شرط آن که بتوان از حد (دوطرفه) یک تابع در یک نقطه a صحبت کنیم آن است که آن تابع در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این حالت می گوئیم تابع در اطراف a تعریف شده است.



مثال

۱: تابع $\sqrt{1-x^2}$ در اطراف صفر و خود صفر تعریف شده است. زیرا در همسایگی $(-1, 1)$ از صفر تعریف شده است.

۲: تابع $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ در اطراف صفر تعریف شده است اما در خود صفر تعریف نشده است زیرا دامنه تعریف آن یک همسایگی محذوف صفر، $(0, 1) \cup (-1, 0)$ ، است.



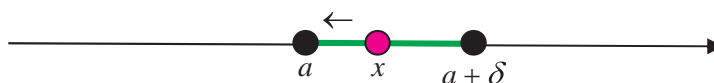
بحث در کلاس

آیا می توان از حد چپ یا راست تابع $\sqrt{1-x^2}$ در نقطه ۱ صحبت کرد؟

برای بررسی حد چپ یک تابع f در نقطه‌ای مانند a ، متغیر x (در دامنه f) باید بتواند از چپ به a نزدیک شود. این به معنای آن است که دامنه f باید شامل بازه‌ای به صورت $(a - \delta, a)$ باشد. چنین بازه‌هایی را یک همسایگی چپ a نامیم و در این حالت گوییم تابع f در یک همسایگی چپ a تعریف شده است.



به طور مشابه، بازه‌های به صورت $(a, a + \delta)$ را یک همسایگی راست a نامیم و اگر دامنه تابعی شامل یک همسایگی راست a باشد، گوییم آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده است.



مثال

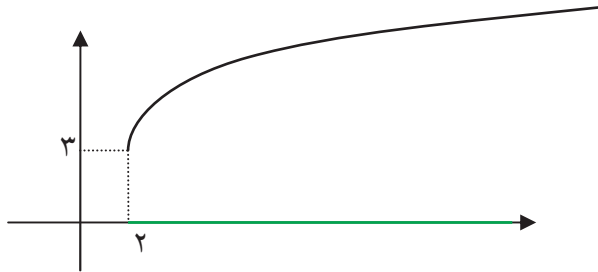
۱: تابع $\sqrt{1-x^2}$ در یک همسایگی چپ ۱ و در یک همسایگی راست -1 تعریف شده است، اما در اطراف این دو نقطه تعریف شده نیست.

شرط آن که بتوان از حد چپ یک تابع در نقطه‌ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد.
به طور مشابه، شرط آن که بتوان از حد راست یک تابع در نقطه‌ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد.

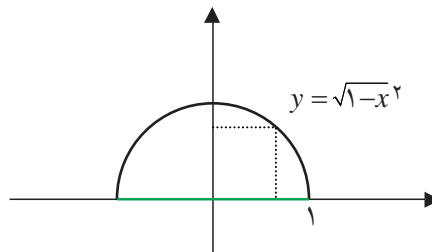


مثال

۲: تابع $\sqrt{x-2} + 3$ در اطراف ۲ تعریف نشده است ولی در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده است و می‌توانیم حد راست آن را در ۲ حساب کنیم که برابر ۳ است.



۳: تابع $\sqrt{1-x^2}$ در اطراف ۱ تعریف نشده است ولی در یک همسایگی چپ ۱ تعریف شده است و می‌توانیم حد چپ آن را در ۱ حساب کنیم که برابر صفر است.



تمرین در کلاس



برای تابع $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-[x]}$ به سؤالات زیر جواب دهید.

- ۱- این تابع در همسایگی کدام نقاط تعریف شده است؟
- ۲- این تابع در همسایگی محذوف کدام نقاط تعریف شده است که در خود آن نقاط تعریف نشده است؟
- ۳- این تابع در یک همسایگی چپ کدام نقاط تعریف شده است که در هیچ همسایگی راست آن نقاط تعریف نشده است؟
- ۴- این تابع در یک همسایگی راست کدام نقاط تعریف شده است که در هیچ همسایگی چپ آن نقاط تعریف نشده است؟



قرارداد: اگر تابعی مانند f فقط در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، منظور از حد f در a همان حد راست f در a است و نماد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ به معنای $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ خواهد بود.

