

# مثلثات

فصل ٥



## زوایا و اندازه‌ی زوایا

با دیدن و تماشا کردن، می‌توان چیزهای زیادی یاد گرفت. بعضی از شب‌ها به ستاره‌ها نظاره می‌کنیم و از این همه اجرام آسمانی در تاریکی شب حیرت زده می‌شویم و لذت می‌بریم. آیا تاکنون به این موضوع فکر کرده‌اید که این اجرام آسمانی علاوه بر شگفت‌انگیزی و تماشایی بودن چه استفاده‌هایی برای انسان‌ها داشته و دارند؟ برای پی بردن به این موضوع می‌توانید در عالم خیال خود به گذشته‌های دور بروید و در وسط اقیانوسی یک کشتی را تصور کنید که بادبان‌هایش برافراشته و در دل تاریکی شب به پیش می‌رود. تصور کنید که از هر طرف هزاران کیلومتر آب است، هیچ نشانه‌ی زمینی مانند ساحل یا فانوس دریایی وجود ندارد. ناخدا چگونه مسیر را تشخیص می‌دهد و کشتی را به سمت مقصد هدایت می‌کند؟ مسیر بادها هم هر از گاهی تغییر می‌کند و ناخدا به ملوانان دستور تنظیم بادبان‌ها را می‌دهد. هیچ راه و روشی روی زمین نمی‌توان یافت که به ناخدا کمک کند تا جهت‌ها را تشخیص دهد و مسیر حرکت را گم نکند. پس باید در آسمان‌ها به دنبال نشانه‌ای بود! ملوانان می‌توانند با کمک ستارگان، جهت‌های چهارگانه را به راحتی تشخیص دهند که از جمله آن‌ها می‌توان به ستاره‌ی قطبی اشاره کرد.

پیامبر اکرم (ص) در مورد آیه‌ی «و بالنجم هم یهتدون» با ستاره (یا آن ستاره) راه را می‌یابند، فرمودند: منظور از ستاره در آیه‌ی فوق جدی (ستاره‌ی قطبی) است. زیرا آن ستاره‌ای است که غروب نمی‌کند و بر اساس آن، قبله مشخص می‌شود و به وسیله‌ی آن اهل بر و بحر (خشکی و دریا) راه را می‌یابند.

ستاره‌ی قطبی تقریباً در امتداد محور چرخش زمین (خطی که دو قطب شمال و جنوب را به هم وصل می‌کند) قرار گرفته است. به این معنا که اگر شخصی در قطب شمال قرار داشته باشد این ستاره را تقریباً بالای سر خود می‌بیند و ما برای این که رو به سوی قطب شمال حرکت کنیم با دیدن این ستاره که در قطب شمال قرار گرفته است مسیر خود را پیدا می‌کنیم.<sup>۱</sup>

---

۱. اگر زمین به دور محورش نمی‌چرخید ستاره‌ی قطبی و تمام ستارگان در جای خود ثابت بودند. اما با چرخش زمین ظاهراً به نظر می‌آید که هر ستاره دایره‌ای را در طول شبانه‌روز می‌پیماید. به این حرکت، حرکت ظاهری می‌گویند.



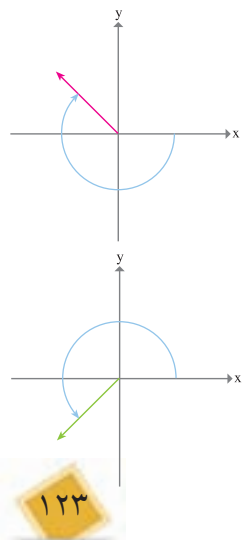
ستاره‌ی قطبی روی دایره‌ای در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند و این ستاره در هر ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه و  $\frac{4}{33}$  ثانیه، یعنی  $9972723^\circ$  شبانه‌روز یک بار این دایره‌ی کوچک را طی می‌کند.

۱- اگر یک دوران کامل خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه‌ی  $36^\circ$  درجه باشد و فرض کنیم هر ۲۴ ساعت یک بار این دایره به وسیله‌ی ستاره‌ی قطبی طی می‌شود، به نظر شما  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{2}{3}$  و  $1\frac{1}{4}$  دوران طی چه مدتی صورت می‌پذیرد؟

۲- حرکت ستاره‌ی قطبی را روی صفحه‌ی مختصات در نظر گرفته و فرض کنید ستاره‌ی قطبی از نقطه‌ای روی قسمت مثبت محور x ها به طول ۲ واحد در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت شروع به حرکت کند. اگر ستاره‌ی قطبی به اندازه‌ی  $\frac{1}{6}$  و  $1\frac{1}{6}$  و  $2\frac{1}{6}$  دایره را طی کند، اندازه‌ی زاویه‌ی طی شده‌ی هریک از نقاط را نسبت به مبدأ مختصات مشخص نمایید.

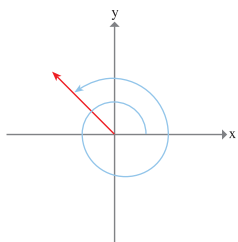
در صفحه‌ی مختصات یک زاویه به وسیله‌ی دو نیم خط که رأس مشترک دارند ایجاد می‌شود که یک نیم خط را به عنوان ضلع ابتدایی که مکان شروع حرکت نیم خط دوم است و دیگری را ضلع انتهایی که مکان انتهایی نیم خط می‌باشد، در نظر می‌گیریم.

یک زاویه به وسیله‌ی مقدار و جهت چرخش از ضلع ابتدایی به ضلع انتهایی تعیین می‌شود. اگر تغییر مکان نیم خط دوم از مکان شروع در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، زاویه با یک مقدار منفی و اگر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، با یک مقدار مثبت مشخص می‌شود.



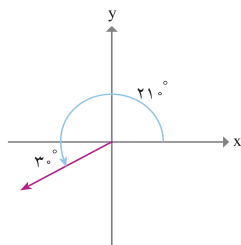
۱- یک زاویه‌ی منفی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

یک زاویه‌ی مثبت در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت.



یک زاویه در دستگاه مختصات در موقعیت استاندارد است، اگر رأس آن در مبدأ و ضلع اولیه‌اش روی قسمت مثبت محور  $x$  باشد، موقعی که ضلع انتهایی حرکت می‌کند ممکن است در بعضی مواقع بیش‌تر از یک دور کامل بچرخد. مانند شکل مقابل:

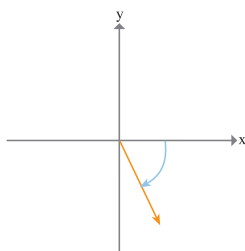
اندازه‌ی یک زاویه که ضلع انتهایی آن دقیقاً یک دور کامل بچرخد،  $360^\circ$  درجه است.



۲- زوایای  $21^\circ$  و  $-6^\circ$  درجه را در موقعیت استاندارد رسم کنید.

$$\text{داریم: } 21^\circ = 180^\circ + 3^\circ$$

ضلع انتهایی به اندازه‌ی  $3^\circ$  درجه از محور  $x$  ها می‌گذرد.



چون  $-6^\circ$  درجه یک زاویه‌ی منفی است، ضلع انتهایی به اندازه‌ی  $6^\circ$  درجه در جهت عقربه‌های ساعت از محور  $x$  ها عبور می‌کند.



۱- هر یک از عبارت‌های زیر را در موقعیت استاندارد به درجه بیان کنید.

الف)  $\frac{1}{3}$  دور کامل در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

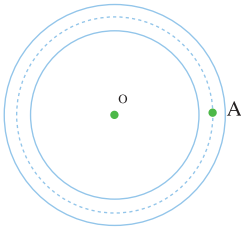
ب)  $\frac{3}{4}$  دور کامل در جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

۲- زوایای  $405^\circ$  و  $-120^\circ$  درجه را در موقعیت استاندارد رسم کنید.

۳- اگر ستاره‌ای حول محور عبور کننده‌ی از مرکز زمین روی مسیر دایره‌ای شکل به شعاع یک واحد به طور ظاهری بگردد، دوران یافته‌ی این ستاره از نقطه‌ی  $(1, 0)$  را تحت زوایای  $36^\circ, 27^\circ, 18^\circ, 3^\circ$  در موقعیت استاندارد مشخص کنید.

## واحد دیگری برای اندازه گیری زاویه

یکی از ورزش‌های بسیار مفرح که اکثر مردم به راحتی می‌توانند این ورزش را انجام دهند، ورزش دوچرخه سواری است که حتی در مسابقات المپیک یکی از ورزش‌های پر طرفدار است.

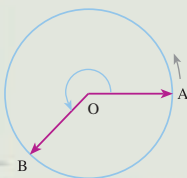


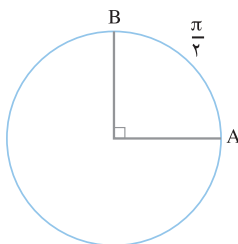
فرض کنیم در ورزشگاه شهر، یک پیست دوچرخه سواری به صورت دایره‌ای وجود دارد. معلم ورزش مدرسه از دانش آموزان می‌خواهد که در مسابقه دوچرخه سواری دور پیست دایره‌ای شرکت کنند. دانش آموزان از نقطه‌ی A که در شکل مقابل مشخص شده است در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت شروع به رکاب زدن می‌کنند. علی یکی از دانش آموزانی است که در این مسابقه شرکت کرده است. مکان رکاب زدن علی، دایره‌ای به شعاع یک کیلومتر است که با زاویه‌ای که علی حول O چرخیده است مشخص می‌شود.

- ۱- اگر زاویه‌ای که علی چرخیده است  $90^\circ$  درجه باشد، او چه مسافتی را پیموده است؟
  - ۲- اگر او  $315^\circ$  درجه از دایره را طی کرده باشد، چه مسافتی را طی نموده است؟
  - ۳- علی پس از ۱۵ دقیقه به اندازه‌ی  $765^\circ$  درجه روی دایره را طی نموده است او چه مسافتی را طی نموده است؟
  - ۴- اگر زاویه‌ی چرخیدن دوچرخه‌سوار  $\theta$  و مسافت طی شده توسط او L باشد، چه رابطه‌ای بین L و  $\theta$  وجود دارد؟
- همان‌گونه که دیدیم مقدار مسافتی که روی محیط دایره توسط علی طی شده است و زاویه‌ای که علی چرخیده است با هم رابطه مستقیم دارند و با دانستن هر یک می‌توان دیگری را به دست آورد. بنابراین مسافت طی شده توسط علی می‌تواند معیاری برای اندازه‌گیری زاویه چرخیدن علی باشد.

