



اعمال جبری روی توابع

فعالیت ۶

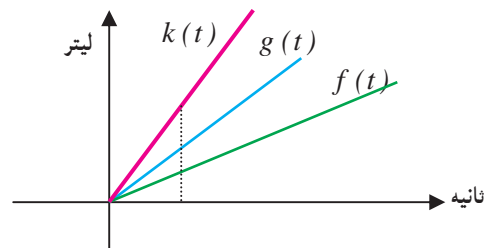


یک حوض آب با دو شیر آب متفاوت پر می‌شود. از شیر اول در هر ثانیه $\frac{1}{4}$ لیتر و از شیر دوم در هر ثانیه ۱ لیتر آب خارج می‌شود. در لحظه $t = 0$ حوض خالی است و دو شیر را با هم باز می‌کنیم.

۱- جدول زیر را که حجم آب موجود در حوض و آب‌های خارج شده از دو شیر را در برخی لحظات نشان می‌دهد تکمیل کنید. زمان بر حسب ثانیه و حجم بر حسب لیتر است.

t	$\frac{1}{2}$	۲	۳	$\frac{7}{2}$	۴	۵
حجم آب خارج شده از شیر اول						
حجم آب خارج شده از شیر دوم						
حجم آب موجود در حوض						

- ۲- توابعی را بنویسید که حجم آب خارج شده از شیر اول و شیر دوم و حجم آب حوض را در هر لحظه دلخواه t نشان دهد. این توابع را به ترتیب f و g و k بنامید.
- ۳- در هر لحظه t بین $f(t)$ و $g(t)$ و $k(t)$ چه رابطه‌ای وجود دارد؟
- ۴- نمودار سه تابع f و g و k در زیر رسم شده‌اند. رابطه بین این توابع را از روی نمودار توضیح دهید.





در سال‌های قبل با جمع اعداد و جمع ماتریس‌ها و جمع چند جمله‌ای‌ها آشنا شدید. توابع را نیز می‌توان با هم جمع کرد و تابع جدیدی به دست آورد. در فعالیت قبل با جمع دو تابع روبرو شدیم و جمع دو تابع را به دست آوردیم. اگر f و g دو تابع باشند که روی دامنه یکسانی مانند A تعریف شده‌اند، به ازای هر مقدار x و A مقدارهای $f(x)$ و $g(x)$ به دست می‌آیند و می‌توانیم مقدار $f(x) + g(x)$ را بسازیم. تابعی که به هر مقدار x در A مقدار $f(x) + g(x)$ را نظیر می‌سازد جمع f و g نامیده می‌شود. جمع f و g را با $f+g$ نشان می‌دهند.

برای دو تابع f و g که روی یک مجموعه A تعریف شده‌اند، $f+g$ تابعی است که روی A تعریف شده است و برای هر مقدار x در A داریم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$



مثال

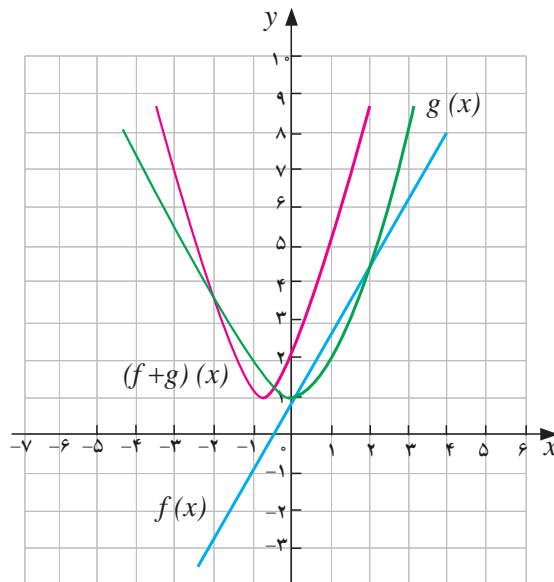
فرض کنید $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 + 1$. این دو تابع روی IR تعریف شده‌اند، بنابراین $f+g$ نیز روی IR تعریف شده است و برای مثال مقدار این تابع در $x = 3$ به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 7 + 10 = 17$$

اما برای یک مقدار دلخواه x مقدار تابع $f+g$ به شکل زیر خواهد بود.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 1 + x^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$$

روشن است که چند جمله‌ای بالا به ازای $x = 3$ برابر ۱۷ خواهد شد. نمودار این دو تابع و نمودار تابع مجموع آن‌ها در شکل رسم شده‌اند.



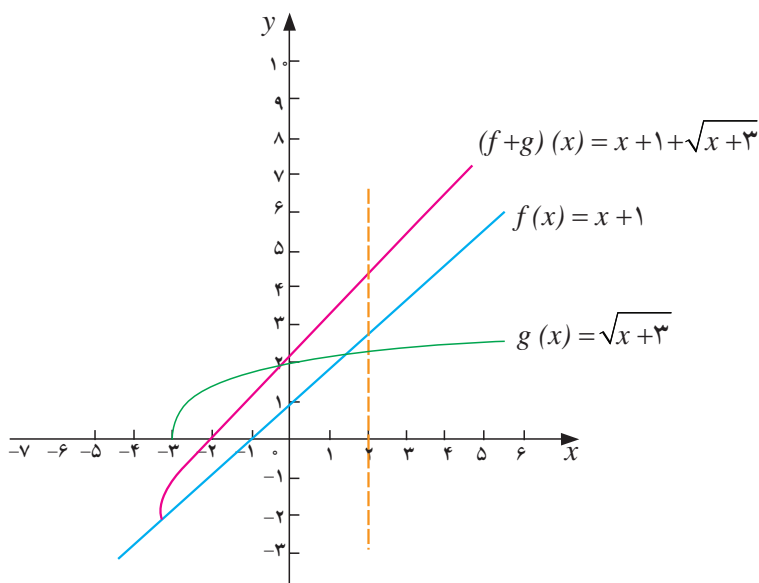


بحث در کلاس

چرا مجموع دو تابع خطی، یک تابع خطی است؟

آیا می‌توانیم دو تابع $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x+3}$ را با هم جمع کنیم؟ این دو تابع دامنه یکسانی ندارند ولی به ازای x هایی که در دامنه هر دو تابع باشند مقدارهای $f(x)$ و $g(x)$ قابل محاسبه‌اند و می‌توانیم مجموع $f(x) + g(x)$ را حساب کنیم. بنابراین می‌توانیم تابع $f+g$ را روی $D_f \cap D_g$ مانند قبل تعریف کنیم.