به طور مشابه اگر f فقط در یک همسایگی چپ نقطه a تعریف شده باشد، منظور از حد f در a همان حد چپ f در a است و نماد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ به معنای $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ خواهد بود.


مثال

۱: برای تابع $y = \sqrt{x}$ که نسبت به صفر فقط در یک همسایگی راست صفر تعریف شده است داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

۲: برای تابع $y = \frac{1}{[x]-2}$ که نسبت به ۲ فقط در یک همسایگی چپ ۲ تعریف شده است داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{[x]-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{[x]-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -1 = -1$$


مسائل


۱- با رسم جدول مقدارهای توابع زیر در اطراف نقطه داده شده (در صورت لزوم از ماشین حساب استفاده کنید) بررسی کنید که آیا حد این توابع در آن نقطه موجود است؟ در صورت وجود مقدار حد را تعیین کنید و به زبان ریاضی بنویسید.

$$a = -1, y = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -1 \\ x^3 + 3 & -1 < x \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad a = 0, y = \frac{x^2 - x}{x} \quad \text{(الف)}$$

$$a = 0, y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{(د)} \quad a = 2, y = x[x] \quad \text{(ج)}$$

$$a = 0, y = \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \text{(و)} \quad a = 1, y = \frac{\sqrt{|x(x-1)|}}{x^2 - 1} \quad \text{(ه)}$$

۲- با رسم نمودار توابع زیر در اطراف نقطه داده شده وجود حد و حد راست و حد چپ و مقدار حد را در آن نقاط بررسی کنید.

$$a = 2, y = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 2 \\ 6 & x = 2 \\ -x^2 + 9 & 2 < x \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad a = 1/2, y = [x] \quad \text{(الف)}$$



$$a = -3, y = 1 - \sqrt{1-x} \quad (\text{د}) \qquad a = 2, y = x - [x] \quad (\text{ج})$$

$$a = 0, y = \frac{x}{|x|} \quad (\text{ه})$$

۳- اگر دو تابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a بر هم منطبق باشند، توضیح دهید که چرا حد آن‌ها در نقطه a مانند یکدیگر است، یعنی اگر یکی از آن‌ها در a حد داشته باشد، دیگری هم حد دارد و حد آن‌ها مساوی است.

۴- در هر یک از حالت‌های زیر نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط گفته شده را داشته باشد.

الف) تابع در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

ب) تابع در ۱ تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف ۱ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

ج) تابع در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در صفر باشد.

د) تابع در یک همسایگی ۱- تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در ۱- باشد.

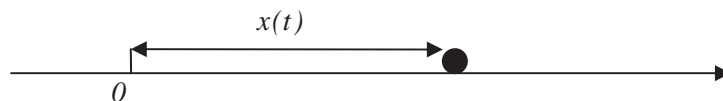
ه) تابع در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی چپ ۲ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد راست داشته باشد.

و) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ و راست متفاوت داشته باشد.

ز) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ داشته باشد ولی حد راست نداشته باشد.

۵- متحرکی روی محور x ‌ها به گونه‌ای حرکت می‌کند که در هر لحظه t ($t \geq 0$) در مکان $x(t)$ قرار دارد و

$$x(t) = t^2 - t$$



با رسم نمودار این تابع در دامنه داده شده چگونگی حرکت این متحرک را توصیف کنید و سرعت لحظه‌ای آن را در لحظه $t = 2$ به دست آورید.

۶- معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x$ را در نقطه $(1, -1)$ به دست آورید.

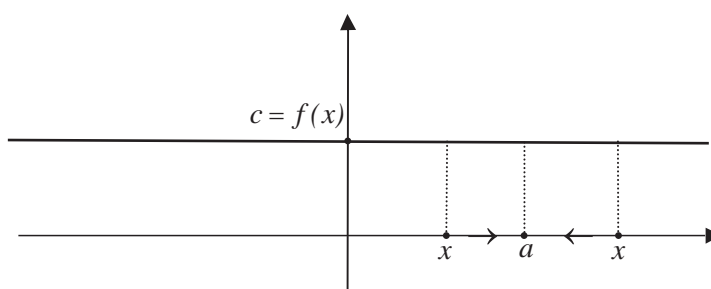


قضایای حد توابع

حد برخی توابع خاص را به سادگی می توان به دست آورد.