اگر متحرکی از نقطه A روی دایره‌ای به شعاع واحد در جهت مثبت حرکت کند و به مکان B برسد، مسافت طی شده توسط متحرک را اندازه‌ی زاویه‌ی دوران پاره خط OA حول O بر حسب رادیان می‌نامیم.

اگر در جهت منفی حرکت کنیم همین مسافت طی شده را با علامت منفی نشان می‌دهیم.





۱- اگر از نقطه‌ی A روی دایره به اندازه  $90^\circ$  درجه بچرخیم، یک ربع دایره را طی کرده‌ایم که طول یک چهارم محیط دایره است. چون شعاع دایره ۱ و محیط دایره  $2\pi$  است، پس طول ربع دایره  $\frac{2\pi}{4}$  یعنی  $\frac{\pi}{2}$  است.

۲- اگر از نقطه‌ی A روی دایره به اندازه‌ی  $180^\circ$  درجه بچرخیم، نیم دایره‌ای طی می‌شود که طول آن  $\frac{2\pi}{2}$  یعنی  $\pi$  است. پس زاویه‌ی طی شده بر حسب رادیان  $-\pi$  است.

۳- اگر از نقطه‌ی A روی دایره به اندازه‌ی  $45^\circ$  درجه بچرخیم، یک بار دایره طی می‌شود و برای بار دوم به اندازه‌ی  $90^\circ$  درجه می‌چرخیم. پس مسافت طی شده برابر  $2\pi + \frac{\pi}{2}$  یعنی  $\frac{5\pi}{2}$  است، یعنی  $45^\circ$  درجه معادل  $\frac{5\pi}{2}$  رادیان است.

هر متحرک روی دایره اگر به اندازه‌ی یک درجه بچرخد به اندازه‌ی  $\frac{1}{360}$  محیط آن را طی می‌کند. برای دایره‌ای به شعاع ۱ این طول برابر  $\frac{2\pi}{360}$  یعنی  $\frac{\pi}{180}$  رادیان است. پس یک درجه  $\frac{\pi}{180}$  رادیان است.

پس اگر زاویه‌ای به اندازه‌ی D درجه باشد، بر حسب رادیان به اندازه‌ی  $\frac{\pi}{180} D$  رادیان خواهد بود. اگر مقدار زاویه‌ای بر حسب درجه D و بر حسب رادیان R باشد، داریم:

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$$

از این تساوی برای تبدیل واحد درجه به رادیان و تبدیل واحد رادیان به درجه می‌توان استفاده کرد.

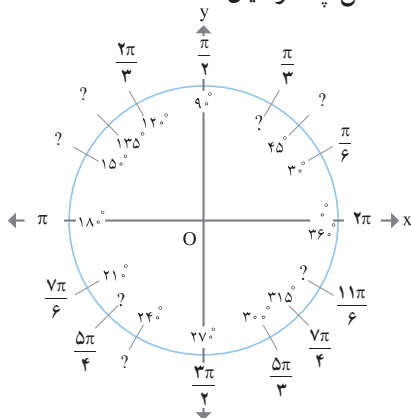
مقدار  $\frac{-\pi}{6}$  رادیان را به درجه بنویسید.

$$D = \frac{-\frac{\pi}{6} \times 180}{\pi} = -30^\circ$$

با استفاده از رابطه‌ی بالا داریم:

۱- یک متحرک روی دایره، چه زاویه‌ای بر حسب رادیان بچرخد تا به جای اول خود باز گردد؟

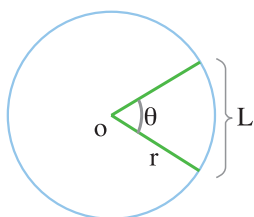
۲-  $20^\circ$  درجه معادل چند رادیان است؟  $72^\circ$  - درجه معادل چند رادیان است؟



۳- شکل مقابل دایره‌ای به شعاع واحد را نشان می‌دهد که اندازه‌های زوایا بر حسب درجه و رادیان با یکدیگر معادل هستند. جاهای خالی دایره‌ی فوق را تکمیل نمایید.

۴-  $\frac{3\pi}{4}$  رادیان معادل چند درجه است؟  $-\frac{\pi}{6}$  رادیان معادل چند درجه است؟

۵- در فعالیت مربوط به پیست دوچرخه سواری اگر علی مسافت  $\frac{7\pi}{2}$  کیلومتر را طی کرده باشد، مقدار زاویه‌ای که چرخیده است را بر حسب درجه بیان کنید.



اگر یک زاویه‌ی  $\theta$  در دایره‌ای به شعاع  $r$  کمانی به طول  $L$  را ببرد، در این صورت اندازه‌ی  $\theta$  به رادیان برابر  $\frac{L}{r}$  می‌باشد. در حالتی که  $r=1$  باشد اندازه‌ی  $L$  با اندازه‌ی  $\theta$  برابر است.

در دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی متر توسط زاویه‌ی  $\theta$  کمانی به طول ۶ سانتی متر بریده می‌شود. مقدار  $\theta$  به رادیان چه قدر است؟

حل:

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{6}{3} = 2$$

اندازه‌ی  $\theta$  به رادیان برابر ۲ می‌باشد.

۱- دایره‌ای به شعاع واحد رسم کنید. روی این دایره انتهای کمان‌های داده شده را در موقعیت استاندارد مشخص کنید.

الف)  $\frac{3\pi}{2}$  ب) ۳ رادیان

۲- زوایای ۳- رادیان و  $3\pi$ - رادیان چه کسری از دایره‌ی طی شده می‌باشند؟ اندازه‌ی آن‌ها را بر حسب درجه بیان کنید. (با تقریب سه رقم اعشار)

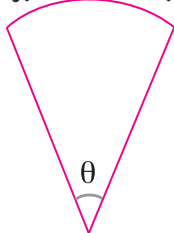
۳- اندازه‌ی زاویه‌ای که عقربه‌ی ساعت شمار از ساعت ۱ بعد از ظهر تا ۳ بعد از ظهر حرکت می‌کند را بر حسب درجه و رادیان بیان کنید.

۴- چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه شمار به اندازه‌ی  $2/\pi$  رادیان دوران کند؟



۵- فرض کنید سوار چرخ و فلکی شده‌اید که  $40^\circ$  کابین دارد و کابین‌های آن شماره گذاری شده‌اند. اگر در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، شما روی کابین شماره‌ی ۳ نشسته باشید، بعد از  $\frac{47\pi}{10}$  رادیان دوران، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟

مشهد ۱۰۰۰ تهران



۶- فرض کنیم فاصله‌ی تهران تا مشهد روی قسمتی از سطح زمین تقریباً ۱۰۰۰ کیلومتر باشد. اگر شعاع زمین را  $6,440$  کیلومتر فرض کنیم، اندازه‌ی زاویه‌ای را بر حسب رادیان که رأس آن در مرکز زمین باشد پیدا کنید به طوری که تهران روی یک ضلع آن و مشهد روی ضلع دیگر آن باشد.

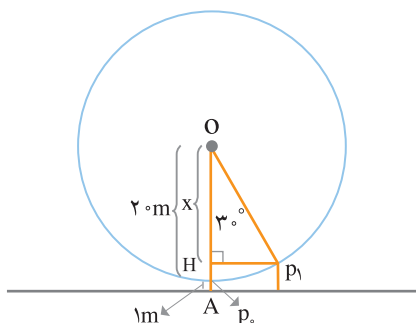
### شناخت دایره مثلثاتی

در ریاضی سال اول متوسطه مقادیر مثلثاتی زوایای حاده را می‌توانستید محاسبه کنید.

حل یک مسئله :

خانواده آقای حسینی در یک روز تعطیل به شهر بازی رفتند، رضا و زهرا فرزندان آقای حسینی قصد دارند سوار چرخ و فلکی به شعاع  $20$  متر شوند. بعد از اینکه رضا از سطح زمین سوار کابین

شماره‌ی ۱ شده است، مسئول چرخ و فلک جهت سوار شدن زهرا کابین را به اندازه‌ی  $3^\circ$  در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت حرکت داد. می‌خواهیم بدانیم فاصله‌ی رضا از سطح زمین چه قدر است. با توجه به دانسته‌هایمان از ریاضی سال اول متوسطه، می‌توانیم این مسئله را حل کنیم.



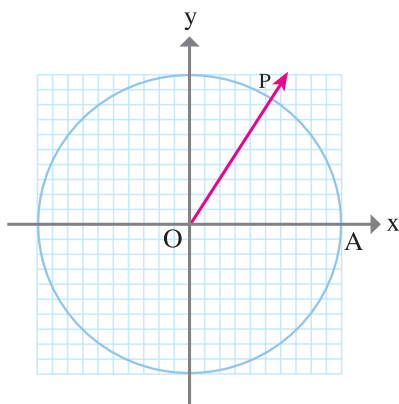
اگر شکل مقابل را در نظر بگیریم می‌بینیم که  $x$  اختلاف بین  $OA$  (فاصله‌ی مرکز چرخ تا زمین) و  $HA$  می‌باشد و  $HA = h$ . با استفاده از نسبت کسینوس‌ها داریم:

$$\cos 3^\circ = \frac{x}{20} = \frac{20-h}{20}$$

که با توجه به رابطه‌ی بالا  $h$  به دست می‌آید.

اگر کابین رضا به اندازه‌ی  $12^\circ$  درجه یا  $24^\circ$  درجه یا  $30^\circ$  درجه دوران کند فاصله‌ی رضا از سطح زمین چه قدر خواهد بود؟ برای این که به سؤال فوق پاسخ داده شود بایستی نسبت‌های مثلثاتی زوایای بیش‌تر از  $9^\circ$  را بتوانیم محاسبه کنیم.

در این قسمت به این می‌پردازیم که چگونه مقادیر مثلثاتی هر زاویه‌ی دلخواه را محاسبه کنیم. در فعالیت زیر از ابزار پرگار، نقاله، کاغذ شطرنجی و ماشین حساب استفاده کنید.



