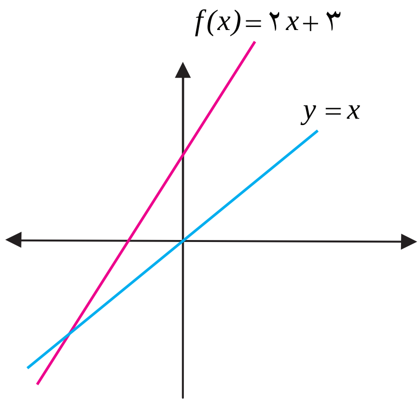
یافتن ضابطه‌ی تابع وارون

فعالیت ۹

نمودار تابع خطی $f(x) = ۲x + ۳$ داده شده است.



۱ــ وارون این تابع را در همان دستگاه مختصات رسم کنید.

۲ــ معادله‌ای برای وارون این تابع به دست آورید. می‌توانید از این نکته استفاده کنید که نقاط $(۰,۳),(۱,۵)$ روی نمودار f قرار دارند. پس نقاط $(۳,۰),(۵,۱)$ روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارند و نمودار $f^{-۱}$ یک خط راست است.

پیدا کردن ضابطه‌ی $f^{-۱}$ در فعالیت قبل چندان دشوار نبود زیرا f یک تابع خطی بود. اما اگر f خطی نباشد کار چندان ساده نیست. اکنون با روش دیگری وارون f را به دست می‌آوریم که بتوان آن را هنگامی که تابع داده شده خطی هم نیست به کار برد.
تابع $f(x) = ۲x + ۳$ را در نظر می‌گیریم. در جدول زیر برخی از مقادیر از دامنه و مقادیر نظیر آن از برد آن داده شده‌اند. همان طور که می‌دانید f یک به یک است اگر شبیه همین جدول را برای تابع وارون f در نظر بگیریم جدولی به دست می‌آید که در آن جای مقادیر متناظر y,x تغییر کرده است.

جدول تابع f

x	y
۲	۷
۱	۵
$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱۱}{۳}$
-۱	۱
-۲	-۱
x	$۲x+۳$
a	$۲a+۳$

جدول تابع $f^{-۱}$

x	y
۷	۲
۵	۱
$\frac{۱۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
۳	۰
۱	-۱
-۱	-۲

زوج مرتب $(۱,۵)$ به f تعلق دارد و زوج $(۵,۱)$ به وارون آن. عدد ۱ توسط قانون تابع به ۵ نظیر شده است یعنی ۱ در ۲ ضرب شده و ۳ واحد به آن اضافه شده است اما چه قانونی ۵ را به ۱ نظیر می‌کند؟ پاسخ برگشت از همین مسیر است. یعنی ابتدا سه واحد از ۵ کم کنیم و سپس مقدار به دست آمده را بر ۲ تقسیم کنیم جدول زیر این فرآیند را بهتر توصیف می‌کند. اگر تابع وارون f را با g نمایش دهیم، ضابطه آن به صورت : $g(y)=\dfrac{y-۳}{۲}$ می‌باشد. مشخص است که yها از برد f اختیار می‌شوند.

y	$\dfrac{y-۳}{۲}=x$
۷	۲
۵	۱
$\dfrac{۱۱}{۳}$	$\dfrac{۱}{۳}$
۳	۰
۱	-۱
-۱	-۲

همان طور که می‌دانید g را به صورت‌های زیر هم می‌توان نمایش داد :

$$g(a)=\frac{a-۳}{۲} \quad , \quad g(b)=\frac{b-۳}{۲} \quad , \quad g(t)=\frac{t-۳}{۲}$$

آن چه که مهم است این است که دامنه‌ی g همان برد f است بنابراین می‌توان نوشت :

$$g(x)=\frac{x-۳}{۲} \qquad x\in R_f$$

از آنجا که g را معمولاً با $f^{-۱}$ نمایش می‌دهیم داریم : $f^{-۱}(x)=\dfrac{x-۳}{۲}$

اکنون آن چه بیان شده را به عنوان یک روش به کار می‌بریم.

برای به‌دست‌آوردن ضابطه‌ی تابع وارون یک تابع وارون‌پذیر مانند f در معادله‌ی $y=f(x)$ ، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x تابع $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

مثال

ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=۲x+۳$ را به دست می‌آوریم.

$$
\begin{aligned}
f(x)=x+ \quad &\Rightarrow y=۲x+۳\\
&\Rightarrow ۲x=y-۳\\
&\Rightarrow x=\frac{y-۳}{۲}\\
&\Rightarrow g(y)=\frac{y-۳}{۲}\\
&\Rightarrow f^{-}(x)=\frac{x-۳}{۲}
\end{aligned}
$$

تمرین در کلاس

نشان دهید توابع زیر یک به یک هستند و دامنه و برد و ضابطه تابع وارون آن‌ها را به دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-۲}$ ب) $g(x)=\frac{x-۵}{۲x+۳}$

فعالیت ۱۰

۱ــ اگر $f(x)=۲x+۳$ دیدیم که وارون آن، تابع $g(x)=\frac{x-۳}{۲}$ است. توابع $(gof)(x), (fog)(x)$ را محاسبه کنید.

۲ــ اگر $f(x)=\sqrt{۲x-۱}$ ثابت کنید که f وارون‌پذیر است و وارون آن تابع $g(x)=\frac{x^۲+۱}{۲}$ است. توابع $(gof)(x), (fog)(x)$ را محاسبه کنید.

۳ــ به طور کلی اگر تابع f دارای تابع وارون g باشد در مورد توابع $(gof)(x), (fog)(x)$ چه حدس می‌زنید؟ توجه کنید که تابع و تابع وارون عکس یکدیگر عمل می‌کنند.