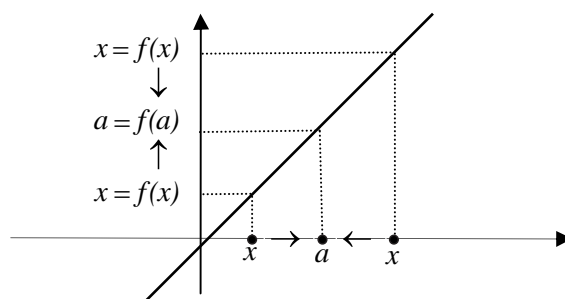
مثال

۱: تابع ثابت $f(x) = c$ در همه نقاط حد دارد و حد آن در همه نقاط c است.



$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

۲: تابع $f(x) = x$ در همه نقاط حد دارد و حد آن در هر نقطه مانند a برابر a است.



$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

بحث در کلاس

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در اطراف نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشند و در این نقطه حد داشته باشند، آیا تابع $f(x) + g(x)$ نیز در a حد دارد؟ حد آن چه می تواند باشد؟ در مورد تابع $f(x)g(x)$ چه می توان گفت؟



- ۱- دو تابع $f(x) = 3 + 2x$ و $g(x) = 2 - x$ را در نظر بگیرید و توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ را بسازید.
 ۲- برای بررسی حد این چهار تابع در صفر جدول زیر را تکمیل کنید.

x	-0.1 -0.01 -0.001 \rightarrow 0 \leftarrow 0.001 0.01 0.1
$f(x)$	\rightarrow ? \leftarrow
$g(x)$	\rightarrow ? \leftarrow
$f(x) + g(x)$	\rightarrow ? \leftarrow
$f(x)g(x)$	\rightarrow ? \leftarrow

- ۳- حد توابع $f(x)$ و $g(x)$ در صفر چیست؟
 ۴- حد توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ در صفر چیست؟
 ۵- چه ارتباطی بین حد توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ و حد توابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌باید؟

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = K$ با نزدیک شدن مقدارهای x به a مقدارهای $f(x)$ به L و مقدارهای $g(x)$ به K نزدیک می‌شوند، پس مقدارهای $f(x) + g(x)$ به $L + K$ نزدیک می‌شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می‌تواند کمتر شود. پس تابع $f(x) + g(x)$ در a حد دارد و حد آن $L + K$ است. همچنین مقدارهای $f(x)g(x)$ به LK نزدیک می‌شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می‌تواند کمتر شود. پس تابع $f(x)g(x)$ در a حد دارد و حد آن LK است. به عبارت دیگر قضایای زیر برقرارند.

اگر دو تابع f و g روی دامنه یکسانی تعریف شده باشند و در نقطه a حد داشته باشند آن‌گاه توابع $f + g$ و $f \cdot g$

نیز در a حد دارند و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$



مثال

۱: تابع $y = x$ در هر نقطه‌ای مانند a حد دارد و حد آن a است بنابراین تابع $y = x^2$ نیز در a حد دارد و حد آن a^2 است، زیرا

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = (\lim_{x \rightarrow a} x)(\lim_{x \rightarrow a} x) = a \cdot a = a^2$$

۲: دو تابع $y = x$ و $y = x^2$ در هر عددی مانند a حد دارند و حد آن‌ها به ترتیب a و a^2 است، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 + \lim_{x \rightarrow a} x = a^2 + a$$

۳: حد تابع $y = (x^2 + \frac{x}{4})(x-1)$ را در نقطه ۴ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + \frac{x}{4})(x-1) = \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + \frac{x}{4}) \cdot \lim_{x \rightarrow 4} (x-1) = (4^2 + \frac{4}{4})(4-1) = 54$$

تمرین در کلاس



۱- با استقرا ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

۲- ثابت کنید برای هر تابع چندجمله‌ای مانند $P(x)$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

در بالا دیدیم که توابع چندجمله‌ای به گونه‌ای هستند که در هر نقطه حد دارند و حد آن‌ها همان مقدار تابع در آن نقاط است. بسیاری از توابع مهمی که تا این جا دیده‌ایم این خاصیت را دارند که بدون اثبات برخی از آن‌ها را در این جا بیان می‌کنیم. با رسم نمودار این توابع می‌توانید درستی حدهای زیر را توجیه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} b^x = b^a$$

در حدگیری‌های بالا، a در دامنه تابع باشد.