روی کاغذ شطرنجی محور مختصات را رسم نمایید. فرض کنید طول هر ضلع مربع روی صفحه شطرنجی نمایش  $1^\circ$  واحد باشد. به مرکز مبدأ مختصات مانند شکل مقابل دایره‌ای به شعاع ۱ رسم کنید.

۱- نقاله را به گونه‌ای قرار دهید که نقطه‌ی  $O$  در مبدأ قرار گرفته و از نقطه‌ی  $A$  زاویه‌ای به اندازه‌ی  $57/3^\circ$  درجه را روی دایره مشخص نمایید و آن را  $P$  بنامید.

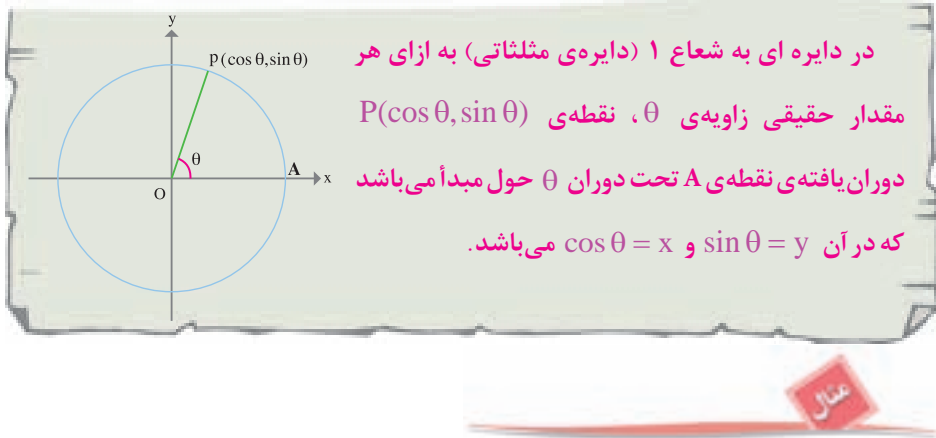
۲- با به کار بردن کاغذ شطرنجی طول و عرض نقطه‌ی  $P$  را به دست آورید.

۳- با ماشین حساب کسینوس و سینوس  $57/3^\circ$  درجه را محاسبه کنید و رابطه‌ی بین مختصات

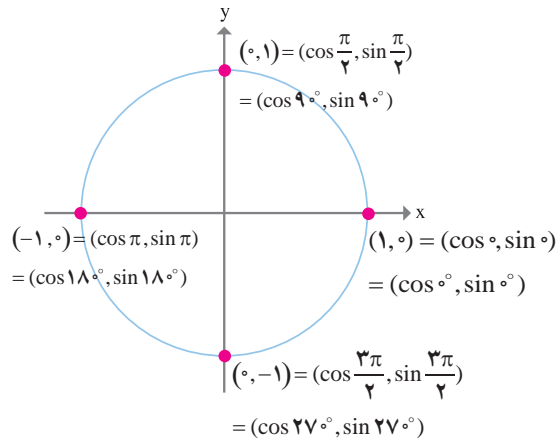
نقطه‌ی P و مقادیر سینوس و کسینوس را بنویسید.

۴- با ۲ و ۳ برابر کردن زاویه فوق، سه فعالیت صفحه‌ی قبل را تکرار کنید.

با توجه به فعالیت صفحه‌ی قبل می‌توانیم بگوییم  $(\cos 57^\circ, \sin 57^\circ)$  به طور تقریبی با مختصات نقطه‌ی P برابر است.



۱- در شکل زیر کسینوس و سینوس مضارب صحیح زاویه‌ی  $\frac{\pi}{4}$  روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص شده است.

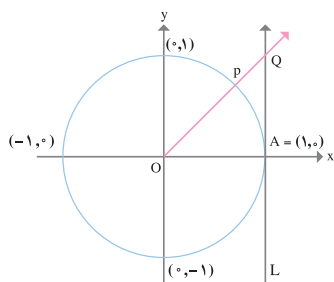
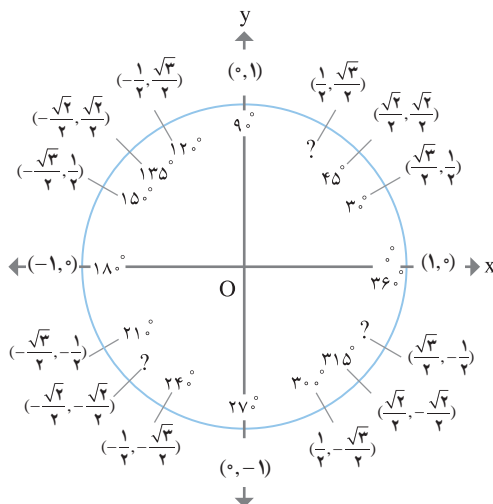


۲- نقطه‌ی  $(1, 0)$  به اندازه‌ی  $\frac{13\pi}{5}$  حول مبدأ مختصات دوران می‌کند. مختصات نقطه‌ی به‌دست آمده‌ی آن را تا ۳ رقم اعشار حساب کنید.

با استفاده از ماشین حساب مقدار  $\sin \frac{13\pi}{5}$  و  $\cos \frac{13\pi}{5}$  عبارت است از:  
( $0/951$  و  $-0/309$ )

۳- فرض کنیم ضلع انتهایی زاویه  $\theta$  که از نقطه  $(1, 0)$  شروع شده است در نقطه  $P(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$  روی دایره ی مثلثاتی قرار بگیرد، مقادیر  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  را به دست آورید.  
 $\sin \theta = -\frac{1}{3}$  و  $\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$  بنابراین  $P(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}) = P(\cos \theta, \sin \theta)$

حال مقادیر دقیق سینوس و کسینوس بعضی از زوایای خاص را روی دایره مثلثاتی مشخص می کنیم.



خط  $L$  را در شکل مقابل در دایره ی مثلثاتی در نظر بگیرید  
که از نقطه ی  $A = (1, 0)$  می گذرد.  $P$  تصویر  $A$  تحت دوران  
 $\theta$  به مرکز  $O$  می باشد و  $OP$  خط  $L$  را در نقطه ی  $Q$  قطع  
می کند. وقتی  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  باشد، اندازه ی  $QA = \tan \theta$

۱- مثال شماره ی ۲ صفحه ی قبل را با استفاده از کاغذ شطرنجی و رسم دایره ی مثلثاتی آزمایش کنید.

۲- از نمودار شکل بالا استفاده نمایید و درستی رابطه های صفحه ی بعد را بررسی کنید:

الف: به ازای هر مقدار  $\theta$  داریم:  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

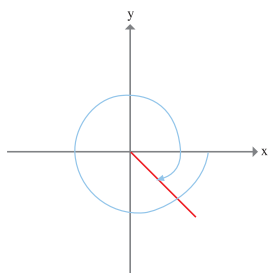
ب: به ازای هر مقدار  $\theta$  با شرط این که  $\cos \theta \neq 0$  باشد، داریم:  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

۳- مقادیر  $\tan \pi$  و  $\tan(-27^\circ)$  را تعیین کنید.

۴- با رسم دایره ی مثلثاتی، مقدار  $\tan \theta$  در حالتی که  $\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$  باشد را نشان دهید.

۵- با توجه به این که به صورت عملی با مقادیر مثبت و منفی عبارت های مثلثاتی آشنا شده اید، جدول زیر را تکمیل کنید.

مقدار $\theta$	ربع	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$\tan \theta$
$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	اول			
$\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$	دوم			
$\pi < \theta < \frac{3\pi}{4}$	سوم			
$\frac{3\pi}{4} < \theta < 2\pi$	چهارم			



علامت  $\sin(-7)$ ،  $\cos(-7)$ ،  $\tan(-7)$  (اندازه ی  $-7$  بر حسب رادیان است) را مشخص کنید.

حل:  $(-7)$  رادیان، دوران بیش تر از یک دور و در جهت حرکت عقربه های ساعت می باشد. بنابراین ضلع انتهایی زاویه در ربع چهارم قرار می گیرد و در ربع چهارم کسینوس مثبت و تانژانت و سینوس منفی می باشند.

۱- با فرض این که نقطه ی  $A = (1, 0)$  به اندازه ی  $\theta$  حول مبدأ مختصات دوران کند، نقاط

حاصل از دوران به ازای مقادیر داده شده ی  $\theta$  را به دست آورید.

- (الف)  $-81^\circ$  درجه (ب)  $-13\pi$  (ج)  $\frac{11\pi}{2}$
- ۲- با استفاده از دایره ی مثلثاتی همه ی مقادیر  $\theta$  بین  $0^\circ$  و  $2\pi$  به طوری که  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  می باشد را بیابید.

۱- مقادیر دقیق عبارت های زیر را به دست آورید :

- $\tan \frac{11\pi}{6}$  و  $\cos 30^\circ$  و  $\sin \frac{3\pi}{4}$  و  $\sin 135^\circ$  و  $\cos \frac{7\pi}{4}$
- ۲- (الف) اگر  $\cos \theta = \frac{2}{5}$  باشد، دو مقدار ممکن برای  $\sin \theta$  بیابید.  
(ب) با رسم شکل، مختصات فوق را روی شکل نشان دهید.

۳- اگر زاویه ی  $\theta$  در موقعیت استاندارد باشد به طوری که نقطه ی انتهایی کمان  $\theta$  دایره ی مثلثاتی را در نقطه ی  $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$  قطع کند، مقادیر  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  را در نقطه ی فوق حساب کنید.