در این مثال دامنه $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = [-3, \infty)$ بنابراین $f+g$ روی $[-3, \infty)$ تعریف شده است و برای هر x در این مجموعه داریم $(f+g)(x) = x + 1 + \sqrt{x+3}$. نمودار این دو تابع و نمودار تابع مجموع آن‌ها در شکل زیر رسم شده‌اند.



برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، $f+g$ تابعی است که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

مثال

اگر $f = \{(1, 2), (-2, 5), (0, 7), (3, -4)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 9), (-2, 3)\}$ تابع $f+g$ فقط برای $x = -2$ و

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 4 = 6$$

$x = 1$ تعریف می‌شود و داریم:

$$(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = 5 + 3 = 8$$

بنابراین $f+g = \{(1, 6), (-2, 8)\}$.



اعمال تفاضل و ضرب و تقسیم توابع به شکل مشابه تعریف می‌شوند.

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، تفاضل g از f تابعی است که با $f-g$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، حاصل ضرب f و g تابعی است که با $f \cdot g$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، تقسیم f بر g تابعی است که با $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ برای x هایی تعریف شده است که $g(x) \neq 0$ ، و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$



مثال

۱: برای دو تابع $f(x) = x^2 + 2x - 1$ و $g(x) = 3x + 2$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به همراه دامنه آن‌ها مشخص می‌کنیم:

دامنه‌های f و g تمام IR هستند، بنابراین دامنه توابع $f+g$ و $f-g$ نیز برابر IR هستند.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x - 1 + 3x + 2 = x^2 + 5x + 1$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 2x - 1 - 3x - 2 = x^2 - x - 3$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 2x - 1)(3x + 2)$$

$$= 3x^3 + 2x^2 + 6x^2 + 4x - 3x - 2 = 3x^3 + 8x^2 + x - 2$$

تابع g فقط در $x = -\frac{2}{3}$ صفر است، بنابراین دامنه $\frac{f}{g}$ برابر $IR - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ است و

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 2x - 1}{3x + 2} \quad x \neq -\frac{2}{3}$$

۲: برای دو تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \frac{1}{x-3}$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به همراه دامنه آن‌ها مشخص می‌کنیم.

ابتدا دامنه‌های f و g را مشخص می‌کنیم.

$$D_f = \{x \mid x + 2 \geq 0\} = [-2, +\infty) \quad D_g = R - \{3\}$$



دامنه‌های توابع $f+g$ و $f-g$ و fg مجموعه $D_f \cap D_g$ است و داریم:

$$D_f \cap D_g = [-2, \infty) \cap \mathbb{R} - \{3\} = [-2, 3) \cup (3, \infty)$$

$$(f+g)(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x-3}$$

$$(f-g)(x) = \sqrt{x+2} - \frac{1}{x-3}$$

$$(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$$

از آن جا که g در هیچ نقطه‌ای از دامنه خود صفر نمی‌شود، دامنه $\frac{f}{g}$ همان $D_f \cap D_g$ است.

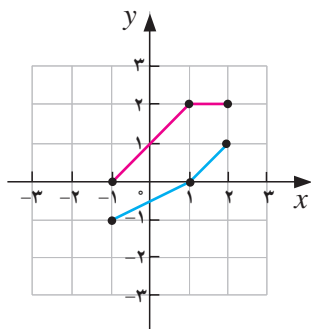
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\frac{1}{x-3}} = (x-3)\sqrt{x+2}$$

تمرین در کلاس



۱- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x+1$ ، دامنه‌های توابع $f+g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید و ضابطه این توابع را مشخص کنید.

۲- نمودار توابع f, g در شکل زیر رسم شده است.



الف) $(f+g)(1)$ ، $(f+g)(2)$ را حساب کنید.

ب) با استفاده از نمودارهای f, g ، نمودار $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

ج) معادله‌ای برای f, g و $f+g$ بیابید.

د) نمودار $f+g$ را به کمک معادله‌ی آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.



سنگی به داخل آب یک دریاچه آرام پرتاب می‌شود و باعث ایجاد موج‌هایی به شکل دایره‌های هم مرکز می‌شود. شعاع بزرگ‌ترین دایره تابعی از زمان است و فرض کنید این تابع به صورت $r(t) = ۲t$ باشد. t برحسب ثانیه است و زمان پس از برخورد سنگ با آب را نشان می‌دهد و r برحسب سانتی‌متر است. مساحت دایره تابعی از شعاع آن است و به صورت $A(r) = \pi r^2$ می‌باشد.



سی و سه پل - اصفهان

۱- جدول زیر را کامل کنید.

t (زمان)	۱	۲	۳	۴	۵	t
r (شعاع دایره در لحظه t)			۶			$r(t) = ۲t$
A (مساحت دایره در لحظه t)			۳۶π			$A(r(t)) = \pi(۲t)^2 = ۴\pi t^2$

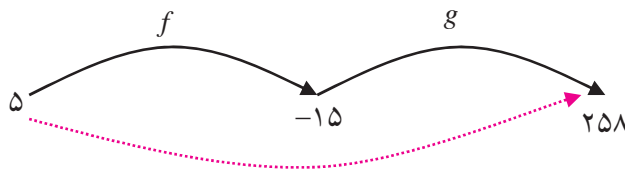
۲- تابعی که مساحت دایره را در هر لحظه t به دست می‌دهد، چگونه از طریق دو تابع $r(t)$ و $A(r)$ ساخته شده است؟

در فعالیت بالا با دو تابع $r(t)$ و $A(r)$ روبرو شدیم. مقدارهای تابع $r(t)$ به صورت ورودی تابع $A(r)$ قرار گرفتند و تابع جدید $A(r(t))$ را به وجود آوردند. این تابع جدید را ترکیب دو تابع می‌نامند.