بحث در کلاس

اگر تابع $f(x)$ در اطراف نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و در a حد داشته باشد، آیا تابع $\frac{1}{f(x)}$ نیز در a حد دارد؟ حد آن چه می‌تواند باشد؟



فعالیت ۵



۱- تابع $f(x) = 1 - 2x$ را در نظر بگیرید. برای بررسی حد دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در نقطه ۲ جدول زیر را تکمیل کنید.

x	$1/9$ $1/99$ $1/999$ \rightarrow \leftarrow $2/001$ $2/01$ $2/1$
$f(x)$	\rightarrow ? \leftarrow
$\frac{1}{f(x)}$	\rightarrow ? \leftarrow

۲- حدهای دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در نقطه ۲ چه مقدار هستند و چه رابطه‌ای با هم دارند؟
 ۳- برای بررسی حد دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در نقطه $\frac{1}{4}$ جدول زیر را تکمیل کنید.

x	$0/4$ $0/49$ $0/499$ \rightarrow \leftarrow $0/501$ $0/51$ $0/6$
$f(x)$	\rightarrow ? \leftarrow
$\frac{1}{f(x)}$	\rightarrow ? \leftarrow

۴- آیا حدی برای $\frac{1}{f(x)}$ می‌یابید؟ دلیل آن را چه می‌دانید؟

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ به معنای آن است که با نزدیک شدن مقدارهای x به a مقدارهای $f(x)$ به L نزدیک می‌شوند. اگر $L = 0$

مقدارهای $\frac{1}{f(x)}$ از لحاظ قدرمطلق در حال افزایش هستند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند و تابع $\frac{1}{f(x)}$ در a حد نخواهد داشت. اما اگر $L \neq 0$ مقدارهای $\frac{1}{f(x)}$ به عدد $\frac{1}{L}$ نزدیک می‌شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می‌تواند کمتر شود. پس



در این حالت تابع $\frac{1}{f(x)}$ در a حد دارد و حد آن $\frac{1}{L}$ است. بنابراین می‌توانیم قضیه زیر را بیان کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad \text{اگر } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0 \text{ آن گاه}$$



مثال

۱: حد تابع $y = \frac{1}{\sin x}$ را در $\frac{\pi}{4}$ حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

۲: حد تابع $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ را در $x = -1$ حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} x \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 + 1} = -1 \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 1} = -\frac{1}{2}$$

۳: حد تابع $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$ را در π بررسی می‌کنیم. از آن جا که $\lim_{x \rightarrow \pi} 1 + \cos x = 0$ تابع $f(x)$ در $x \rightarrow \pi$ حد ندارد.

تمرین در کلاس



۱- حد توابع زیر را در نقطه داده شده در صورت وجود بیابید.

الف) $y = \cos^2 x + x^2$ در π (ب) $y = \frac{\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$ در ۴

ج) $y = \frac{x \sin x}{(1+x) \cos x}$ در π (د) $y = 2^{x+1} - 3^{2x}$ در ۲

۲- اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در a حد داشته باشند، نشان دهید تابع $f(x) - g(x)$ نیز در a حد دارد و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

۳- اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در a حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ نشان دهید تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز در a حد دارد

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

و



محاسبه حد در توابع کسری

در محاسبه بسیاری از حدهای مهم به حالتی برخورد می‌کنیم که تابع به صورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ است و حد صورت و مخرج در نقطه مورد نظر صفر است. قضایای بالا هیچ کمکی برای محاسبه حد این گونه توابع نمی‌کنند. این حالت را اصطلاحاً حالت $\frac{0}{0}$ می‌نامند. برای محاسبه حد این گونه توابع (در صورت وجود) یکی از راه‌ها، ساده‌سازی این کسر و تبدیل آن به حالتی است که عمل محاسبه حد طبق قضایای بالا امکان‌پذیر باشد.

مثال

۱: حد تابع $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ را در 0° بررسی می‌کنیم.
در حالت $\frac{0}{0}$ قرار داریم و لازم است ابتدا یک ساده‌سازی از کسر به عمل آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = 2$$

۲: حد تابع $y = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ را در ۱ بررسی می‌کنیم.