۴- با استفاده از دایره ی مثلثاتی همه ی مقادیری از  $\theta$  بین  $0^\circ$  و  $2\pi$  را بیابید به طوری که روابط زیر برقرار باشد :

(الف)  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  (ب)  $\tan \theta = -\sqrt{3}$  (ج)  $\cos \theta = 0$

۵- اگر از نقطه ای روی دایره ی مثلثاتی شروع به حرکت کنیم و به اندازه ی  $2\pi$  واحد فاصله را طی کنیم، به جایی که حرکت را شروع کرده ایم می رسیم. اگر حرکت را برای بار دوم ادامه دهیم، همه ی مقادیر  $(x, y)$  ای که در دور اول به آن رسیدیم، مجدداً به آن می رسیم. با استفاده از بحث بالا مقادیر هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید :

$\sin(2\pi + \frac{\pi}{3})$   $\cos(2\pi - \frac{\pi}{6})$

$\sin(2\pi - \frac{\pi}{4})$   $\cos(2\pi + \frac{2\pi}{3})$

۶- دو مقدار از  $\theta$  بین  $\frac{\pi}{4}$  ,  $\frac{-\pi}{4}$  پیدا کنید به طوری که  $\cos \theta = \frac{1}{4}$  باشد.

۷- فرض کنیم :  $\sin \theta = -\frac{1}{4}$

الف) دو مقدار از  $\theta$  بین  $0$  ,  $2\pi$  پیدا کنید به طوری که رابطه‌ی فوق درست باشد.

ب) دو مقدار منفی از  $\theta$  مشخص کنید که معادله‌ی فوق درست باشد.

۸- چهار مقدار از  $\theta$  بین  $-2\pi$  ,  $2\pi$  پیدا کنید به طوری که  $\cos \theta = \sin \theta$  باشد و به ازای

مقادیر  $\theta$  به دست آمده از بالا  $\tan \theta$  را به دست آورید.

### تعیین مقادیر مثلثاتی برای تمام زوایا



۱- یک دایره‌ی مثلثاتی رسم نموده و نقطه‌ای مانند P روی آن چنان بیابید که زاویه‌ی نظیر آن  $30^\circ$  باشد.

۲- قرینه‌ی نقطه‌ی P را نسبت به محور y ها مشخص نموده و آن را Q نامیده و مختصات آن را معین کنید.

۳- اگر نقطه‌ی  $(1, 0)$  را A و نقطه‌ی  $(-1, 0)$  را B بنامیم، چه رابطه‌ای بین زوایای QOB و POA وجود دارد؟

۴- زاویه‌ی AOQ را در جهت مثبت مشخص نموده و سپس بر اساس این زاویه مختصات نقطه‌ی Q را به دست آورید.

۵- از مختصات تعیین شده Q در بند ۲ و بند ۴ فعالیت فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در حالت کلی به ازای هر زاویه‌ی دلخواه  $\theta$  :

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

مثال

فرض کنیم:  $\sin \theta = 15^\circ$  باشد، مقدار  $\sin(\pi - \theta)$  را به دست آورید.

با استفاده از روابط به دست آمده در صفحه‌ی قبل داریم:  $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta = 15^\circ$

مثال

مقادیر سینوس و کسینوس زوایای  $\frac{2\pi}{3}$  و  $\frac{5\pi}{6}$  را به دست آورید.

مثال

با استفاده از پرگار و نقاله دایره مثلثاتی رسم نموده و به ازای هر زاویه دلخواه  $\theta$  مقادیر  $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$  و  $\cos \theta$  را به دست آورده و رابطه‌ی بین این دو را حدس بزنید و حدستان را با دو مقدار از  $\theta$  آزمایش کنید.

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta \quad \text{به ازای هر زاویه‌ی } \theta \text{ بر حسب درجه داریم:}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$$

مثال

اگر  $\cos \theta = \frac{2}{5}$  باشد، مقدار  $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$  را به دست آورید.

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta = \frac{2}{5}$$

مثال

رابطه‌ی بین  $\cos \theta$  و  $\sin(90^\circ + \theta)$  و همچنین رابطه‌ی  $\sin \theta$  و  $\cos(90^\circ + \theta)$  را با استفاده از فعالیت بالا بنویسید.



یک دایره‌ی مثلثاتی را در نظر بگیرید.

۱- نقطه‌ی  $A(1, 0)$  را به اندازه‌ی  $\theta$  دوران دهید و آن نقطه را  $P$  نامیده و مختصات آن را بنویسید.

۲- قرینه‌ی نقطه‌ی  $P$  را نسبت به مبدأ مختصات مشخص کرده و آن را  $Q$  نامیده و مختصات آن را مشخص کنید.

۳- با توجه به این که  $Q$  تصویر  $A$  تحت دوران به اندازه‌ی  $\pi + \theta$  است، مختصات آن را بنویسید.

۴- از دو بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در حالت کلی:  $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$

$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$



اگر  $\cos \theta = \frac{2}{3}$  باشد، مقدار  $\cos(\pi + \theta)$  چه قدر خواهد بود؟

حل:  $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta = -\frac{2}{3}$



۱- با استفاده از پرگار و نقاله دایره مثلثاتی رسم نموده و به ازای یک زاویه دلخواه  $x$  روابط بالا را آزمایش کنید.

۲- روابط فوق را برای تانژانت هر زاویه دلخواه بررسی کنید.

۳- مقدار  $4 \sin(2x + \pi)$  را به ازای  $x = \frac{\pi}{6}$  به دست آورید.

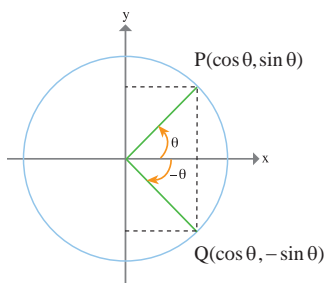


با استفاده از ماشین حساب مقادیر زیر را حساب کنید:

۱- زوایای زیر بر حسب رادیان هستند.

الف)  $\sin \frac{\pi}{3}$ ,  $\sin \frac{-\pi}{3}$       ب)  $\sin(\frac{5\pi}{6})$ ,  $\sin(\frac{-5\pi}{6})$       ج)  $\sin(2/8)$ ,  $\sin(-2/8)$

۲-  $\cos(-83^\circ)$  و  $\cos(83^\circ)$



اگر دقت کنیم می بینیم تمام زوایای فوق قرینه هستند اما سینوس و کسینوس زوایای قرینه متفاوت عمل کرده اند. حال به تحلیل چرایی این موضوع می پردازیم.

فرض کنیم P دوران یافته ی  $(1, 0)$  تحت زاویه  $\theta$  و Q دوران یافته ی  $(1, 0)$  تحت زاویه  $-\theta$  مطابق شکل مقابل باشند.

توجه کنید که P, Q قرینه ی یکدیگر نسبت به محور X ها هستند.

بنابراین مختص X آن ها یعنی کسینوس ها مساوی هستند اما مختص Y آن ها یعنی سینوس ها قرینه اند. بنابراین:

به ازای هر زاویه ی  $\theta$  داریم:

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

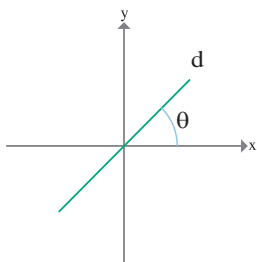
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

۱- روابط فوق را برای تانژانت  $\theta$  به دست آورید.

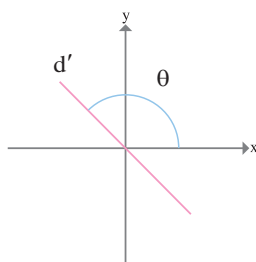
۲- مقادیر  $\cos(\theta - 180^\circ)$  و  $\sin(\theta - 180^\circ)$  را به دست آورید.

### رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه

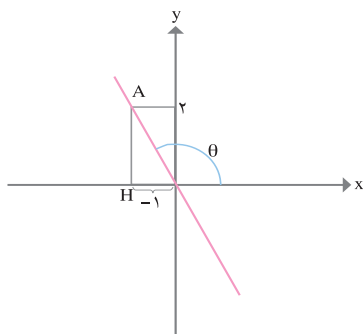
شیب خط هایی که با محور X ها زاویه ی حاده می سازند تانژانت همان زاویه است. اما در مورد خط هایی که با جهت مثبت محور X ها زاویه ی منفرجه می سازند چه می توان گفت؟



(شیب خط  $d$ )  $m_d = \tan \theta$



(شیب خط  $d'$ )  $m_{d'} = ?$



شیب خط‌هایی که با محور  $x$  زاویه‌ی منفرجه می‌سازند عددی منفی است، پس تانژانت زاویه‌های منفرجه باید عددی منفی باشد. به نظر شما در خط  $y = -2x$  عدد  $-2$  چه رابطه‌ای با زاویه‌ی این خط و محور  $x$ ‌ها دارد؟

خط  $y = -x - 1$  با محور  $x$ ‌ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱- مقادیر هریک از عبارت‌های زیر را به ازای  $x = \frac{\pi}{6}$  به دست آورید.

الف)  $y = 1 + 2 \sin 3x$

ب)  $y = -1 + \frac{3}{4} \cos(2x - \frac{\pi}{2})$

ج)  $y = 4 - \frac{2}{3} \sin(3x - \pi)$

۲- عبارت  $\cos 4 = \cos(-4)$  درست یا نادرست است؟ با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی جوابتان را بررسی کنید. (زوایای فوق بر حسب رادیان هستند.)

۳- اگر  $\sin \theta = 0.4$  باشد ( $\theta$  بر حسب درجه است) بدون ماشین حساب مقادیر  $\sin(-\theta)$ ,  $\sin(180^\circ - \theta)$  را به دست آورید.

۴- اگر  $\cos \theta = 0/2$  باشد ( $\theta$  بر حسب رادیان) بدون ماشین حساب مقادیر  $\cos(\pi + \theta)$ ,  $\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)$  را به دست آورید.

۵- اگر عبارت‌های زیر درست است دلیل درستی و اگر نادرست است با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی دلیل نادرستی آن‌ها را بیان کنید.

$$\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6}$$

۶- با ارایه‌ی مثالی نشان دهید رابطه‌ی زیر همواره درست نیست.

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \pi - \sin \theta$$

۷- به ازای هر مقدار  $\theta$  نشان دهید  $\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0$

۸- خط  $d$  با محور  $x$  زاویه‌ی  $30^\circ$  درجه می‌سازد، شیب این خط را به دست آورید.