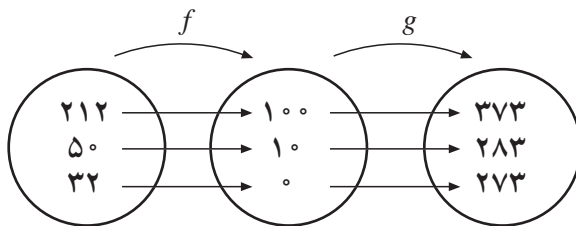


مثال

۱: تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه‌ی فارنهایت را به درجه‌ی سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. مثلاً $f(32) = 0$ یعنی ۳۲ درجه فارنهایت معادل صفر درجه سانتی‌گراد است. تابع $g(x) = x + 273$ درجه سانتی‌گراد را به درجه کلون تبدیل می‌کند. برای مثال $g(0) = 273$ یعنی صفر درجه سانتی‌گراد معادل ۲۷۳ درجه کلون است. اگر بخواهیم بدانیم ۵ درجه فارنهایت معادل چند درجه کلون است، ابتدا به کمک تابع f داریم $f(5) = -15$ یعنی ۵ درجه فارنهایت معادل -15 درجه سانتی‌گراد است و سپس به کمک تابع g داریم



$g(-15) = 258$ ، بنابراین ۵ درجه فارنهایت معادل ۲۵۸ درجه کلون است. به عبارت دیگر $g(f(5)) = (g(-15)) = 258$ نمودار روبه‌رو این فرآیند را نشان می‌دهد.



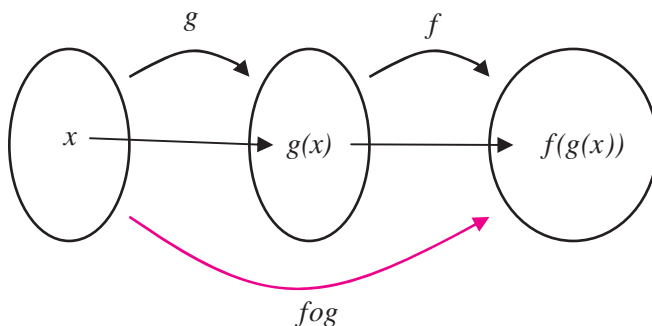
در نمودار روبه‌رو تبدیل برخی دیگر از درجات فارنهایت به درجات کلون نمایش داده شده است.

اگر $k(x)$ تابعی باشد که مستقیماً درجه‌های فارنهایت را به درجه‌های کلون تبدیل می‌کند داریم:

$$k(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{5}{9}(x - 32)\right) = \frac{5}{9}(x - 32) + 273 = \frac{1}{9}(5x + 2297)$$

برای مثال از طریق این تابع دیده می‌شود $k(212) = 373$ ، $k(32) = 273$.

در این مثال تابع k از ترکیب دو تابع f و g ساخته شده است. به خاطر شیوه محاسبه تابع k آن را با $g \circ f$ (بخوانید جی او اف) نشان می‌دهند. بنابراین $g \circ f$ تابعی است که در هر مقدار x به صورت $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ محاسبه می‌شود.



فرض کنید f و g دو تابع باشند که برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه f باشد، در این صورت $f \circ g$ تابعی است که دامنه آن همان دامنه g است و برای هر مقدار x در این دامنه داریم:

$$(g \circ f)(x) = f(g(x))$$



مثال

۲: برای دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 1 + x^2$ ، برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه f است و می‌توانیم تابع مرکب $f \circ g$ را بسازیم. دامنه $f \circ g$ برابر دامنه g است که تمام IR است و ضابطه آن به شکل زیر است.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 + x^2) = \sqrt{1 + x^2}$$

تابع مرکب $g \circ f$ نیز قابل ساخت است زیرا برد f زیر مجموعه‌ای از دامنه g می‌باشد. دامنه $g \circ f$ همان دامنه f است که بازه $[0, \infty)$ است. ضابطه $g \circ f$ به شکل زیر است.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 1 + (\sqrt{x})^2 = 1 + x$$

توجه داشته باشید که اگر چه ضابطه $g \circ f$ به گونه‌ای است که برای مقادیر منفی x هم معنا دارد ولی به عنوان تابعی که از ترکیب دو تابع ساخته شده است دامنه آن فقط بازه $[0, \infty)$ است. این مثال هم چنین نشان می‌دهد که دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ در حالت کلی مساوی نیستند.

برای دو تابع f و g ممکن است که برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه f نباشد، در این صورت $f \circ g$ تابعی است که دامنه آن تمام دامنه g نخواهد بود. برای آن که $f(g(x))$ معنادار باشد لازم است که $x \in D_g$ و $g(x) \in D_f$ ، بنابراین در حالت کلی دامنه $f \circ g$ به شکل زیر است.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

مثال

۳: برای دو تابع $f = \{(11, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ و $g = \{(2, 11), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را می‌سازیم و با نمودار ون نمایش می‌دهیم.

برای محاسبه $f \circ g$ ابتدا مشاهده می‌کنیم برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه f است، پس $D_{f \circ g} = D_g$. مقدار تابع $f \circ g$ را در نقاط دامنه g حساب می‌کنیم.

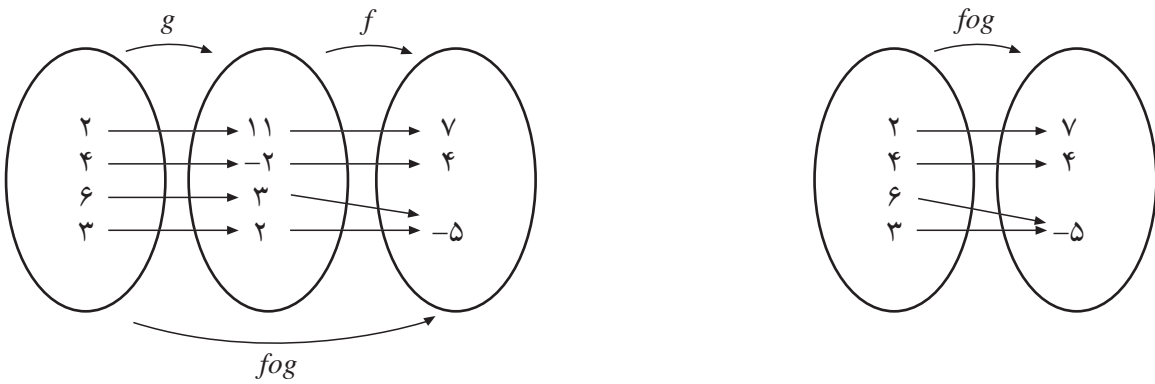
$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(11) = 7$$

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(-2) = 4$$

$$(f \circ g)(6) = f(g(6)) = f(3) = -5$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(2) = -5$$

بنابراین $f \circ g = \{(2, 7), (4, 4), (6, -5), (3, -5)\}$.