محاسبه این حد به طور مستقیم امکان‌پذیر نیست، ولی می‌توانیم آن را به شکل زیر ساده کنیم و سپس حد را حساب کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2$$

اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و در محاسبه حد $\frac{P(x)}{Q(x)}$ در نقطه a در حالت $\frac{0}{0}$ باشیم، این به معنای آن است که $P(a) = 0$ و $Q(a) = 0$. یعنی صورت و مخرج بر $x - a$ بخش‌پذیرند و می‌توان کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را ساده کرد و عامل $x - a$ را از صورت و مخرج حذف کرد. با ادامه این عملیات در صورت وجود حد، می‌توان آن را محاسبه کرد.

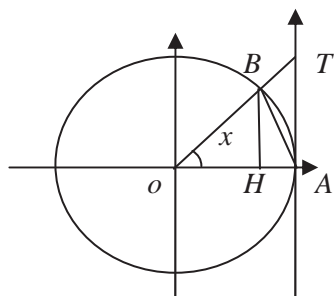
یکی از حدهای مهم حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ در 0° است. این حد نیز از حالات $\frac{0}{0}$ است ولی نمی‌توان با ساده کردن معمولی این کسر، حد آن را حساب کرد. قبلاً با محاسبات تقریبی تابع $\frac{\sin x}{x}$ در نزدیکی‌های صفر حدس زده‌ایم که حد آن ۱ است ولی در این جا می‌خواهیم استدلال دقیق‌تری برای آن بیابیم.



فعالیت ۶



شکل مقابل یک دایره مثلثاتی را نشان می‌دهد.



۱- مساحت‌های مثلث‌های OBA و OTA و قطاع OBA از دایره را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه (مثبت) x (برحسب رادیان) و خود زاویه x محاسبه کنید و نشان دهید:

$$\frac{1}{4} \sin x \leq \frac{1}{4} x \leq \frac{1}{4} \tan x$$

۲- نتیجه بگیرید برای مقدارهای کوچک و مثبت x داریم:

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

۳- با نزدیک شدن x به صفر $\frac{1}{\cos x}$ به چه عددی نزدیک می‌شود؟ با نزدیک شدن x به صفر برای تابع $\frac{x}{\sin x}$ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ حد راست $\frac{x}{\sin x}$ در صفر چقدر است؟

۴- با توجه به زوج بودن تابع $\frac{x}{\sin x}$ حد چپ آن در صفر چیست؟ حد این تابع در صفر چقدر است؟

۵- نتیجه بگیرید $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

مثال

۱: حد تابع $y = \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ را در 0 حساب می‌کنیم.

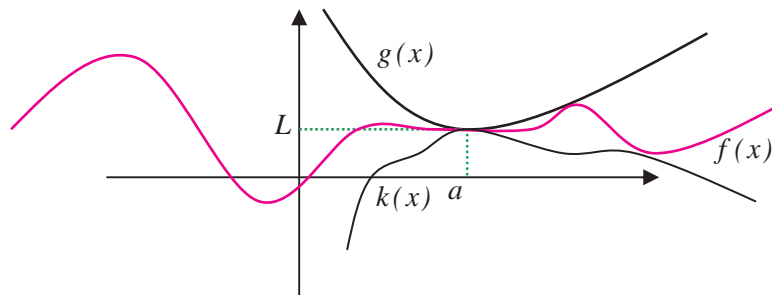
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2$$



در فعالیت قبل برای یافتن حد تابع $\frac{x}{\sin x}$ دیدیم که این تابع بین تابع $\frac{1}{\cos x}$ و تابع ثابت ۱ قرار گرفته است و این دو تابع در صفر حد یکسان ۱ دارند. از این نکته نتیجه می‌شود که تابع $\frac{x}{\sin x}$ نیز به ناچار با نزدیک شدن x به صفر باید به ۱ نزدیک شود. این مطلب در حالت کلی هم درست است که آن را قضیه افشردگی می‌نامند.

اگر تابعی مانند $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a بین دو تابع $g(x)$ و $k(x)$ قرار گیرد، مثلاً

$$k(x) \leq f(x) \leq g(x), \text{ و } g \text{ و } k \text{ در نقطه } a \text{ دارای حد یکسان } L \text{ باشند، نتیجه می‌شود } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$



مثال

۲: حد تابع $x \cos \frac{1}{x}$ را در صفر حساب می‌کنیم.