## تابع مثلثاتی



یک شهر بازی چرخ و فلکی دارد که شعاع دایره‌ی آن ۱۵ متر است. فاصله‌ی مرکز دایره‌ی این چرخ و فلک تا زمین  $20^\circ$  متر است. برای هر نقطه‌ی  $C$  از این چرخ و فلک با مشخص بودن زاویه‌ی  $OC$  با خط افق می‌توان فاصله‌ی نقطه‌ی  $C$  تا زمین را به دست آورد. به عبارت دیگر فاصله‌ی  $C$  تا زمین به زاویه‌ی  $OC$  با خط افق بستگی دارد.

زاویه‌ای که  $OC$  با جهت مثبت خط افق می‌سازد را  $x$  و فاصله‌ی  $C$  تا زمین را  $y$  بنامید.

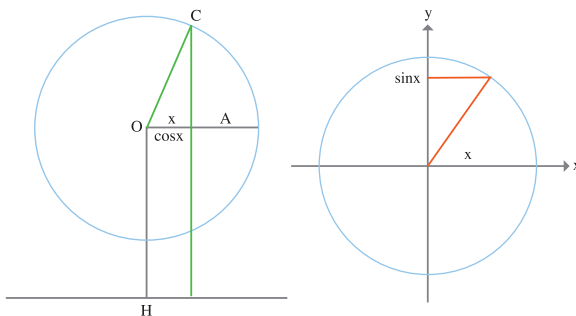
۱- در حالتی که  $x$  زاویه‌ای بین صفر و  $\pi$  باشد، نشان دهید  $y$  مجموع دو طول  $OH$  و  $AC$  است و نتیجه بگیرید:  $y = 20 + 15 \sin x$

۲- در حالتی که  $x$  بین  $\pi$  و  $2\pi$  باشد، شکل جدیدی بکشید و باز نتیجه بگیرید:

$$y = 20 + 15 \sin x$$



تابعی که در فعالیت بالا به آن رسیدیم، نمونه‌ای از توابع مثلثاتی می‌باشد.  
توابع  $y = \cos x$  ,  $y = \sin x$  از ساده‌ترین توابع مثلثاتی هستند و در دایره‌ی مثلثاتی تعبیر هندسی ساده‌ای دارند. (x بر حسب رادیان است.)



به ازای هر مقدار  $x$  مقدارهای  $\sin x$  و  $\cos x$  تعریف شده‌اند و دامنه‌ی این توابع تمام  $\mathbb{R}$  است. با تغییر  $x$  مقداری که برای  $\sin x$  و  $\cos x$  به دست می‌آید اعدادی بین  $-1$  و  $1$  هستند، به عبارت دیگر برد این توابع  $[-1, 1]$  است.

حال به مسأله‌ی چرخ و فلک صفحه‌ی قبل برمی‌گردیم :



۱- اگر سوار چرخ و فلکی شوید که فاصله‌ی شما تا سطح زمین از رابطه‌ی  $y = 20 + 15 \sin \theta$  تعیین شود، با تکمیل جدول زیر فاصله‌ی خود تا سطح زمین را بر اساس زاویه‌ی طی شده به دست آورید.

$\theta$ (زاویه‌ی طی شده)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$y$ (فاصله‌ی شخص تا سطح زمین)								



۲- با توجه به جدول صفحه‌ی قبل به نظر شما در مورد فاصله‌ی خودتان تا سطح زمین در زوایای صفر و  $2\pi$  چه می‌توان گفت؟

۳- جدول صفحه‌ی قبل را برای زوایای  $2\pi + \theta$  ترسیم و تکمیل نموده و مقادیر به دست آمده را با مقادیر جدول اولیه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴- به نظر شما اگر جدول اولیه را برای زوایای  $2\pi + \theta$  ترسیم نماییم چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

فرض کنیم مریم سوار چرخ و فلک شود و بعد از یک دور چرخیدن، زهرا سوار چرخ و فلک شده و کنار مریم بنشیند، در این حالت با آن که مریم به اندازه‌ی  $2\pi + \theta$  و زهرا به اندازه‌ی  $\theta$  که یک دور کمتر از مریم چرخیده‌است، اما هر دو در یک محل قرار می‌گیرند.

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$$

$$\sin(\theta + 2 \times 2\pi) = \sin \theta$$

.

.

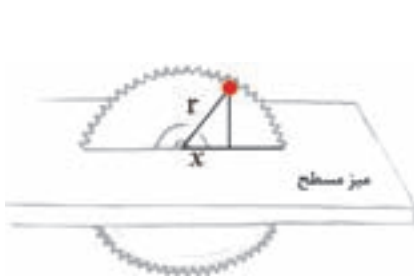
.

$$\sin(\theta + n \times 2\pi) = \sin \theta$$

به چنین توابعی توابع تناوبی می‌گوییم و زاویه‌ی  $2\pi$  دوره‌ی تناوب تابع فوق نامیده می‌شود.

تابع  $y = \cos \theta$  نیز دارای دوره‌ی تناوب  $2\pi$  می‌باشد(چرا؟)

## منحنی توابع مثلثاتی



یک اره‌ی برقی را به شعاع  $40^\circ$  سانتی متر در نظر بگیرید که یک نقطه‌ی قرمز رنگ بر روی لبه‌ی خود دارد و در هر ثانیه چهار دور در جهت مثبت می‌چرخد. فرض کنیم که نقطه‌ی قرمز اره‌برقی در لحظه‌ی  $t=0$  روی میز مسطحی باشد که الوار را برای برش روی آن قرار می‌دهند. با فرض این که مرکز اره برقی روی مبدأ مختصات باشد، در این صورت:

۱- نقطه‌ی قرمز در هر ثانیه چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

۲- در ۱ دقیقه چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

۳- در چه مدتی  $765^\circ$  درجه می‌گردد؟

۴- نقطه‌ی قرمز در زمان‌های  $1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$  (ثانیه) در چه محلی قرار می‌گیرد، روی شکل نشان دهید.

۵- جدول زیر را تکمیل نموده و نمودار آن را رسم کنید:

$t$	$t=0$	$t=\frac{1}{16}$	$t=\frac{2}{16}$	$t=\frac{3}{16}$	$t=\frac{4}{16}$	$t=\frac{5}{16}$	$t=\frac{6}{16}$	$t=\frac{7}{16}$	...	$t=1$
اندازه ارتفاع نقطه‌ی قرمز تا سطح										

اگر بر روی محورهای مختصات جهت مثبت محور  $x$  ها را زمان طی شده و محور  $y$  ها را سطوح مختلف ارتفاع از سطح میز در نظر بگیریم، نمودار حاصل، موج سینوسی است که نقاط جدول فوق روی آن نمودار قرار دارند.

صفحه‌ی اره برقی در هر ثانیه ۴ دور کامل خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت طی می‌کند به

عبارت دیگر هر  $\frac{1}{4}$  ثانیه یک دور کامل طی می کند و این موج تکرار می شود. بنابراین تابع فوق تناوبی است و این تناوب در هر  $\frac{1}{4}$  ثانیه تکرار می شود.



آیا به این فکر کرده اید که اگر  $t$  را منفی فرض کنیم چه پیش می آید؟ به نظر شما  $t$  منفی به چه معناست؟  
برای  $t$  منفی منحنی را رسم کنید.

حال به بررسی و تحلیل نمودار تابع  $y = \sin \theta$  می پردازیم :



جدول زیر را در نظر بگیرید :

x	°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin x$	°	°/۵	°/۸۷	۱	°/۸۷	°/۵	°	-°/۵	-°/۸۷	-۱	-°/۸۷	-°/۵	°

- ۱- نمودار جدول فوق را رسم و آن را در جهت مثبت محور  $x$  ها گسترش دهید.
- ۲- عبارات زیر را تکمیل کنید.

وقتی که  $x$  از  $0^\circ$  تا  $\frac{\pi}{4}$  افزایش می یابد، مقدار  $y$  از  $0^\circ$  تا  $1$  افزایش می یابد.

وقتی که  $x$  از  $\frac{\pi}{4}$  تا  $\pi$  افزایش می یابد، .....

وقتی که  $x$  از  $\pi$  تا  $\frac{3\pi}{2}$  .....

.....

۳- به ازای  $0 \leq x \leq -2\pi$  جدول و نمودار تابع  $y = \sin x$  را رسم کنید و در جهت منفی محور  $x$  ها گسترش دهید و بیان نمایید که در بازه‌ی فوق به ازای چه مقادیری از  $x$ ،  $y = \sin x$  افزایش و به ازای چه مقادیری از  $x$  کاهش می‌یابد.

از نمودار فوق مشخص است که تابع  $y = \sin x$ ، موج سینوسی آن هر  $2\pi$  رادیان تکرار می‌شود. بنابراین تابع فوق یک تابع تناوبی با دوره‌ی تناوب  $2\pi$  است.

از جدول صفحه‌ی قبل پیداست که تابع  $y = \sin x$  در نقاط  $..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...$  صفر است. بنابراین مقدار تابع  $y = \sin x$  برای  $x = k\pi$  ( $k$  متعلق به مجموعه‌ی اعداد صحیح می‌باشد) صفر است.



به ازای چه مقادیری از  $\theta$  مقدار تابع  $y = \sin^3 \theta$  صفر می‌شود؟

حل: مقدار تابع  $y = \sin^3 \theta$  به ازای  $\theta = k\pi$  صفر است. بنابراین:

$$3\theta = k\pi$$

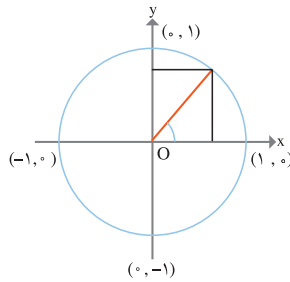
$$\theta = \frac{k\pi}{3}$$

به ازای نقاط  $..., \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, ...$  مقدار تابع فوق صفر می‌شود.

## رابطه‌ی بین منحنی تابع سینوسی و دایره‌ی مثلثاتی

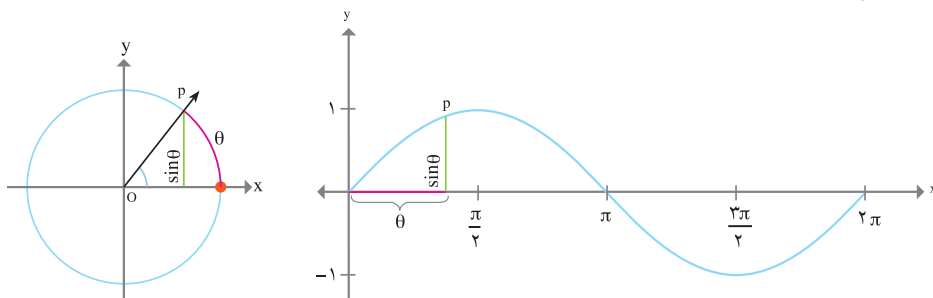


۱- با تکمیل جدول زیر تفسیر تابع  $y = \sin \theta$  را روی دایره‌ی مثلثاتی انجام می‌دهیم.