خاصیت تابع و تابع وارون نشان می‌دهد که قضیه زیر برقرار است.

اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند داریم : $D_g=R_f \quad , \quad R_g=D_f$

و برای هر x در دامنه f داریم : $g(f(x))=x$

و برای هر x در دامنه‌ی g داریم : $f(g(x))=x$

تذکر : توجه داریم که $f^{-۱}$ یک نماد است و نباید آن را با $\frac{۱}{f(x)}$ اشتباه گرفت.

تمرین در کلاس

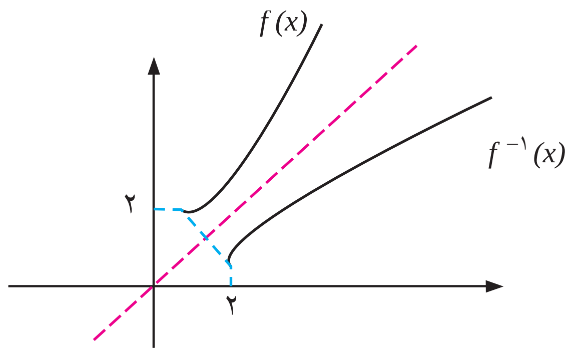
۱ــ اگر $f(x)=\frac{۷}{x}+۳$ ، $g(x)=\frac{۷}{x-۳}$، $h(x)=\frac{x-۳}{۷}$ ثابت کنید که f , g وارون یکدیگرند ولی h,g وارون یکدیگر نمی باشند.

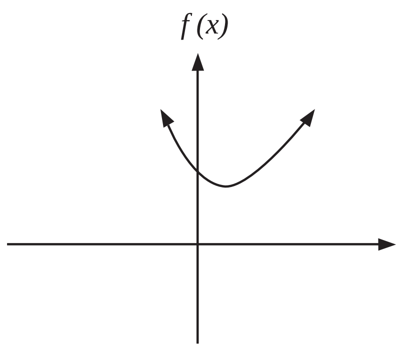
۲ــ آیا دو تابع $f(x)=\frac{۳}{۵}$ ، $g(x)=\frac{۵}{۲}$ وارون یکدیگرند؟

۳ــ اگر $y=m_۱x+b_۱$ و $y=m_۲x+b_۲$ معادله دو خط باشند که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، نشان دهید $m_۱m_۲=۱$.

مثال

تابع $f(x)=x^۲-۲x+۳$ یک به یک نیست. زیرا $f(۰)=f(۳)$ ولی $۳\neq۰$ یک به یک نبودن f از روی نمودار آن نیز به سادگی دیده می‌شود.





اما این تابع روی دامنه‌ی $[۱,\infty)$ یک به یک است و می‌توانیم معادله‌ای برای $f^{-۱}$ به دست آوریم. نمودار بالا یک به یک بودن f را روی دامنه‌ی $[۱,\infty)$ نشان می‌دهد و با روش جبری نیز می‌توانیم این مطلب را ثابت کنیم.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow x_۱^۲-۲x_۱+۳=x_۲^۲-۲x_۲+۳$$
$$\Rightarrow(x_۱-۱)^۲+۳=(x_۲-۱)^۲+۲$$
$$\Rightarrow(x_۱-۱)^۲=(x_۲-۱)^۲$$
$$\Rightarrow x_۱-۱=x_۲-۱$$
$$\Rightarrow x_۱=x_۲$$

توجه داشته باشید که در نتیجه‌گیری‌های بالا از این که $۱\leq x_۱$ و $۱\leq x_۲$ استفاده کرده‌ایم (چگونه؟). برای بدست آوردن ضابطه تابع وارون داریم :

$$f(x)=x^{۲}-۲x+۳ \Rightarrow y=(x-۱)^{۲}+۲ \Rightarrow y-۲=(x-۱)^{۲} \Rightarrow x-۱=\pm\sqrt{y-۲}$$

جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین $x-۱=\sqrt{y-۲}$ در نتیجه

$$x=\sqrt{y-۲}+۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۲}+۱$$

به کمک نمودارها و نیز از ضابطه توابع دیده می‌شود که :

$$D_f=[۱,+\infty)=R_{f^{-۱}}$$

$$R_f=[۲,+\infty)=D_{f^{-۱}}$$

بنابراین :

$$f^{-۱}:[۲,+\infty)\rightarrow[۱,+\infty)$$

$$f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۲}+۱$$

درستی تساوی $f(f^{-۱}(x))=x$ با محاسبه زیر روشن می‌شود.

$$f(f^{-۱}(x))=f(\sqrt{x-۲}+۱)=(\sqrt{x-۲}+۱-۱)^{۲}+۲=(\sqrt{x-۲})^{۲}+۲=x-۲+۲=x$$

اثبات درستی رابطه‌ی $f^{-۱}(f(x))=x$ به طریق مشابه است.

بحث در کلاس

وارون یک تابع صعودی (اکید)، صعودی است یا نزولی؟ وارون یک تابع نزولی (اکید) چگونه است؟

مسائل

۱ــ تحقیق کنید که توابع $f(x)=\frac{۱}{x}+۲$ ، $g(x)=\frac{۱}{x-۲}$ وارون یکدیگرند. برای کدام مقادیر x داریم $f(g(x))=x$ و برای کدام مقادیر x داریم $g(f(x))=x$ ؟

۲ــ فرض کنید تابع f دارای وارون است. اگر نمودار f در ربع اول واقع شود، نمودار $f^{-۱}$ درکدام ناحیه قرار می‌گیرد؟

۳ــ نشان دهید تابع $f(x)=|x-۲|+۳$ یک به یک نیست. با محدود کردن دامنه f یک تابع یک به یک بسازید و وارون آن را به دست آورید.