برای محاسبه gof ابتدا مشاهده می‌کنیم که برد f زیر مجموعه‌ای از دامنه g نیست، بنابراین دامنه gof تمام دامنه f نخواهد بود. یکی یکی اعضای دامنه f را بررسی می‌کنیم تا معلوم شود که آیا شرط قرار گرفتن در دامنه gof را دارند یا نه.

$$f(11) = 7 \notin D_g$$

$$f(-2) = 4 \in D_g$$

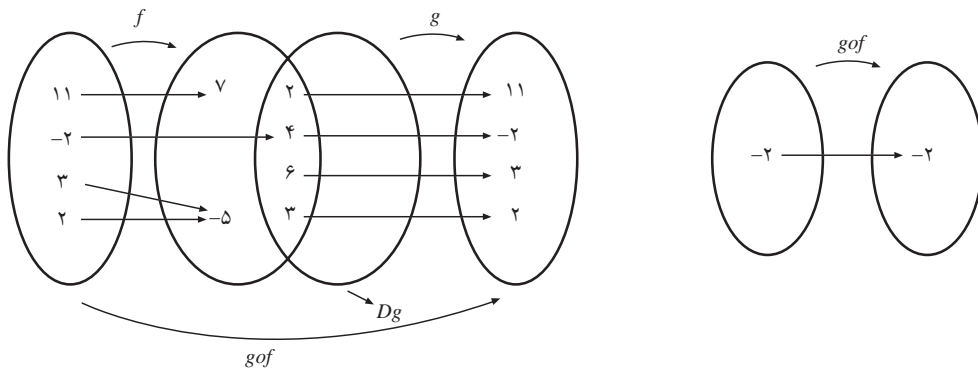
$$f(3) = -5 \notin D_g$$

$$f(2) = -5 \notin D_g$$

بنابراین فقط -2 در دامنه gof قرار دارد و از آن‌جا که

$$(gof)(-2) = g(f(-2)) = g(4) = -2$$

$$gof = \{(-2, -2)\}$$



۴: برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ تابع gof و دامنه آن را محاسبه می‌کنیم.

برای محاسبه دامنه gof ابتدا دامنه g را بررسی می‌کنیم که $IR - \{0\}$ دامنه f نیز $IR - \{3\}$ است. مقدار $g(x)$ نباید ۳ شود. معادل $g(x) = 3$ دارای جواب $x = \frac{4}{3}$ است، یعنی $\frac{4}{3}$ نقطه‌ای است که $g(\frac{4}{3})$ در دامنه f قرار ندارد. در نتیجه

$$D_{fog} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in IR \mid x \neq 0, x \neq \frac{4}{3} \right\}$$



$$= \mathbb{R} - \left\{ 0, \frac{4}{3} \right\}$$

$$(fog)(x) = f\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{1}{\frac{4}{x} - 3} = \frac{1}{\frac{4-3x}{x}} = \frac{x}{4-3x}$$

ضابطه fog را حساب می‌کنیم.

عبارت بالا اگر چه به ازای $x=0$ با معنا است، ولی صفر در دامنه تابع ترکیب یافته نیست زیرا به هنگام محاسبه مشاهده می‌کنید که عبارت $\frac{4}{x}$ در محاسبه وجود دارد که به ازای $x=0$ تعریف نشده است.

تمرین در کلاس



- ۱- اگر $f(x) = x^2 + 5$ و $g(x) = x + 5$ ، fog و gof را حساب کنید و نشان دهید که $fog \neq gof$.
- ۲- اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{7-x^2}$ ، fog و دامنه‌ی آن را حساب کنید.

مسائل



- ۱- اگر $f(x) = \frac{5x}{3x-7}$ و $g(x) = \frac{x^5-1}{5x-15}$ ، تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ و دامنه آن را بیابید.
- ۲- در هر یک از موارد زیر دامنه توابع زیر و ضابطه آن‌ها را به دست آورید.

$$f-g, fg, ff, \frac{f}{g}, \frac{g}{f}$$

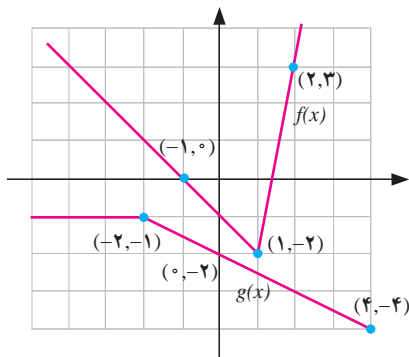
الف) $f(x) = 4x$ ، $g(x) = 2-x$

ب) $f(x) = \frac{4}{x-2}$ ، $g(x) = \frac{1}{6-x}$

ج) $f(x) = \sqrt{x-2}$ ، $g(x) = \sqrt{x+2}$

د) $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، $g(x) = \frac{2}{x}$

۳- با استفاده از نمودارهای f, g که در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند، عبارات داده شده را (در صورت امکان) محاسبه کنید.

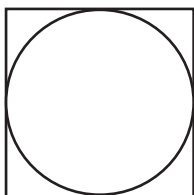




- الف) $(f + g)(-4)$ و) $(fog)(-\frac{1}{p})$
 ب) $(f - g)(3)$ ز) $(gof)(-5)$
 ج) $(\frac{f}{g})(0)$ ح) $(fof)(7)$
 د) $(f + g)(2)$ ط) $(fog)(4)$
 هـ) $(fg)(\frac{1}{3})$ ی) $(\frac{f}{g})(\frac{2}{3})$

۴- فرض کنیم $f: IN \rightarrow IN$ تابعی با ضابطه $g(n) = 2n$ باشد، اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و تابع $f: A \rightarrow N$ به صورت $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ تعریف شود، توابع $2f + g$ ، gof را محاسبه کنید.