از آن جا که $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$ برای مقادیر مثبت x داریم $-x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq x$ و برای مقادیر منفی x داریم

$x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq -x$. توابعی که در دو طرف نامساوی هستند در صفر حد یکسان صفر دارند، پس $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$.



مسائل



۱- حدهای زیر را حساب کنید.

(ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$

(الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

(د) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 1}$

(ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{x^2}$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \quad (\text{و})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin \frac{x}{4}} \quad (\text{ح})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \sqrt{x+1} \quad (\text{ه})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \quad (\text{ز})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x} \quad (\text{ط})$$

۲- ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ معادل با آن است که $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$.

۳- با توجه به ایده شهودی حد تابع توضیح دهید که چرا دو شرط $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ با یکدیگر معادلند.

۴- اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی باشند که در اطراف نقطه a تعریف شده‌اند و f در a حد دارد ولی g در a حد ندارد، نشان دهید $f+g$ در a حد ندارد.

۵- دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف صفر تعریف شده‌اند و هیچ‌کدام در صفر حد ندارند ولی $f+g$ در صفر حد دارد.

۶- دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف a تعریف شده‌اند و f در a حد داشته باشد ولی g در a حد نداشته باشد، با این حال fg در a حد داشته باشد.

۷- آیا تابع $\sin \frac{1}{x}$ در اطراف صفر تعریف شده است؟ آیا این تابع در صفر حد دارد؟ درستی نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

با توجه به این نامساوی در مورد حد تابع $x \sin \frac{1}{x}$ در صفر اظهار نظر کنید و دلیل درستی نظر خود را توضیح

دهید.



فعالیت ۷



۱- نمودار دو تابع $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ را رسم کنید.

۲- حد این دو تابع را در نقطه ۲ به دست آورید.

۳- این دو تابع چه شباهت‌ها و چه تفاوت‌هایی دارند و چرا حد آن‌ها در نقطه ۲ با هم مساوی است؟

۴- حد این دو تابع در نقطه ۲ با مقدارهای این دو تابع در نقطه ۲ چه رابطه‌ای دارند؟

۵- یکسانی حد f و مقدار f در نقطه ۲ و تفاوت حد g و مقدار g در نقطه ۲، موجب پیدایش کدام ویژگی در

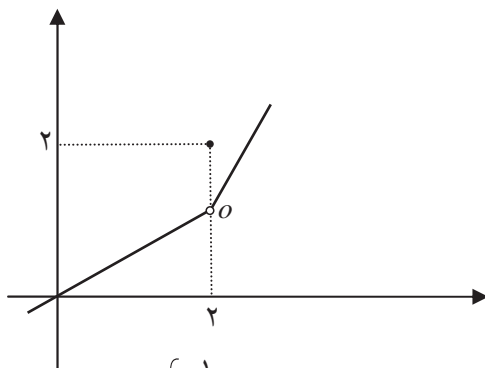
نمودار این دو تابع شده است.

در بررسی حد یک تابع در یک نقطه، لزومی ندارد تابع در آن نقطه تعریف شده باشد، اما اگر تابع در آن نقطه تعریف شده باشد در صورت وجود حد، دو حالت ممکن است رخ دهد.

الف) حد تابع در آن نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه است.

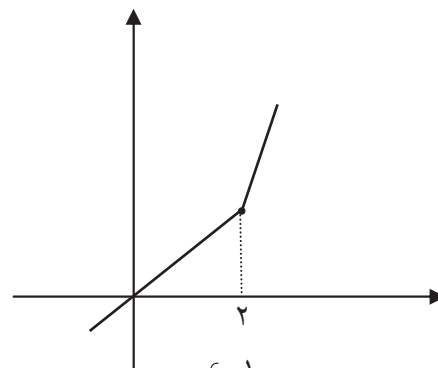
ب) حد تابع در آن نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه نیست.

برای مثال، این دو حالت در نمودار توابع زیر نشان داده شده‌اند.



$$y = \begin{cases} \frac{1}{4}x & x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ 2x - 3 & 2 < x \end{cases}$$

حالت (ب)



$$y = \begin{cases} \frac{1}{4}x & x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ 2x - 3 & 2 < x \end{cases}$$

حالت (الف)



همان طور که مشاهده می‌شود در حالت (الف) نمودار تابع یک پارچه و به هم پیوسته است ولی در حالت (ب) نمودار تابع از هم گسسته شده است. علت این موضوع آن است که در حالت (الف) حد تابع در هر نقطه برابر مقدار تابع در همان نقطه است ولی در حالت (ب) در نقطه ۲ حد تابع و مقدار تابع مساوی نیستند. به همین خاطر تعریف زیر بنا می‌شود.