۴ــ ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{x-۵}{۲x+۳}$ یک به یک است و با محاسبه $f^{-۱}$ ، دامنه و برد f را به‌دست آورید.
دامنه $f^{-۱}$ = برد f

۵ــ در هر یک از حالت‌های زیر نشان دهید که توابع g, f وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=x^{۳}-۵\ ,\ g(x)=\sqrt[۳]{x+۵}$

ب) $f(x)=\sqrt{x-۲}\ ,\ g(x)=x^{۲}+۲x\geq ۰$

۶ــ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

الف) f وارون پذیر نباشد.

ب) برای هر عددحقیقی x ، $x<f(x)$.

۷ــ وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند به دست آورید.

الف) $f(x)=(x+۵)^{۲}\quad x\geq -۵$

ب) $f(x)=-|x-۱|+۱\quad x\geq ۱$

ج) $f(x)=(x-۳)^{۲}$

د) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

۸ــ نشان دهید که تابع $f(x)=\dfrac{۳x-۲}{۵x-۳}$ وارون خودش است.

۹ــ تابع $f(x)=ax+b\quad a\neq ۰$ داده شده است همه‌ی مقادیرb,a را که به ازای آن‌ها $f^{-۱}(x)=f(x)$ باشد را بیابید.

۱۰ــ در مورد وارون پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۲ & x\leq -۱\\ x^{۲} & -۱<x<۱\\ x+۱ & ۱\leq x\end{cases}$ تحقیق کنید.

۱۱ــ اگر $f(x)=x+۳$ ، $g(x)=۳x-۷$ توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $(fog)^{-۱}$ ب) $g^{-۱}of^{-۱}$

۱۲ــ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه‌ی $h(t)=۱۰۰-\dfrac{۴۹}{۱۰}t^{۲}$ به دست می‌آید.

الف) دامنه و برد تابع $h(t)$ را به دست آورید.

ب) چرا $h(t)$ تابعی یک به یک است و معنای فیزیکی آن چیست؟

ج) تابع وارون h را به دست آورید.

د) معنای فیزیکی تابع وارون h چیست و چه مقدارهایی را به چه مقدارهایی تبدیل می‌کند؟

توابع چند جمله‌ای و توابع متناوب

قبلاً با توابع خطی آشنا شده‌اید. هر تابع به صورت $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=0$، تابع به صورت $f(x)=b$ درمی‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامند. توابع خطی حالت خاصی از توابعی هستند که آن‌ها را توابع چندجمله‌ای می‌نامند. توابع درجه دوم نیز حالت خاصی از توابع چندجمله‌ای هستند.

هر تابع به‌صورت : $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ که در آن $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ اعدادی حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ را یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌نامند.

برای مثال هر تابع خطی مانند $f(x)=a_1 x + a_0$ ، $a_1 \neq 0$ یک تابع چندجمله‌ای درجه اول می‌باشد.
درجدول زیر مثال‌هایی از توابع چندجمله‌ای ارائه شده است.

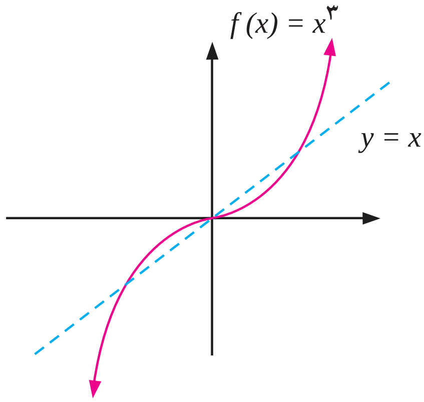
مثال	شکل کلی	درجه‌ی چندجمله‌ای
$f(x)=3$	$f(x)=a$	۰ (توابع ثابت)
$f(x)=\frac{2}{3}x-5$	$f(x)=a_1 x + a_0$	۱(خط با شیب a_1)
$f(x)=-3x^2+2x+1$	$f(x)=a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	۲(سهمی‌ها)
$f(x)=7x^2-\sqrt{2}x^2+2x-5$	$f(x)=ax^2+ax^2+ax^2+a_1 x+a_0$	۳
$f(x)=x^4-x^3+x$	$f(x)=a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	۴

با رسم نمودار توابع چندجمله‌ای از درجه ۰، ۱ ، ۲ و یافتن دامنه و برد آن‌ها آشنا شده‌اید. دراین‌جا نمودار تابع چندجمله‌ای $f(x)=x^3$ و برخی از توابع چندجمله‌ای دیگر درجه سوم که به‌کمک تابع $y=x^3$ می‌توان نمودار آن‌ها را رسم کرد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

دامنه‌ی تابع $f(x)=x^3$ برابر IR است و تابعی فرد است، بنابراین نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن است . با توجه به ضابطه تابع برای مقادیر مثبت x، مقدار تابع مثبت است بنابراین کافی است نمودار تابع در ربع اول را رسم کنیم و سپس قرینه آن را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم. این تابع صعودی است زیرا اگر $x_1<x_2$ می‌توان نتیجه گرفت $x_1^3 < x_2^3$.
برای $0<x<1$ داریم : $0<x^3<x$ و برای $x>1$ داریم $x<x^3$ ، بنابراین نمودار این تابع دربازه‌ی $(0,1)$ زیر خط $y=x$ و در بازه‌ی $(1,\infty)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد .