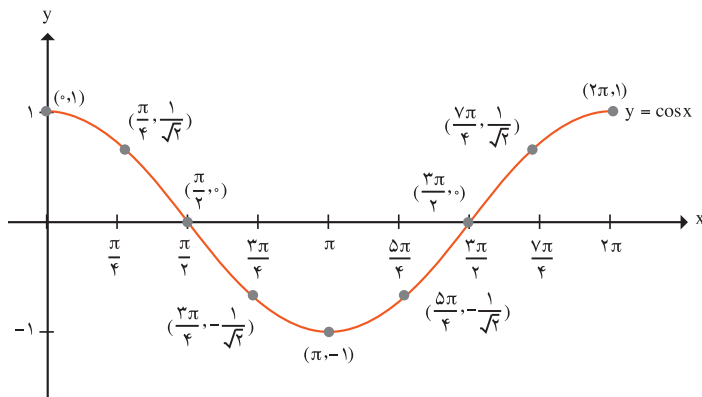
ربع اول	با تغییر $\theta$ از $0^\circ$ تا $\frac{\pi}{2}$ نقطه‌ی $p$ از $(1, 0)$ به نقطه‌ی $(0, 1)$ حرکت می‌کند و مقدار $y = \sin \theta$ از $0$ به $1$ افزایش می‌یابد.
ربع دوم	با تغییر $\theta$ از $\frac{\pi}{2}$ تا $\pi$ نقطه‌ی $p$ از $(0, 1)$ به $(-1, 0)$ حرکت می‌کند و مقدار $y = \sin \theta$ از $1$ به صفر کاهش می‌یابد.
ربع سوم	
ربع چهارم	

۲- شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر  $x$  از  $0^\circ$  تا  $2\pi$  تغییر کند، مکان نقطه‌ی  $p$  را روی نمودار مشخص کنید:



۱- جدول و نمودار تابع  $y = \cos \theta$  را در نظر بگیرید:

$x$	$y = \cos x$
$0^\circ$	$\cos 0^\circ = 1$
$\frac{\pi}{4}$	$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{2}$	$\cos \frac{\pi}{2} = 0^\circ$
$\frac{3\pi}{4}$	$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\pi$	$\cos \pi = -1$
$\frac{5\pi}{4}$	$\cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{3\pi}{2}$	$\cos \frac{3\pi}{2} = 0^\circ$
$\frac{7\pi}{4}$	$\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$2\pi$	$\cos 2\pi = 1$



۱-۱) تفسیر افزایشی یا کاهشی بودن تابع  $y = \cos \theta$  را از روی نمودار از  $0$  تا  $\frac{\pi}{2}$  تا  $\pi$  و  $\frac{3\pi}{2}$  تا  $2\pi$  بنویسید.

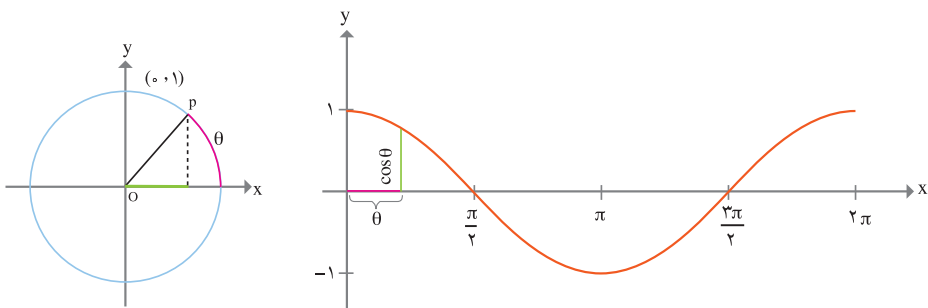
۲-۱) دوره‌ی تناوب تابع فوق را مشخص کنید.

۳-۱) به ازای چه مقادیری، تابع فوق برابر صفر است و در حالت کلی تابع  $\cos \theta$  به ازای چه مقادیری صفر است.

۴-۱) جدول و نمودار تابع  $y = \cos \theta$  را به ازای  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  رسم نمایید.

۲- تفسیر تابع  $y = \cos \theta$  را با رسم دایره‌ی مثلثاتی برای ربع‌های اول تا چهارم انجام دهید.

۲-۱) نمودار شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر  $x$  از  $0$  تا  $2\pi$  تغییر کند، مکان نقطه‌ی  $p$  را روی نمودار بررسی کنید :



از نمودار  $y = \cos \theta$  مشخص است که موج کسینوسی هر  $2\pi$  رادیان تکرار می‌شود. بنابراین تابع فوق یک تابع تناوبی با دوره‌ی تناوب  $2\pi$  است.

تابع  $y = \cos \theta$  در نقاط  $\dots$  و  $\frac{5\pi}{2}$  و  $\frac{3\pi}{2}$  و  $\frac{\pi}{2}$  و  $-\frac{\pi}{2}$  و  $-\frac{3\pi}{2}$  ... صفر است.

بنابراین مقدار تابع  $y = \cos \theta$  به ازای  $\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$  که  $k$  متعلق به مجموعه ی اعداد صحیح است صفر است.



تابع  $y = \cos(-2\theta)$  در چه نقاطی صفر است؟

$$-2\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

حل :

$$\theta = \frac{-k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

به ازای نقاط  $\dots$  و  $-\frac{3\pi}{4}$  و  $-\frac{\pi}{4}$  و  $\frac{\pi}{4}$  و  $\frac{3\pi}{4}$  ... تابع فوق صفر می شود.

در دو فعالیت زیر می خواهیم بررسی کنیم که مقادیر حداقلی و حداکثری تابع  $y = \sin bx$  و نیز دوره ی تناوب تابع  $y = \sin bx$  چه قدر است.



۱- جدول زیر را کامل کنید :

x	°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$
$\sin x$	°	°/۵	°/۷۱	°/۸۷	۱						
$\sin 2x$	°	°/۸۷	۱	°/۸۷	°						
$\sin 3x$	°	۱	°/۷۱	°	-۱						

۲- نقاطی که توابع فوق به ازای آن ها صفر است را روی محور x ها مشخص کنید.

- ۳- نقاطی که توابع فوق به ازای آن‌ها مقادیر حداقلی و حداکثری دارند را مشخص کنید.
- ۴- با رسم توابع فوق روی یک دستگاه، دوره‌ی تناوب هر یک را به دست آورید.
- ۵- حدس می‌زنید دوره‌ی تناوب تابع  $y = \sin bx$  چه مقدار باشد؟



جدول زیر را در نظر بگیرید :

x	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin x$	۰	۰/۵	۰/۸۷	۱	۰/۸۷	۰/۵	۰	-۰/۵	-۰/۸۷	-۱	-۰/۸۷	-۰/۵	۰
$2\sin x$	۰	۱	۱/۷۳	۲	۱/۷۳	۱	۰	-۱	-۱/۷۳	-۲	-۱/۷۳	-۱	۰
$\frac{1}{2}\sin x$	۰	۰/۲۵	۰/۴۳	۰/۵	۰/۴۳	۰/۲۵	۰	-۰/۲۵	-۰/۴۳	-۰/۵	-۰/۴۳	-۰/۲۵	۰

- ۱- مقادیر حداکثری و حداقلی توابع فوق را به دست آورید.
- ۲- حدس می‌زنید مقادیر حداکثری و حداقلی تابع  $y = a\sin x$  چه قدر باشد؟

در حالت کلی در توابع  $y = a\cos bx$  و  $y = a\sin bx$  برای این که یک دور کامل طی شود بایستی  $0 \leq bx \leq 2\pi$  تغییر نماید. بنابراین:  $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{b}$  ( $b \neq 0$ )

در تابع  $y = a\cos bx$  و  $y = a\sin bx$  ماکسیمم مقدار تابع  $|a|$  و مینیمم مقدار تابع

$-|a|$  و دوره‌ی تناوب آن  $\left|\frac{2\pi}{b}\right|$  می‌باشد.

بنابراین با دوره‌ی تناوب و تعیین مقادیر حداقلی و حداکثری می‌توان معادله‌ی نمودار تابع را نیز حدس زد.

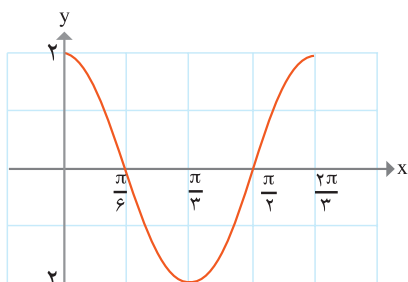
۱- با استفاده از جداول دو فعالیت صفحه‌ی قبل توابع  $y = \sin 2x$  و  $y = 2 \sin x$  را از نظر حداقلی و حداکثری و نیز دوره‌ی تناوب مقایسه کنید.

۲- درستی جملات زیر را در یک دوره‌ی تناوب از صفر تا  $2\pi$  بررسی کنید :

الف) تابع  $y = \sin ax$  ( $a > 0$ ) در  $x = \frac{\pi}{2a}$  حداکثر و در  $x = \frac{3\pi}{2a}$  حداقل مقدار را دارد.

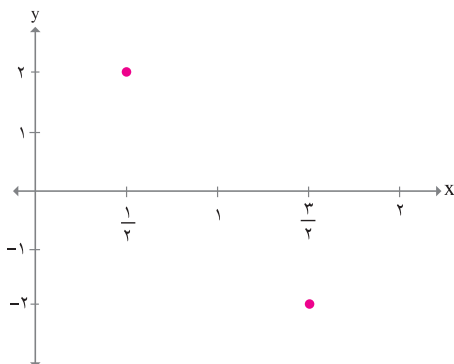
ب) تابع  $y = \cos ax$  ( $a > 0$ ) در  $x = \frac{2\pi}{a}$  حداکثر و در  $x = \frac{\pi}{a}$  حداقل مقدار را دارد.