۵- دو تابع $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ مفروضند. دامنه تابع fog را بدون محاسبه $(fog)(x)$ بدست آورید.



۶- یک بی (فونداسیون) بتنی مربع شکل به عنوان پایه‌ای برای یک مخزن گازوئیل استوانه‌ای استفاده می‌شود. (شکل مقابل)

الف) شعاع مخزن، r را به عنوان تابعی از x (ضلع مربع) بنویسید.

ب) مساحت A پایه دایره‌ای شکل را به عنوان تابعی از r بنویسید.

ج) $(Aor)(x)$ را بیابید و تعبیر کنید.

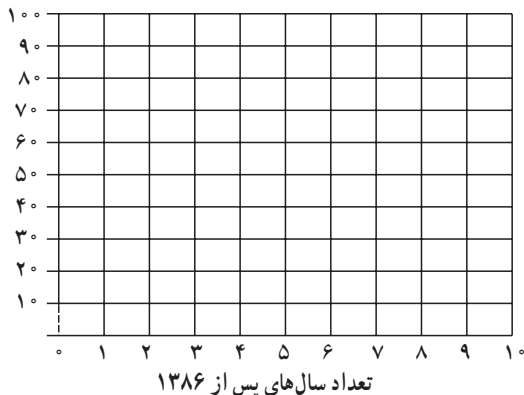
۷- فرض کنیم: $f = \left\{ (-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{4}, 0), (3, -5) \right\}$ و

$g = \left\{ (-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6) \right\}$ توابع زیر را حساب کنید.

$$f+g, f-g, fg, \frac{f}{g}$$

۸- یک رمان پر فروش درباره دفاع مقدس در سال ۱۳۸۶، ۲۷ میلیون تومان فروش کرد. رمان دیگری درباره

دفاع مقدس در همین سال ۱۲ میلیون تومان فروش کرد.



دسته یک: یک رمان پر فروش درباره‌ی دفاع مقدس



اگر رمان اول در هر سال به میزان ۳ میلیون تومان نسبت به سال قبل افزایش فروش داشته باشد، تابعی بنویسید که میزان فروش در هر سال پس از سال ۱۳۸۶ را برحسب زمان نشان دهد. اگر افزایش فروش برای رمان دوم در هر سال ۲ میلیون تومان نسبت به سال قبل باشد، تابعی بنویسید که مجموع فروش این دو رمان را در هر سال از سال ۱۳۸۶ نشان دهد. این دو رمان در سال ۱۳۹۶ در مجموع چه میزان فروش خواهند کرد؟ هر سه تابع مرتبط را در نموداری رسم کنید.

۹- اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابید که

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$$

۱۰- توابع f, g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ مفروضند. بدون تشکیل ضابطه، دامنه تعریف $(f+g) \circ f$ را به دست آورید.

$$11- \text{ اگر } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} & 1 \leq x \end{cases} \text{ مقدار } f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right) \text{ را به دست آورید.}$$

۱۲- کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آن گاه

$$(f \circ g)(x) = -x^2, \quad (f \circ g)(5) = -25$$

ب) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آن گاه $(f \circ g)(4) = 35$

ج) اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$

د) برای هر دو تابع f, g داریم: $f \circ g = g \circ f$

۱۳- اگر $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$ ، $g(x) = 2x + 1$ ، تابعی مانند f بیابید به قسمتی که $f \circ g = h$.

۱۴- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ و دامنه آن‌ها را به دست آورید.

۱۵- جدول زیر را در نظر بگیرید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	۳	۱	۴	۲	۲	۵
$g(x)$	۶	۳	۲	۱	۲	۳

مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $f(g(1))$ ب) $g(f(1))$ ج) $f(f(1))$

د) $g(g(1))$ هـ) $(g \circ f)(3)$ و) $(f \circ g)(6)$

۱۶- اگر $f = \{(4,5), (6,5), (8,12), (10,2)\}$ و $g = \{(4,6), (2,4), (6,8), (8,10)\}$ توابع $f \circ g, g \circ f$

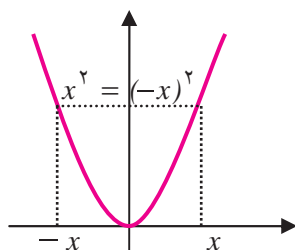
را حساب کنید.



توابع زوج و توابع فرد و توابع صعودی و توابع نزولی



باغ دولت آباد - یزد



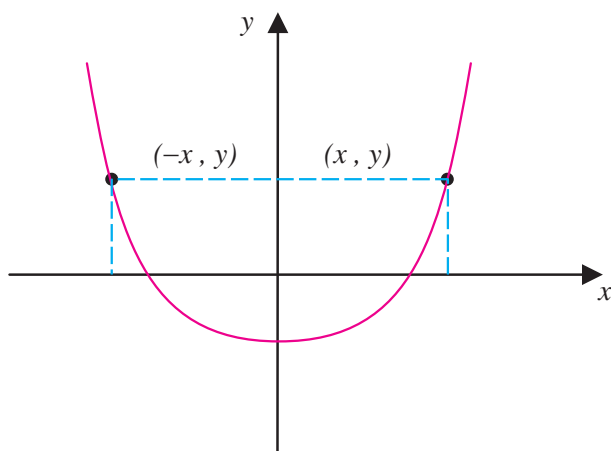
وجود تقارن در خلقت و آفرینش مناظر چشم‌نوازی را پدید آورده است. انسان در ساخته‌های خود از این نکته فراوان بهره برده است. نمودار برخی از توابع متقارن است و همین موضوع کار با آن‌ها را ساده‌تر می‌کند. تابع آشنای $f(x) = x^2$ نمونه‌ای از این گونه توابع است. این تابع نسبت به محور y متقارن است. علت این تقارن در آن است که برای هر x در دامنه آن، $-x$ نیز در دامنه آن است و علاوه بر آن $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$

تمام توابعی که این دو خاصیت را دارا هستند، به عنوان توابع زوج می‌شناسیم. به بیان دقیق‌تر:

تابع f را زوج نامیم هرگاه:

الف) دامنه آن متقارن باشد، یعنی برای هر $x \in D_f$ ، $-x \in D_f$

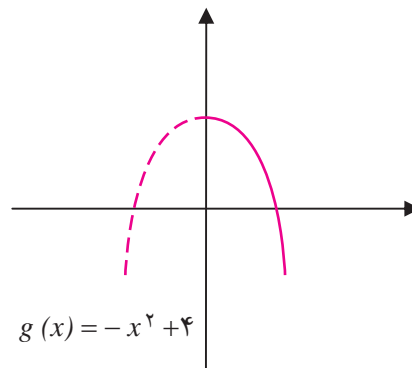
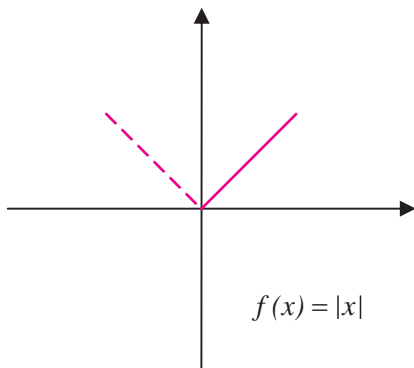
ب) برای هر x در دامنه آن، $f(-x) = f(x)$



در رسم نمودار توابع زوج از این نکته که نمودار آن‌ها نسبت به محور y متقارن است استفاده می‌شود.



۱: توابع $f(x) = |x|$ ، $g(x) = -x^2 + 4$ زوج هستند:



شرط متقارن بودن دامنه برای هر دو تابع برقرار است، هم چنین داریم:

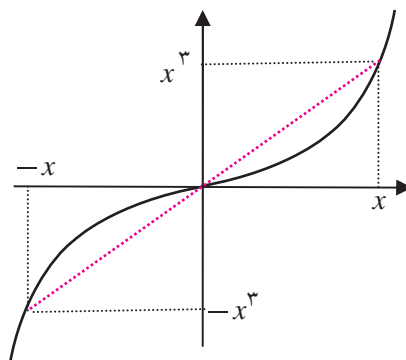
$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

$$g(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = g(x)$$

تقارن نسبت به محور y ها نیز در نمودارهای این دو تابع دیده می شود.

تقارن نمودار توابع نسبت به مبدأ مختصات نیز در بسیاری از توابع دیده می شود. برای مثال نمودار تابع

$f(x) = x^3$ نسبت به مبدأ متقارن است.



علت این تقارن در آن است که برای هر x در دامنه f ، $-x$ نیز در دامنه f است و

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

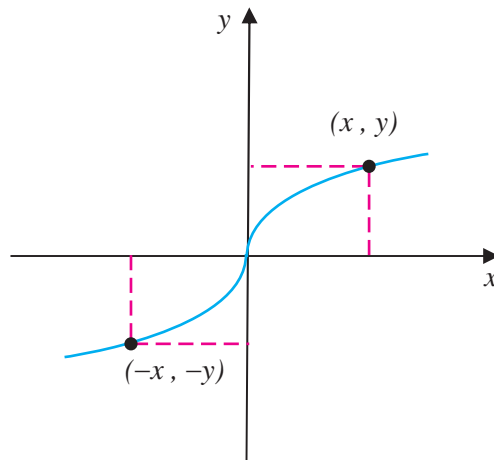
این خاصیت باعث می شود هر نقطه روی نمودار این تابع که به صورت (x, x^3) است قرینه آن نسبت به مبدأ

یعنی $(-x, -x^3)$ نیز روی نمودار این تابع باشد. توابعی که چنین خاصیتی دارند، تابع فرد نامیده می شوند.

تابع f را فرد نامیم هرگاه دامنه آن متقارن باشد و برای هر x در دامنه آن، $f(-x) = -f(x)$.



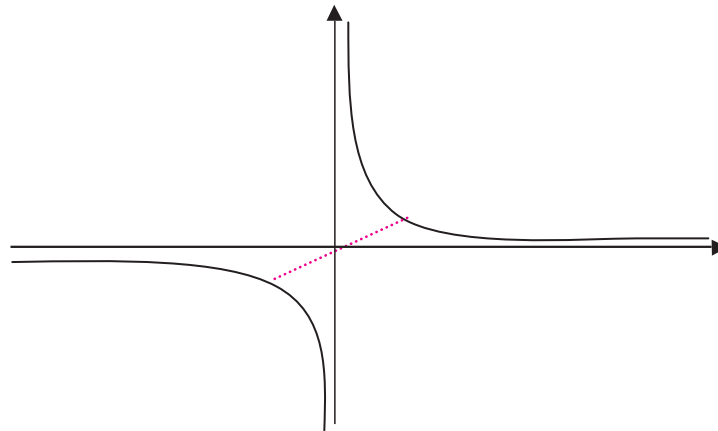
در رسم نمودار توابع فرد از این نکته که نمودار آن‌ها نسبت به مبدأ مختصات متقارن است استفاده می‌شود.



مثال

۲: $f(x) = \frac{1}{x}$ تابعی فرد است. زیرا دامنه آن متقارن است و داریم:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$





تمرین در کلاس



۱- توابع زیر را در نظر بگیرید.