اکنون با کمک نقطه‌یابی رسم نمودار تقریبی $f(x)=x^{۳}$ به سادگی انجام می‌شود.

x	$f(x)$
۰	۰
$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲۷}$
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$
۱	۱
$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۲۷}{۸}$
۲	۸

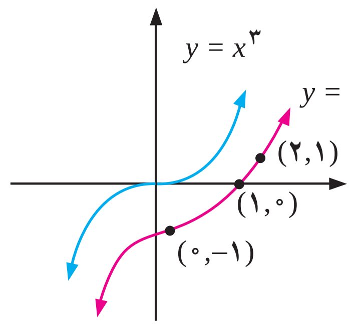


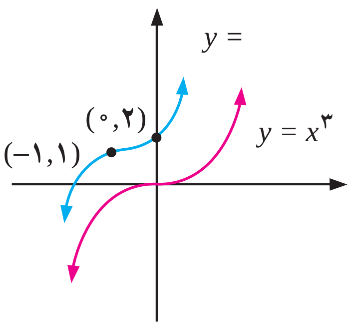
باتوجه به یک به یک بودن، این تابع وارون‌پذیر است و $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$.

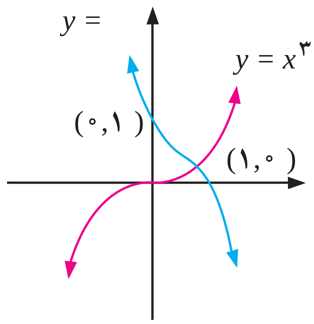
تمرین در کلاس

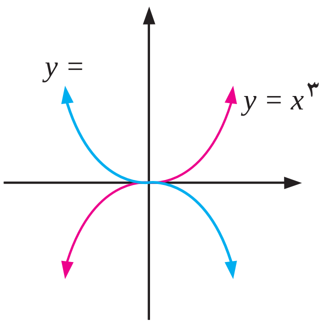
۱ــ نمودار $y=\sqrt[۲]{x}$ را در همان دستگاه مختصات به همراه نمودار $y=x^{۲}$ رسم کنید.

۲ــ در هریک از شکل‌های زیر نمودار تابع $y=x^{۳}$ و نمودار یک تابع دیگر که به کمک آن به دست آمده است در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند. ضابطه نمودار تابع جدید را بنویسید.









۳ــ نمودار توابع $y=(x+\frac{۳}{۲})^۳$ و $y=(x-۱)^۳+۲$ و $y=۲x^۳$ را به کمک نمودار تابع $y=x^۲$ رسم کنید.

حرکت‌هایی که الگوی خاصی را تکرار می‌کنند حرکت متناوب می‌نامند. حرکت زمین دور خورشید، تغییر فصل‌ها، حرکت عقربه‌های ساعت از این نوع حرکت‌ها هستند. این نوع حرکت در تنظیم بلند مدت وقت و محاسبه زمان به انسان کمک می‌کند. حرکت دیگر تناوبی گردش ماه به دور زمین است که در طی یک دوره تقریباً ۲۸ روزه صورت می‌گیرد و ما را در محاسبه تعداد ماه‌ها یاری می‌نماید. بسیاری از پدیده‌های طبیعی دیگر در عالم خلقت نیز دارای رفتار تناوبی هستند. انسان‌ها از این‌گونه رفتارها در ساخت مصنوعات بشری مانند ساعت هم استفاده کرده‌اند.

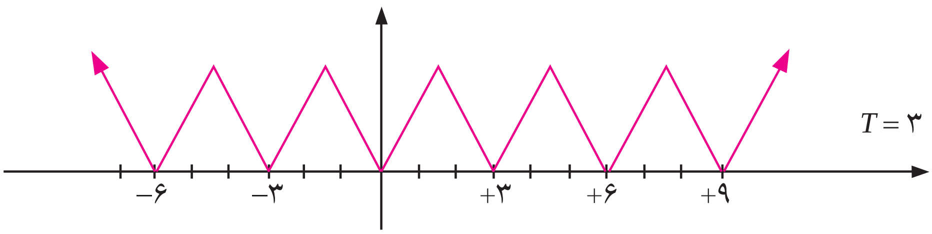
توابعی که بیان کننده این حرکات تناوبی هستند شکل خاصی دارند و آن‌ها را تابع‌های متناوب می‌نامند. سال قبل با توابع متناوبی مانند $y = sinx$ و $y = cosx$ و دوره تناوب برخی از توابع مثلثاتی آشنا شده‌اید. در اینجا به طور دقیق‌تری توابع متناوب را تعریف می‌کنیم.

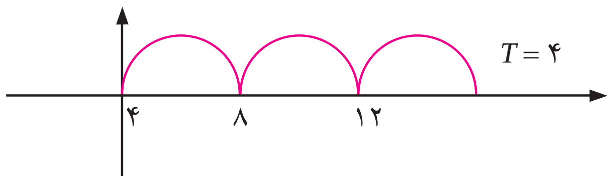
تابع f را متناوب نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x+T \in D_f$ و $f(x+T)=f(x)$. کوچک‌ترین عدد T با خاصیت بالا را دوره‌ی تناوب f می‌نامند.

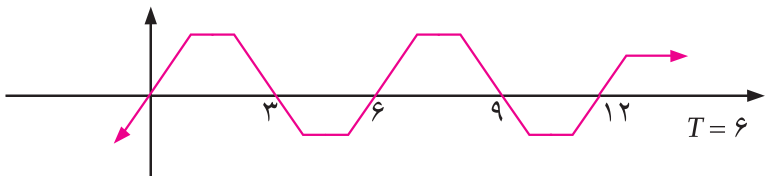
مثال

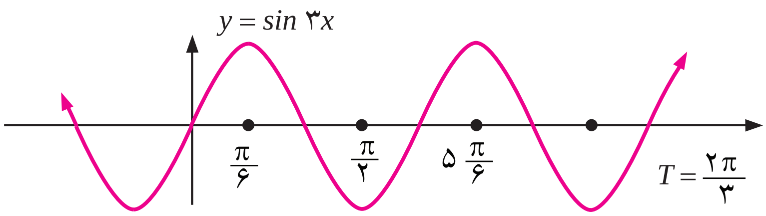
۱ : توابع $y = sinx$ و $y = cosx$ توابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۲π هستند.