۱- با استفاده از تعیین مقادیر حداقلی و حداکثری و دوره‌ی تناوب تابع  $y = 2 \cos 3x$  نمودار تابع را رسم کنید.



مقادیر حداکثری ۲ و حداقلی -۲ بوده و دوره‌ی تناوب آن  $\frac{2\pi}{3}$  می‌باشد. از طرفی تابع  $y = 2 \cos 3x$  در یک دوره‌ی تناوب در نقاط  $\frac{\pi}{6}$  و  $\frac{\pi}{3}$  صفر هستند و در نقاط  $0$  و  $\frac{2\pi}{3}$  حداکثر مقادیر و در نقطه‌ی  $\frac{\pi}{3}$  حداقل مقدار را دارد. بنابراین نمودار از دو طرف قابل گسترش است.

۲- نمودار  $y = 2 \sin(\pi x)$  را رسم کنید.

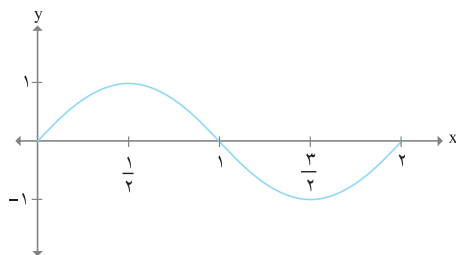


حل : با توجه به روابط بالا مقادیر حداقل و

حداکثر ۲- و ۲ می‌باشد که این حداقل و حداکثر در نقاط  $x = \frac{1}{2}$  و  $x = \frac{3}{2}$  به دست می‌آید.

از طرفی  $0 \leq \pi x \leq 2\pi$  است. پس :

$$0 \leq x \leq 2$$



دوره‌ی تناوب ۲ می‌باشد با توجه به این که  $\sin \pi x$  در نقاط  $x=0$  و  $x=1$  و  $x=2$  صفر است و انتهای یک موج سینوسی کامل در نقطه‌ی  $x=2$  می‌باشد، بنابراین نمودار آن به صورت مقابل است که این موج را می‌توان از دو طرف گسترش داد.



۱- الف) جدول زیر را کامل کنید :

x	°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin(-x)$	°	$-°/5$			-1												
$2\sin(-x)$	°	-1			-2												

ب) نمودار  $y=\sin(-x)$  و  $y=2\sin(-x)$  را رسم کنید.

۲- نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

الف)  $y = -2 \sin \frac{1}{4} x$

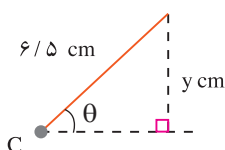
ب)  $y = -3 \cos \frac{1}{4} x$

۳- با استفاده از تعیین مقادیر حداقلی و حداکثری و نیز دوره‌ی تناوب توابع زیر را رسم کنید.

الف)  $y = 3 \sin 2x$

ب)  $y = \cos \frac{1}{3} x$

ج)  $y = -2 \cos \frac{\pi}{4} x$



۴- طول عقربه‌ی دقیقه شمار یک ساعت  $6/5$  cm است. عقربه با جهت محور افقی زاویه‌ی  $\theta$  می‌سازد. با توجه به مثلث مقابل می‌توان نوشت  $y = 6/5 \sin \theta$ .

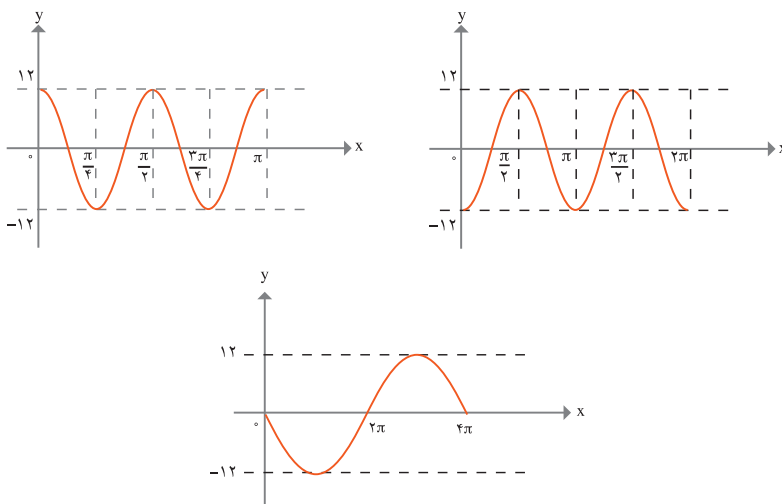
الف) حداکثر ارتفاع نوک عقربه چه قدر است ؟

ب) حداقل ارتفاع آن را محاسبه کنید. در کدام زوایا ارتفاع صفر است ؟

ج) طول عقربه‌ی ساعت شمار  $5$  cm و ارتفاع عمودی نوک آن از محور افقی تابعی به معادله‌ی  $y = 5 \sin \theta$  است، نمودار تابع  $y$  را در این حالت رسم کنید.



۵- معادله‌ی هر یک از منحنی‌های زیر را به صورت  $y = a \cos bx$  یا  $y = a \sin bx$  که در آن  $x$  بر حسب رادیان باشد، بیان کنید.



۶- وزنه‌ای به یک فنر وصل است به گونه‌ای که به طور پیوسته پایین و بالا می‌رود. تغییر مکان وزنه از نقطه‌ی تعادل بعد از  $t$  ثانیه از رابطه‌ی  $d = -3/5 \cos(2\pi t)$  به دست می‌آید که  $d$  اندازه بر حسب سانتی متر می‌باشد.

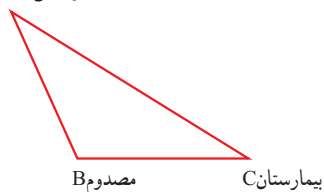
الف) نمودار تابع را به ازای  $0 \leq t \leq 3$  رسم نمایید.

ب) بیشترین فاصله‌ی وزنه از نقطه‌ی تعادل چه قدر است؟

ج) چه مدت طول می‌کشد تا وزنه یک نوسان کامل انجام دهد؟

## کاربردهایی از مثلثات

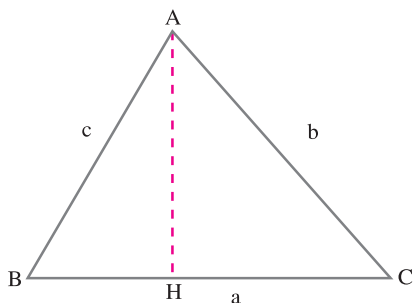
آبولانس A



فاطمه به مسائل امداد و نجات علاقه‌مند است. دلیل علاقه‌مندی وی وقوع اتفاقاتی چون زلزله در کشور ما است. در نتیجه او سعی دارد مسائل این چنینی را بهتر و بیش‌تر بشناسد. در یکی از این مسائل که در فیلمی آن را دیده بود حادثه‌ای در نقطه‌ی B مانند شکل مقابل روی داد.

(این حادثه را می‌توانید زلزله، تصادف، سیل، ... تصور کنید.) آمبولانس در فاصله ۱ کیلومتری از حادثه‌ی B در نقطه‌ی A قرار دارد. زاویه‌ی B, C را نیز راننده‌ی آمبولانس حدس زد. او فاصله‌ی خود تا بیمارستان را نیز می‌داند. راننده‌ی آمبولانس می‌خواهد بداند که آیا به اندازه‌ی کافی بنزین برای رفتن از B به C دارد یا نه؟

فاطمه نیز می‌خواهد این مسئله را حل نماید. او پیش خود چنین استدلال می‌نماید که : آمبولانس می‌بایست مسیر A تا B و سپس مسیر B تا C را طی کند.



فاطمه تلاش دارد که این مسئله را از طریق مثلثات حل نماید. اما در سال پیش زوایایی که او خوانده بود همه حاده بودند. در نتیجه پیش خود گفت : بگذار اول برای مثلث با زوایای حاده مسئله را حل کنم سپس بقیه‌ی مثلث‌ها را نیز می‌توان حل نمود. فاطمه مثلث مقابل را ترسیم نمود و سپس به حل آن به صورت زیر پرداخت :

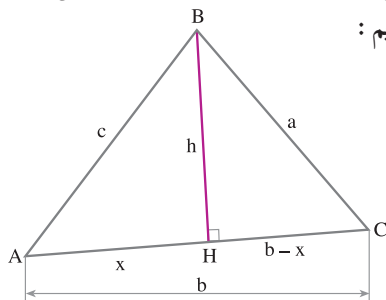
$$BC=BH+HC=AB\cos B+AC\cos C$$

با توجه به این که همه‌ی مقادیر برای او مشخص است مسئله حل می‌شود.



مسئله را برای زاویه‌ی منفرجه مانند قبل حل کنید.

فردای آن روز در کلاس درس، معلم رابطه‌ای را بررسی نمود که مسئله‌ی فوق را به راحتی با آن رابطه می‌توان حل نمود. حال به بررسی آن رابطه می‌پردازیم :



مثلث ABC را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید :

$$a^2=(b-x)^2+h^2=b^2-2bx+x^2+h^2=b^2-2b(ccosA)+c^2=b^2+c^2-2bccos A$$

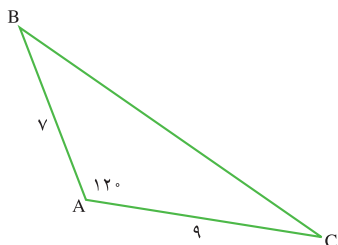
بنابراین در مثلث ABC داریم :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

به روابط فوق روابط کسینوس ها می گوئیم .



با استفاده از رابطه ی کسینوس ها، اندازه بزرگ ترین ضلع را در شکل مقابل به دست آورید.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 9^2 + 7^2 - 2(9)(7) \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{193}$$

۱- مسئله ی امداد و نجات را با استفاده از رابطه ی کسینوس ها حل کنید.

۱-۱) در مثلث ABC ,  $AB = 8$  ,  $AC = 10$  ,  $\cos A = \frac{1}{8}$  , مقدار BC را پیدا کنید.