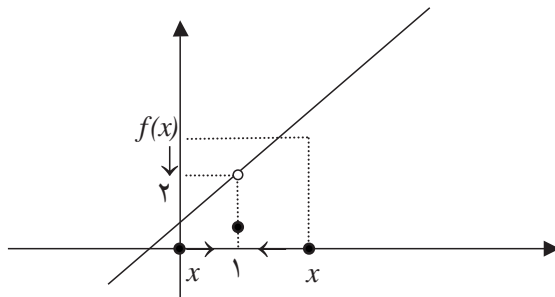
فرض کنید تابع f در نقطه a و در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) a تعریف شده باشد. اگر حد این تابع در a موجود و برابر $f(a)$ باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ، گوییم تابع f در a پیوسته است.



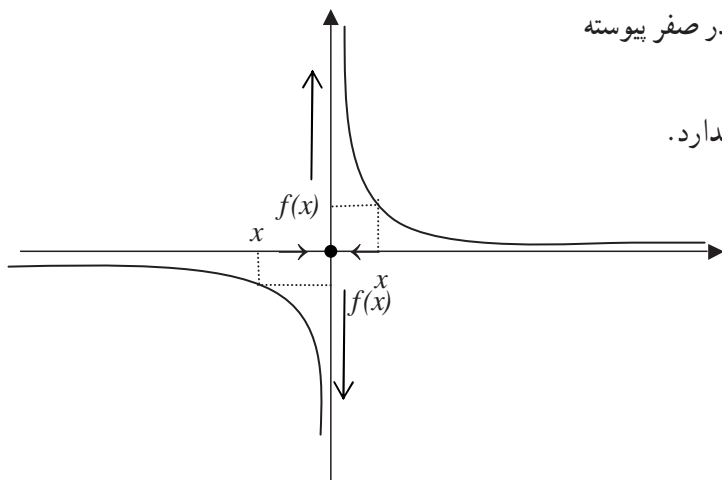
مثال

۱: توابع چندجمله‌ای در هر نقطه‌ای پیوسته‌اند، زیرا قبلاً دیدیم که برای هر تابع چندجمله‌ای $P(x)$ در هر نقطه a داریم: $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$.
 ۲: توابع $b^x, \cos x, \sin x, \sqrt[k]{x}$ در همه نقاط دامنه خود پیوسته‌اند.

۳: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ در نقطه ۱ پیوسته نیست، زیرا حد آن در نقطه ۱ برابر ۲ است ولی $f(1) = 1$.



۴: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر پیوسته نیست، زیرا این تابع در صفر حد ندارد.





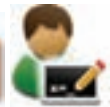
۵: تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ در نقطه ۱ پیوسته است. زیرا در نقطه ۱ حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در ۱ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0 = f(1)$$

توجه داشته باشید که پیوستگی توابع در نقاط انتهایی دامنه خود به معنای آن است که حد چپ یا راست تابع در آن نقطه برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد.

آیا تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ در ۱ پیوسته است؟ از پیوستگی این تابع در ۱ نمی‌توانیم صحبت کنیم چون این تابع در ۱ تعریف نشده است. شرط صحبت از پیوستگی یا ناپیوستگی یک تابع در یک نقطه آن است که تابع در آن نقطه و یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) آن نقطه تعریف شده باشد.

تمرین در کلاس



با رسم نمودار توابع زیر، پیوستگی آن‌ها را در نقطه داده شده بررسی کنید.

$$y = \frac{1}{x} - 1 \quad \text{در نقطه دلخواه } a \neq 0$$

$$a = 0 \quad \text{در نقطه } y = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 0 \\ x^2 - x & 0 < x \end{cases} \quad -2$$

$$a = -1 \quad \text{در نقطه } y = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq -1 \\ x+1 & -1 < x \end{cases} \quad -3$$

$$a = -1 \quad \text{در نقطه } y = [x] - 4 \quad \text{با دامنه } [-1, 1] \quad -4$$

اگر تابعی در تمام نقاط دامنه خود پیوسته باشد، آن را تابعی پیوسته می‌نامند.