۲ : توابعی که نمودار آن‌ها در زیر آمده است توابعی متناوب با دوره‌ی تناوب‌های مختلف هستند.





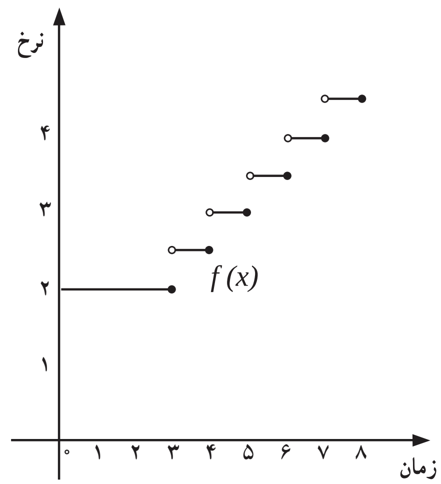




توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

نرخ ارسال بسته‌های پستی به طور معمول تابعی از وزن آن‌ها است. همچنین نرخ توقف در پارکینگ‌ها برحسب ساعت توقف اتومبیل‌ها در آن جا تعیین می‌شود، یعنی نرخ پارکینگ تابعی از زمان توقف است. فرض کنید پارکینگ یک مجتمع تفریحی و ورزشی برای سه ساعت اول توقف ۲ هزارتومان و برای هر ساعت اضافه یا زمانی کمتر از یک ساعت ۵۰۰ تومان دریافت کند. اگر حداکثر زمان توقف در این پارکینگ ۸ ساعت باشد، نمودار تابعی که نرخ توقف را به ازای همه ساعات ممکن نشان دهد به شکل زیر است.

x (ساعات توقف)	$f(x)$ = نرخ برحسب هزار تومان
$۰ < x \leq ۳$	۲
$۰ < x \leq ۴$	۲/۵
$۴ < x \leq ۵$	۳
$۵ < x \leq ۶$	۳/۵
$۶ < x \leq ۷$	۴
$۷ < x \leq ۸$	۴/۵



دامنه این تابع [۰ , ۸) و برد آن مجموعه {۲,۲/۵,۳,۳/۵,۴,۴/۵} می‌باشد. برای مثال برای توقف ۵ ساعت و ۲۰ دقیقه‌ای باید مبلغ ۳۵۰۰ تومان پرداخت کرد.

توابعی که نمودار آن‌ها شبیه تابع بالا هستند به توابع پله‌ای معروف هستند.

هر تابعی که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم‌بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها تابع ثابت باشد یک تابع پله‌ای می‌نامند.

گونه خاصی از توابع پله‌ای تابع جزء صحیح می‌باشد. ابتداجزء صحیح یک عدد را تعریف می‌کنیم و بعد از آن تابع جزء صحیح را تعریف می‌کنیم.

برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح آن، بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نیست. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

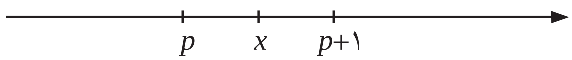
برای مثال داریم:

$[\sqrt{۳}] = ۱$ $\qquad [۷] = ۷ \qquad [۴,۹] = ۴ \qquad [۳,۲] = ۳$

$[-۲/۹۵] = -۳ \qquad [-۲] = -۲ \qquad [۱-\sqrt{۲}] = -۱ \qquad [-۱/۵] = -۲$

جزء صحیح یک عدد به شکل زیر نیز مشخص می‌شود.

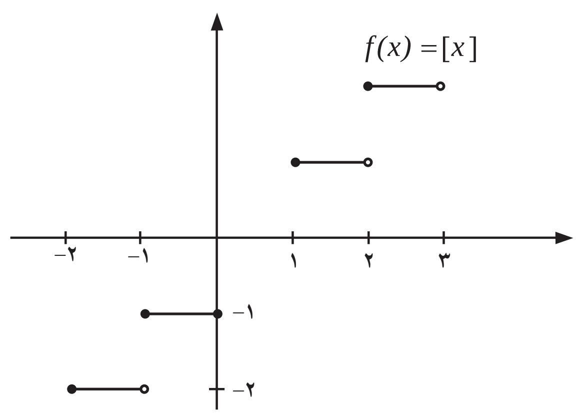
برای هر عدد حقیقی x، یک عدد صحیح p موجود است که $p \le x < p+۱$. p را جزء صحیح x می‌نامند و آن را با نماد $[x]$ نشان می‌دهند.



تابعی که به‌هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و با $f(x) = [x]$ نمایش داده می‌شود.

دامنه تابع جزء صحیح مجموعه‌اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد صحیح می‌باشد. نمودار این تابع با توجه به جدول، در بازه $[-۲ ، ۳)$ رسم شده‌است.

x	$[x]$
$-۲ \le x < -۱$	-۲
$-۱ \le x \le ۰$	-۱
$۰ \le x < ۱$	۰
$۱ \le x < ۲$	۱
$۲ \le x < ۳$	۲



تمرین در کلاس

یک شرکت خدماتی برای هر ساعت کار و یا کسری از ساعت ۵ هزار تومان هزینه دریافت می‌کند. تابعی بنویسید که‌هزینه x ساعت کار را محاسبه کند. نمودار این تابع را نیز رسم کنید.