الف) $y = \frac{1}{x-x^2}$ ب) $y = 1-x^2$ ج) $y = \sqrt{x}$

د) $y = \sqrt[3]{x}$ هـ) $y = x - |x|$ و) $y = x\sqrt{|x|}$

(۱) دامنه کدام یک از توابع داده شده متقارن است؟

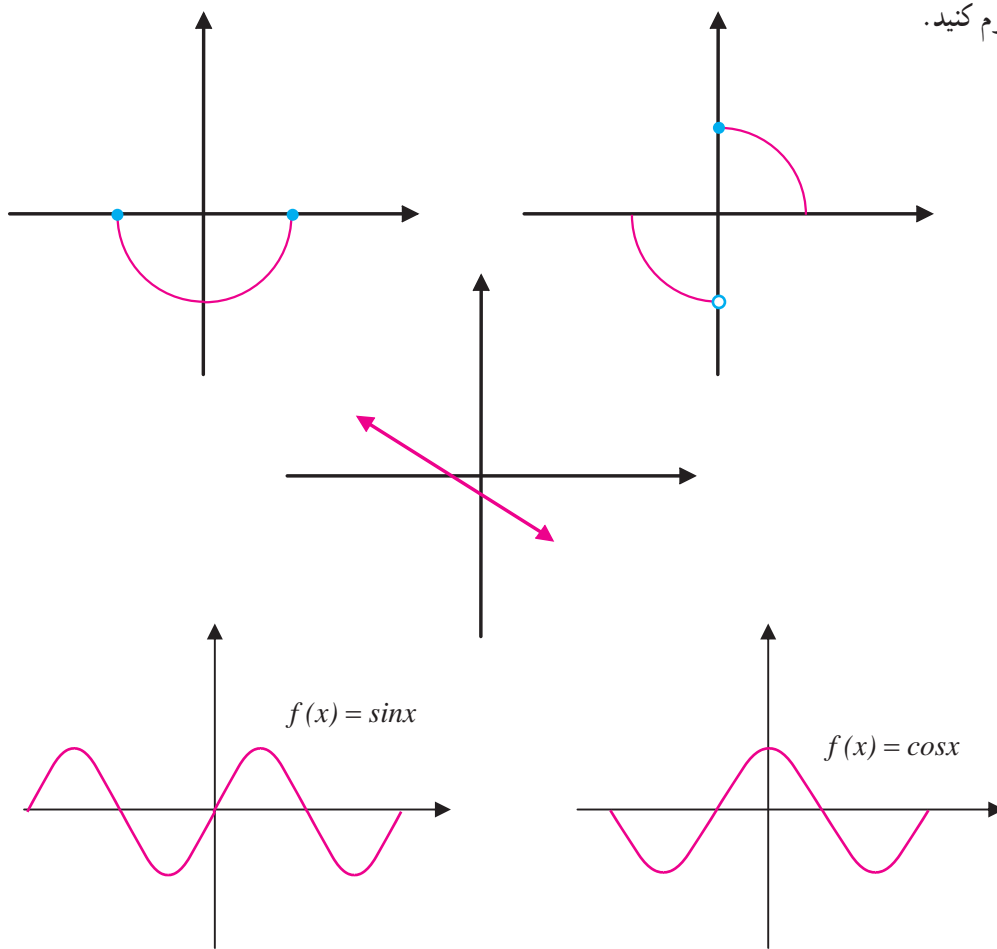
(۲) کدام یک از این توابع زوج هستند؟

(۳) کدام یک از این توابع فرد هستند؟

(۴) کدام یک از این توابع نه زوج هستند و نه فرد؟

۲- تنها با استفاده از نمودارهای توابع داده شده زوج یا فرد بودن آن‌ها یا نه زوج بودن و نه فرد بودن آن‌ها را

معلوم کنید.



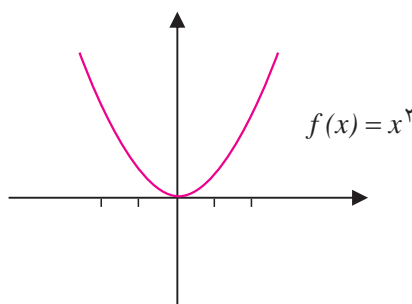


بحث در کلاس

آیا نمودار یک تابع می‌تواند نسبت به محور x متقارن باشد؟

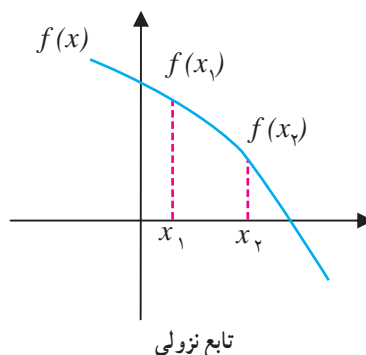
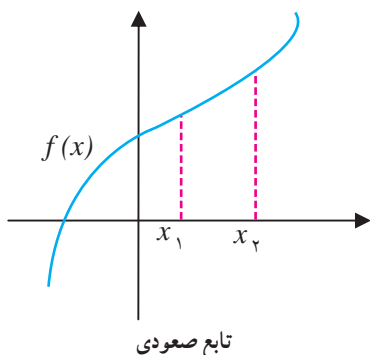
یکی از سؤالاتی که در مورد توابع مطرح است این است که با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع چه تغییری می‌کند؟ گاهی اوقات با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع افزایش می‌یابد. همچنین برخی مواقع با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع کاهش می‌یابد. این ویژگی‌ها را صعودی بودن یا نزولی بودن تابع می‌نامند.

برای مثال تابع $f(x) = x^2$ را در بازه $[-2, 2]$ در نظر بگیرید.



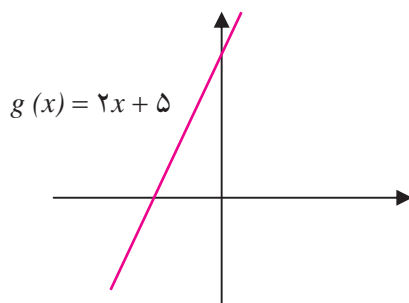
در بازه $[2, 0]$ همان گونه که از سمت چپ به سمت راست حرکت می‌کنیم، مقادیر متناظر تابع کمتر می‌شوند، یعنی با افزایش مقادیر x ، مقادیر y کمتر می‌شوند. در این حالت گوئیم تابع در بازه $[2, 0]$ نزولی است. اما در بازه $[0, 2]$ با افزایش مقادیر x ، مقادیر y نیز افزایش می‌یابند. در این بازه تابع $f(x) = x^2$ را صعودی نامیم.

- تابع $f(x)$ را صعودی نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم: $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- تابع $f(x)$ را نزولی نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم: $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- تابع $f(x)$ را صعودی اکید نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم: $f(x_1) < f(x_2)$.
- تابع $f(x)$ را نزولی اکید نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم: $f(x_1) > f(x_2)$.

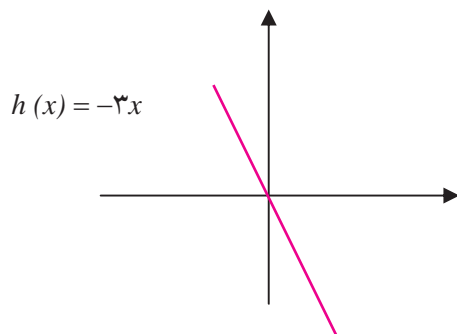




۱: تابع $g(x) = 2x + 5$ صعودی اکید است. همان‌گونه که از نمودار $g(x)$ پیداست این تابع یک به یک است. این موضوع برای تمام توابع صعودی اکید برقرار است.