مثال

۱: توابع چندجمله‌ای و $b^x, \cos x, \sin x, \sqrt[k]{x}$ در همه نقاط دامنه خود پیوسته‌اند و در نتیجه توابعی پیوسته‌اند.

۲: تابع $y = \frac{1}{x}$ پیوسته است زیرا در تمام نقاط دامنه خود پیوسته است. (صفر در دامنه این تابع نیست)

۳: تابع $y = [x]$ که روی IR تعریف شده است در نقاط صحیح ناپیوسته است. اما اگر تابع $y = [x]$ را با دامنه $[0, 2]$ در نظر بگیریم، این تابع در نقطه صفر پیوسته است ولی در نقاط ۱ و ۲ هم چنان ناپیوسته است.

اگر $f(x)$ تابعی با مقدارهای مثبت باشد و تابع $\sqrt{f(x)}$ را بسازیم و $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a حدی برابر L داشته باشد، آیا تابع $\sqrt{f(x)}$ نیز در a حد دارد؟ و آیا حد آن \sqrt{L} می‌شود؟
 \sqrt{t} تابعی پیوسته است و اگر مقدارهای t به عددی مانند L نزدیک شوند مقدارهای \sqrt{t} نیز به \sqrt{L} نزدیک می‌شوند. با نزدیک شدن مقدارهای x به a ، مقدارهای $f(x)$ به L نزدیک می‌شوند، در نتیجه مقدارهای $\sqrt{f(x)}$ به \sqrt{L} نزدیک می‌شوند، یعنی تابع $\sqrt{f(x)}$ در a حد دارد و حد آن \sqrt{L} است. به عبارت دیگر:

اگر $f(x)$ تابعی با مقدارهای مثبت باشد و در نقطه‌ای مانند a حد داشته باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

علت درستی رابطه بالا پیوستگی تابع $y = \sqrt{x}$ است و مطلب بالا برای هر تابع پیوسته دیگری هم برقرار است. اگر $g(x)$ تابعی پیوسته و $f(x)$ تابعی باشد که در نقطه‌ای مانند a حدی برابر L داشته باشد و ترکیب $g(f(x))$ قابل انجام باشد (برد f داخل دامنه g باشد)، آنگاه تابع $g(f(x))$ نیز در a حد دارد و حد آن $g(L)$ است. به عبارت دیگر با شرایط بالا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$$



مثال

۴: حد تابع $y = \sqrt{\sin x}$ را در نقطه $\frac{\pi}{6}$ می‌یابیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sqrt{\sin x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۵: حد تابع $\sin \sqrt{\pi^2 - x^2}$ را در نقطه $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ می‌یابیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \sin \sqrt{\pi^2 - x^2} &= \sin(\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{\pi^2 - x^2}) = \sin \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} (\pi^2 - x^2)} \\ &= \sin \sqrt{\pi^2 - \frac{8\pi^2}{9}} = \sin \sqrt{\frac{\pi^2}{9}} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

مسائل

۱- با رسم نمودار توابع زیر تعیین کنید کدام یک از آن‌ها ناپیوستگی دارند و در چه نقاطی ناپیوسته‌اند؟

(ب) $y = x + [x]$

(الف) $y = |x - 1| + 2$

(د) $y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & 1 < x \end{cases}$

(ج) $y = x + |x|$

۲- در تابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته باشد.

$$y = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x \leq 1 \\ x - 2a & 1 < x \end{cases}$$

۳- ثابت کنید به ازای هیچ مقداری برای a تابع زیر پیوسته نخواهد بود.

$$y = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

۴- نمودار یک تابع را رسم کنید که در صفر ناپیوسته است ولی در صفر حد دارد.

۵- نمودار یک تابع را رسم کنید که در دو نقطه صفر و ۱ ناپیوسته است و در این نقاط حد ندارد.

۶- اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع پیوسته‌ای باشند، نشان دهید توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ نیز پیوسته‌اند. در مورد

پیوستگی $\frac{f(x)}{g(x)}$ چه می‌توان گفت؟

۷- اگر f و g توابع پیوسته‌ای باشند در مورد پیوستگی تابع $g \circ f$ چه می‌توان گفت؟