مثال : تابع $f(x)=[2x]$ را در بازه $[-1 , 2]$ رسم می‌کنیم.

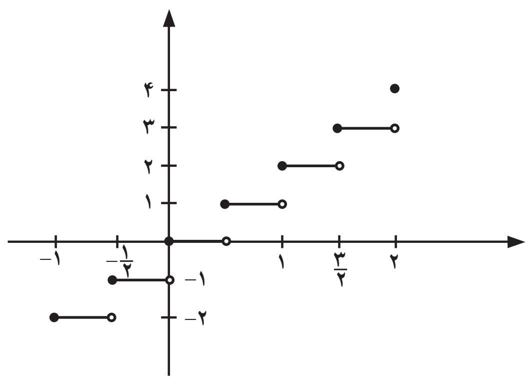
می‌دانیم که نمودار این تابع از انقباض نمودار تابع $[x]$ با ضریب $\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید. اگر $-1 \le x \le 2$ آنگاه $-2 \le 2x \le 4$ و با توجه به تعریف جزء صحیح، $[2x]$ مقدارهای ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را اختیار خواهد کرد.

$$[2x]=-2 \Rightarrow -2 \le 2x < 1 \Rightarrow -1 \le x < -\frac{1}{2}$$

با استدلال مشابه داریم :

$$[2x]=-1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le x < 0 , [2x]=0 \Rightarrow 0 \le x < \frac{1}{2}$$

بنابراین تابع در بازه‌های متوالی به طول $\frac{1}{2}$ که‌از نقطه ۱- شروع می‌شود به‌ترتیب مقدارهای۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را اختیار خواهد کرد. نمودار این تابع به شکل زیر است.



مسائل

۱ــ تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} 5 & x \le -3 \\ -1 & -1 \le x < 4 \\ 2 & 4 \le x \end{cases}$$

۲ــ نمودار تابع $y=[\frac{1}{3}x]$ را در بازه $[-6 , 6]$ رسم کنید .

۳ــ وارون پذیری تابع $y = [x]$ را بررسی کنید.

۴ــ نمودار توابع زیر را در بازه $[-۲ , ۲]$ رسم کنید.

الف) $y = ۲[x]$ ب) $y = [-x]$

۵ــ نشان دهید تابع $y = x - [x]$ متناوب است و با به دست آوردن دوره تناوب آن، نمودار آن را رسم کنید.

۶ــ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار $[x]$ رسم کنید.

الف) $y = [x] - \frac{۱}{۲}$ ب) $y = ۲[x] + ۱$

۷ــ نمودارهای دو تابع $y = [x - ۳]$ و $y = [x] - ۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

۸ــ یک شرکت پستی برای ارسال بسته‌های پستی تا کمتر از یک کیلوگرم ۲ هزار تومان و برای ارسال بسته‌های از ۱ تا کمتر از ۲ کیلوگرم ۴ هزار تومان و از ۲ تا کمتر از ۳ کیلوگرم ۶ هزار تومان و برای بسته‌های بیشتر نیز به‌همین ترتیب دریافت می‌کند. اگر $f(x)$ هزینه‌ارسال یک بسته پستی x کیلوگرمی می‌باشد، نمودار آن را رسم کنید و معادله‌ای برای آن بیابید.

تمرینات دوره‌ای

۱ــ قرار است یک مزرعه مستطیلی شکل برای پرورش گل ساخته شود. برای این کار ۲۰۰ متر نرده‌ی چوبی برای محصور کردن این ناحیه در اختیار داریم. ابعاد این مستطیل را چقدر در نظر بگیریم تا بزرگترین مساحت ممکن برای این مزرعه را به دست آوریم؟

با طی مراحل زیر، این مسئله را حل کنید.

الف) جدول زیر را تکمیل کنید.

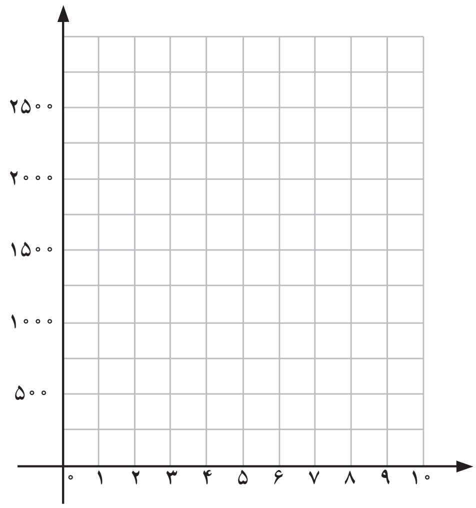
x یک ضلع مستطیل	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
ضلع دیگر				۷۰							
S مساحت				۲۱۰۰							

ب) مساحت این مستطیل را به صورت تابعی از x به‌دست آورید.

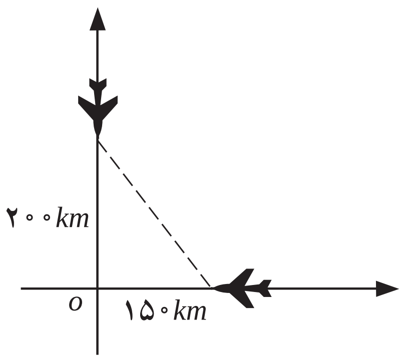
ج) دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

د) آیا از روی نمودار می‌توانید بزرگترین مساحت ممکن برای مزرعه گل را به‌دست آورید؟

هـ) به روش جبری و با کمک ضابطه تابع، بزرگترین مساحت ممکن برای مزرعه را به دست آورید.