۲-

الف) رابطه ی کسینوس ها را برای یک مثلث قائم الزاویه بنویسید.

ب) به نظر شما معنای تعمیم در عبارت «رابطه ی کسینوس ها تعمیم رابطه ی فیثاغورث است» چیست؟

به نظر فاطمه روش جدید و استفاده از فرمول فوق الذکر بهتر بود، چرا که لازم نبود تمامی زوایای مثلث را بشناسند و با شناخت یک زاویه مسئله را حل می کرد. آیا اگر در مسئله ی فوق زاویه ی B و اضلاع AC و AB مشخص بودند با استفاده از رابطه ی کسینوس ها می توانستیم مسئله را حل کنیم؟

فردای آن روز سمیه که همکلاسی فاطمه بود مسئله ای که به نظرش جالب می آمد را برای فاطمه تعریف نمود. مسئله آن بود که زمینی به شکل مثلث در انتهای محله ی آن ها بایر مانده بود که شهرداری می خواست آن جا را چمن کرده و تبدیل به پارک نماید. مسئله محاسبه ی مساحت زمین بود. ابتدا آن ها شکلی را به صورت مقابل ترسیم نمودند که در آن مساحت مثلث ABC را با فرمول هندسی  $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \times BC$  می خواستند محاسبه نمایند.

اما در این زمین بایر مقدار زیادی آشغال ریخته شده بود و عملاً محاسبه ی AH ممکن نبود. بعد از دو روز فکر کردن فاطمه راه حل دیگری یافت. او به جای AH، مقدار  $AB \times \sin B$  را قرار داد و در نتیجه :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB \times \sin B) \times BC = \frac{1}{2}AB \times BC \times \sin B = \frac{1}{2}ac \sin B$$

حال به نظر او فرمول بالا هر چند به لحاظ ریاضی با فرمول هندسی یکی بود، اما به شکل عملی می توانست مساحت مثلث را حساب کند.

مثال

مساحت مثلث ABC را در صورتی که  $B=135^\circ$  درجه و  $a=5$  و  $c=6$  باشد پیدا کنید :

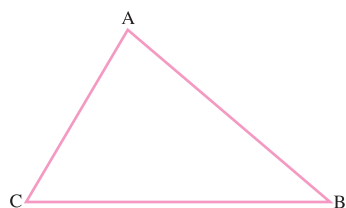
$$S = \frac{1}{2}ac \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin 135^\circ = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

در مثلث  $ABC$ ، اگر  $AB = ۱۴$  سانتی متر و  $BC = ۹$  سانتی متر و  $\angle B = ۳^\circ$  باشد، مساحت مثلث را حساب کنید.

فاطمه و سمیه مسئله و حل خودشان را فردای آن روز به معلم خود نشان دادند. معلم آن‌ها را تحسین نموده و راه حل آن‌ها را به بچه‌های کلاس نشان داد.

سپس درس جدید را به این شکل ادامه داد. همان گونه که دیدیم مساحت مثلث را بچه‌ها به شکل زیر محاسبه نمودند. حال به همین شکل سه رابطه‌ی متقارن زیر را داریم:



الف)  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$

ب)  $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AC \times \sin C$

ج)  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin B$

در ادامه توضیح داد که اگر سه فرمول بالا را با هم برابر قرار دهیم و بر

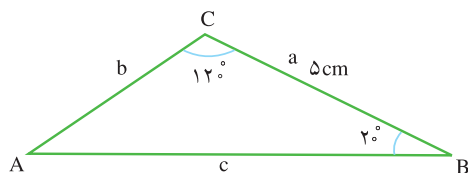
$$\frac{1}{2} AB \times AC \times BC$$

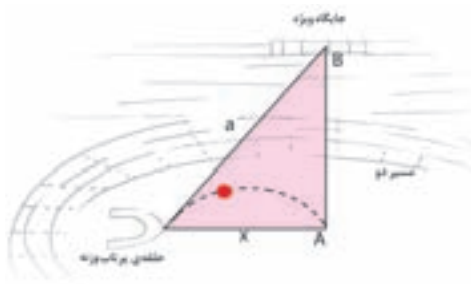
تقسیم نماییم داریم:

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin B}{AC}$$

رابطه‌ی فوق را نخستین بار ابوریحان بیرونی دانشمند ایرانی در کتاب «قانون مسعودی» به وجه قابل توجهی اثبات کرده است.

۱- مثلث زیر را در نظر بگیرید. اگر  $B = ۲^\circ$  و  $C = ۱۲^\circ$  و  $a = ۵\text{cm}$  باشد، مقادیر  $b$  و  $c$  را به دست آورید.





- ۲- با توجه به شکل مقابل در صورتی که  $a=562$  متر و  $B=32^\circ$  و  $A=9^\circ$  باشد، فاصله  $x$  را حساب کنید.



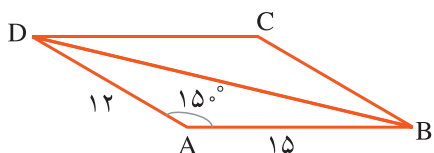
- ۱- محیط یک زمین کشاورزی که به شکل مثلث است را به دست آورید، اگر یک ضلع آن ۴۵ کیلومتر و ضلع دیگر آن  $4^\circ$  کیلومتر و زاویه بین آن‌ها  $15^\circ$  درجه باشد.

- ۲- طول قطری یک پنج ضلعی منتظم که طول یک ضلع آن  $1^\circ$  سانتی متر می باشد را پیدا کنید.

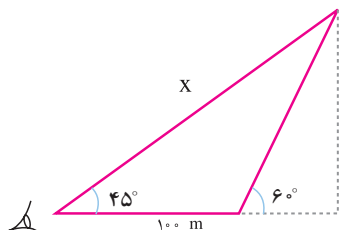
- ۳- سُرُسره‌های یک پارک را در نظر بگیرید که نردبانی به طول  $5/2$  متر جهت بالا رفتن دارد. اگر طول سُرُسره  $5/4$  متر باشد و نردبان زاویه  $75^\circ$  درجه با زمین بسازد، سینوس زاویه‌ای که سُرُسره با زمین می سازد را حساب کنید.

- ۴- قطرهای یک متوازی الاضلاع  $12$  و  $22$  سانتی متر است و تقاطع این دو یک زاویه  $125^\circ$  می سازد. طول اضلاع بزرگ تر متوازی الاضلاع را به دست آورید.

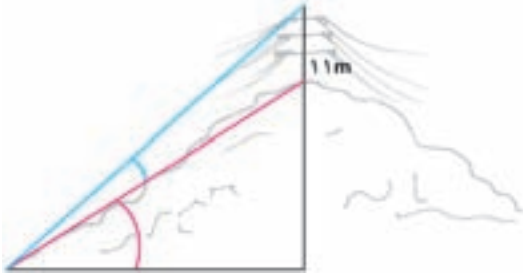
- ۵- باغی به شکل دوزنقه وجود دارد که طول‌های اضلاع موازی آن  $3^\circ$ ،  $2^\circ$  کیلومتر و دو ضلع دیگر هر یک  $1^\circ$  کیلومتر است. اگر یکی از زوایای پایه  $6^\circ$  باشد، مساحت باغ را حساب کنید.



- ۶- اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع دارای اندازه‌های  $12$  و  $15$  سانتی متر است اندازه‌ی یک زاویه‌ی آن  $15^\circ$  است. مساحت متوازی الاضلاع را پیدا کنید.

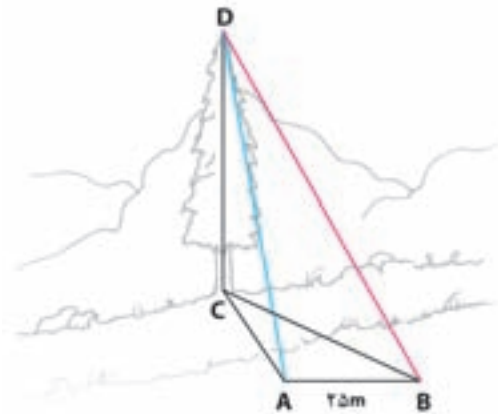


- ۷- شخصی نزدیک آتن یک ایستگاه رادیویی ایستاده است. زاویه‌ی دید شخص با نوک آتن  $6^\circ$  است. اگر او  $100$  متر به عقب برود زاویه‌ای که با نوک آتن در موقعیت جدید می سازد  $45^\circ$  است. ارتفاع آتن را حساب کنید.



۸- آنتنی به طول ۱۱ متر را بر روی تپه‌ای در نظر بگیرید به گونه‌ای که انتهای آنتن با سطح تپه زاویه‌ی  $۱/۵^\circ$  مطابق شکل می‌سازد، اگر زاویه‌ای که ابتدای آنتن با سطح افقی زمین می‌سازد  $۲۵^\circ$  باشد ارتفاع تپه را حساب کنید.

$$(\sin ۲۵^\circ \approx ۰/۴۲ \text{ و } \sin ۱/۵^\circ \approx ۰/۰۲)$$



۹- رضا می‌خواهد درختی را که در سمت دیگر رودخانه است اندازه بگیرد. او روبروی درخت در نقطه‌ی A ایستاده است. زاویه‌ی دید رضا با نوک درخت حدوداً  $۶^\circ$  است. او به اندازه‌ی  $۱۲۵^\circ$  برمی‌گردد و بعد از طی ۲۵ متر به نقطه‌ی B می‌رسد. زاویه‌ی بین مسیر AB و خط BC (پای درخت است)  $۴۵^\circ$  می‌باشد. ارتفاع درخت را حساب کنید.

۱۰- محمد و جواد در فاصله‌ی ۳ کیلومتری از یک‌دیگر، راکتی که از یک پایگاه موشکی پرتاب شده است را مشاهده می‌کنند. اگر موقعیت محمد به جواد شمال به جنوب باشد به گونه‌ای که محمد راکت را به طرف غرب مشاهده می‌کند که با موقعیت او  $۶۵^\circ$  درجه زاویه دارد و جواد راکت را به طرف غرب مشاهده می‌کند که با موقعیت او  $۷۵^\circ$  درجه زاویه دارد. فاصله‌ی هر یک از آنها تا راکت چه قدر است؟