۲ــ دو هواپیما مطابق شکل روبه‌رو در ارتفاع یکسان در دو مسیر عمود برهم، با سرعت ۹۰۰ کیلومتر در ساعت در حال حرکت هستند. یک هواپیما ۱۵۰ کیلومتر و هواپیمای دیگر ۲۰۰ کیلومتر از نقطه O فاصله دارند.



الف) پس از ۲۰ دقیقه فاصله بین دو هواپیما چقدر است؟

ب) فاصله بین دو هواپیما را بر (حسب کیلومتر) به عنوان تابعی از زمان (دقیقه) به‌دست آورید. (شکل زمان $t=0$ را نشان می‌دهد.)

ج) از طریق این تابع استدلال کنید که‌این دو هواپیما به‌هم برخورد نخواهند کرد.

۳ــ اگر $h(x)=(2x+5)^2$. h را به صورت ترکیب دو تابع مانند f , g بنویسید به قسمی که $h(x)=(fog)(x)$ و $g(0)=5$.

۴ــ قیمت معمولی یک کالا x (هزار) تومان است . فرض کنید :

$$f(x)=x-400 \quad , \quad g(x)=0/75\,x$$

الف) f,g چه چیزی را برحسب قیمت کالا توصیف می‌کنند؟

ب) fog را بیابید و توضیح دهید که fog چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می‌کند.

ج) gof چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می‌کند؟

۵ــ فرض کنید f , g توابعی از IR به IR هستند و دامنه f شامل برد g است. ثابت کنید :

الف) اگر f , g صعودی باشند آنگاه fog صعودی است.

ب) اگر f , g نزولی باشند آنگاه fog صعودی است.

ج) اگر f صعودی و g نزولی باشد آنگاه fog نزولی است.

د) برای هر یک از موارد (الف) و(ب) و(ج) مثالی ارائه کنید.

۶ــ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر f روی بازه $[a,b]$ صعودی باشد، در هیچ نقطه‌ای محور xها را قطع نمی‌کند.

ب) اگر f روی بازه $[a,b]$ صعودی باشد، حداکثر در یک نقطه محور xها را قطع می‌کند.

۷ــ تحت چه شرایطی تابع خطی $f(x)=ax+b$ زوج است؟ تحت چه شرایطی فرد است؟

۸ ــ اگر $f(x)=\sqrt{x-1}, g(x)=x^2+2, h(x)=x+3$ ، تابع $fogoh$ را به‌دست آورید.

۹ــ فرض کنید $h(x)=(f(x))^2+g(x)$ که توابع f , g ممکن است زوج یا فرد باشند.

الف) تحت چه شرایطی h حتماً یک تابع زوج می‌شود؟

ب) تحت چه شرایطی h حتماً یک تابع فرد می‌شود؟

۱۰ــ الف) فرض کنید که g یک تابع زوج باشد و $h=fog$. آیا در مورد زوج یا فرد بودن h می‌توان اظهار نظر قطعی کرد؟

ب) اگر g یک تابع فرد باشد و $h=fog$، آیا در مورد زوج یا فرد بودن h می‌توان اظهار نظر قطعی کرد؟

ج) اگر f , g دو تابع فرد باشند، در مورد زوج یا فرد بودن fog چه می‌توان گفت؟

۱۱ــ تابعی مانند f رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

الف) $[-2,20]$ = دامنه f

ب) $[-8,14]$ = برد f

ج) $f(2)=f(8)=0$

د) f در بازه $[10,16]$ و $[0,4]$ صعودی باشد.

هـ) f در بازه $[-2,0]$ ثابت باشد.

و) f در بازه $[4,10]$ نزولی باشد.

ز) برای هر $x\in(2,8)$, $f(x)<0$.

ح) برای هر $x\in[16,20]$ و $x\in[-2,0]$, $f(x)>0$.

۱۲ــ فرض کنید که $f(x)$ روی بازه $[-2,7]$ صعودی باشد.

الف) دامنه تابع $y=f(x+3)$ را بیابید و تعیین کنید روی کدام بازه صعودی است؟

ب) دامنه تابع $y=f(x-4)$ را بیابید و تعیین کنید روی کدام بازه صعودی است؟

ج) در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع $y=-f(x)$ چه می‌توان گفت؟

د) در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع $y=f(-x)$ چه می‌توان گفت؟

۱۳ــ هزینه اجاره‌ی در بست یک اتوبوس (برای هر نفر) به وسیله تابع $C(x)=\frac{100+5x}{x}$ داده می‌شود که در آن x تعداد افراد در یک گروه و $C(x)$ برحسب هزار تومان است و داریم :

$x\in\{1,2,3,\cdots 40\}$

$C^{-1}(x)$ را به دست آورید و توضیح دهید که چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۱۴ــ یک سیلندر به شکل استوانه در اختیار داریم که ارتفاع آن برابر قطر قاعده آن است. شعاع قاعده این

سیلندر را با x نشان می‌دهیم.

الف) حجم این سیلندر استوانه‌ای شکل را به عنوان تابعی از x به دست آورید. برای شعاع قاعده ۱۰ متر حجم استوانه چقدر است؟

ب) $V^{-1}(x)$ را به دست آورید و معنای آن را توصیف کنید.

ج) اگر حجمی برابر π ۱۰۲۴ مترمکعب نیاز داشته باشیم، با استفاده از هر یک از فرمول‌ها که ساده‌تر است شعاع را بیابید.

۱۵ــ اگر f و g دو تابع یک به یک باشند ثابت کنید :

$$(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$$

۱۶ــ درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

الف) یک تابع زوج می‌تواند وارون‌پذیر هم باشد.

ب) اگر f روی بازه $[0\,,5]$ صعودی باشد f^{-1} روی بازه $[f(0)\,,f(5)]$ صعودی است.

ج) اگر g روی بازه $[0\,,5]$ نزولی باشد، g^{-1} روی بازه $[g(0)\,,g(5)]$ نزولی است.

د) اگر $f\,,g$ وارون یکدیگر باشند ، دامنه آن‌ها با هم برابر است.

۱۷ــ اگر $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+d}$، $f^{-1}(x)$ بیابید. تحت کدام شرایط برای $a\,,b\,,d$ داریم $f=f^{-1}$

۱۸ــ وزن ایده آل w برای مردان (برحسب کیلوگرم) به عنوان تابعی از قد h (برحسب سانتی‌متر) به صورت تقریبی از رابطه $w(h)=0/9h-88$ به دست می‌آید.

الف) وزن ایده‌آل برای یک مرد ۱۷۰ سانتی‌متری چقدر است ؟

ب) h را به‌عنوان تابعی از w به‌دست آورید. این تابع چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ج) با نشان دادن $w(h(b))=b\,,\,h(w(a))=a$ ثابت کنید که $h(w)\,,w(h)$ وارون یکدیگرند.

د) قد ایده‌آل مردی که وزن او ۸۰ کیلوگرم است چند سانتی‌متر است.

(رابط وزن ایده آل برای زنان به صورت $w(h)=0/9h-82/5$ است.)

۱۹ــ دو تابع مانند $f\,,g$ مثال بزنید به طوری که دامنه تابع $f-g$ برابر مجموعه زیر باشد.

$$\{x\mid x\neq -3\,,\quad x\neq 2\}$$

۲۰ــ توابعی مانند $f\,,g$ بیابید که برای آن‌ها داشته باشیم

$$(fog)(x)=(gof)(x)=x$$

۲۱ــ در هر یک از حالت‌های زیر تابع خطی $f(x)=ax+b$ را به گونه‌ای به‌دست آورید که شرط خواسته شده برقرار گردد.

الف) $f(f(x))=4x+3$

ب) $f(1-x)=5x+1$

ج) $f(2x+3)=3x-2$

۲۲ــ تعداد باکتری‌ها در یک غذای منجمد با تابع $n(d) = ۲۰d^۲ - ۸۰d + ۵۰۰$ با شرط $۲ \leq d \leq ۱۴$ داده می‌شود که d دمای غذا است . وقتی که غذا از انجماد خارج می‌شود دما با تابع $۰ \leq t \leq ۳$ ، $d(t) = ۴t + ۲$ داده می‌شود که t زمان بر حسب ساعت است. مطلوبست :

الف) تابع مرکب $n(d(t))$

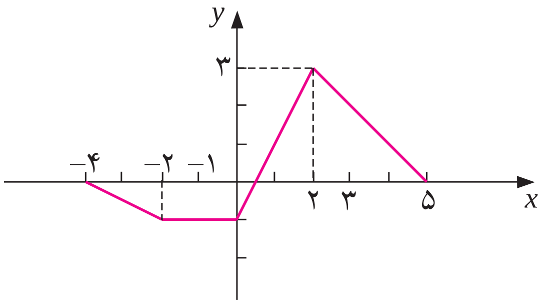
ب) تعداد باکتری‌ها در غذا وقتی که $t = ۲$.

ج) پس از چه زمانی تعداد باکتری‌ها به ۲۴۲۰ می‌رسد؟

۲۳ــ ثابت کنید که تابع $f(x) = \frac{|x|+۱}{|x|}$ تابعی زوج است و با استفاده‌از آن برد تابع را به‌دست آورید.

۲۴ــ ثابت کنید که تابع $f(x) = \frac{x}{|x|+۱}$ تابعی فرد است و با استفاده‌از آن برد تابع را به‌دست آورید.

۲۵ــ نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر داده شده‌است. دامنه توابع داده شده را معلوم کنید و نمودار آن‌ها را رسم کنید.



الف) $y = |f(x)|$

ب) $y = f(|x|)$

ج) $y = f(-x)$

د) $y = -f(x)$

۲۶ــ اگر f یک تابع زوج و غیر ثابت باشد، تعیین کنید که در هر یک از حالات زیر آیا g زوج یا فرد یا آن که نه زوج است و نه فرد.

الف) $g(x) = -f(x)$ ب) $g(x) = f(-۵x)$

ج) $g(x) = f(x) + ۳$ د) $g(x) = -f(x-۳)$

۲۷ــ تابع $f(x) = x^۳ - ۲x$ را روی دامنه $[۱, \infty)$ در نظر بگیرید.

الف) با رسم نمودار این تابع نشان دهید این تابع وارون پذیر است و برد آن را به‌دست آورید.

ب) با رسم نمودار تابع وارون، دامنه و برد تابع وارون را به دست آورید.

ج) تابع وارون f را با g نشان دهید و برای یک نقطه دلخواه‌از دامنه g مانند x قرار دهید $g(x) = y$. با توجه به آن که داریم $x = f(y)$، y را بر حسب x حساب کنید.

د) ضابطه تابع وارون f را بنویسید.

۲۸ــ ثابت کنید که تابع $f(x) = ۱ + \sqrt{۱ - x^۲}$ روی دامنه $[۰ , ۱]$ یک به یک است و وارون آن را به‌دست آورید.

۲۹ــ دو تابع f , g وارون یکدیگرند. آیا توابع fog , gof با هم مساویند؟

۳۰ــ برای هر عدد صحیح q، نشان دهید $[x + q] = [x] + q$.