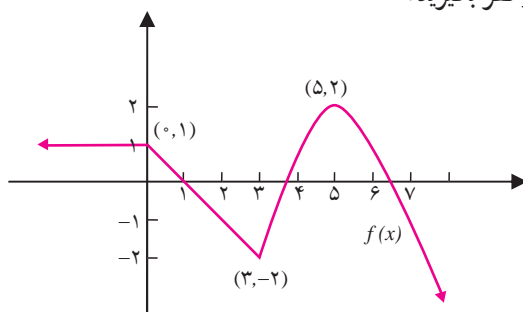


۲: تابع $h(x) = -3x$ نزولی اکید است. این تابع (با توجه به نمودار آن) یک به یک است. این ویژگی برای هر تابع نزولی اکید برقرار است.



تابع $f(x)$ را ثابت می‌نامیم هرگاه برای هر دو عضو x_1, x_2 از دامنه f ، داشته باشیم: $f(x_1) = f(x_2)$.

ممکن است یک تابع در دامنه‌اش نه صعودی باشد نه نزولی، ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد. برای مثال تابع $f(x)$ را با نمودار زیر در نظر بگیرید.





همان گونه که در شکل دیده می‌شود، تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty, 0]$ ثابت و در بازه $[0, 3]$ نزولی (اکید) و در بازه $[3, 5]$ صعودی (اکید) و در بازه $(5, \infty)$ نزولی اکید است.

تمرین در کلاس



توابع زیر را رسم کنید و با استفاده از نمودار آن‌ها تعیین کنید که در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی و در چه بازه‌هایی ثابت هستند.

الف) $f(x) = |x+2| - 3$

ب) $g(x) = x^2 - 6x + 10$

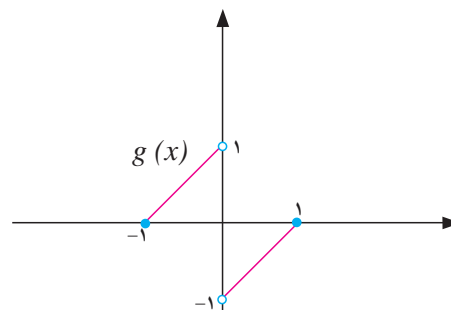
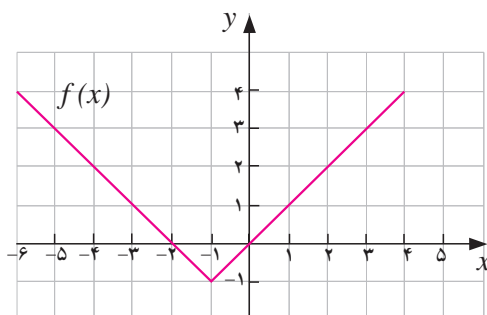
ج) $h(x) = \sqrt{1-x}$

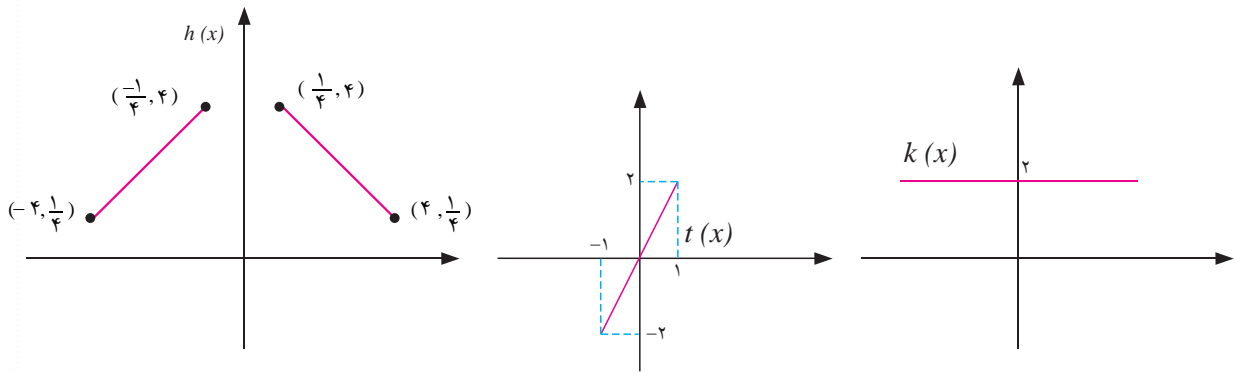
د) $t(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$

مسائل

۱- نمودار توابع f, g, h, k و t در زیر داده شده‌اند.

به دورش نموداری و جبری (ضابطه توابع) تعیین کنید که کدام یک از آن‌ها زوج، کدام یک فرد و کدام یک نه زوج و نه فرد هستند.





۲- زوج یا فرد بودن توابع زیر را معلوم کنید :

الف) $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$

د) $f(x) = |x|$

ب) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^3-1}$

هـ) $f(x) = 2x + \sin(x)$

ج) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

و) $f(x) = x^2 + 2x^4$

۳- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را بررسی کنید.

الف) مجموع دو تابع زوج، تابعی زوج است.

ب) حاصل ضرب دو تابع زوج، تابعی زوج است.

ج) حاصل ضرب دو تابع فرد، تابعی فرد است.

د) حاصل ضرب یک تابع فرد و یک تابع زوج، تابعی زوج است.

۴- فرض کنید f تابعی با دامنه متقارن باشد، ثابت کنید :

الف) $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ تابعی زوج است.

ب) $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ تابعی فرد است.

ج) f را می توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

د) تابع $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 2\sqrt{1+x^2} - 5$ را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید.

۵- آیا تابعی یافت می شود که هم زوج باشد و هم فرد؟ چند تابع با این ویژگی داریم؟

۶- در هر یک از حالت های زیر نقطه ای از نمودار یک تابع داده شده است. نقطه دیگری از نمودار تابع را

بیابید در صورتی که : (۱) تابع زوج باشد. (۲) تابع فرد باشد.

الف) $(-7, 2)$

ب) (a, b)

ج) $(\frac{-2}{\sqrt{7}}, -7)$

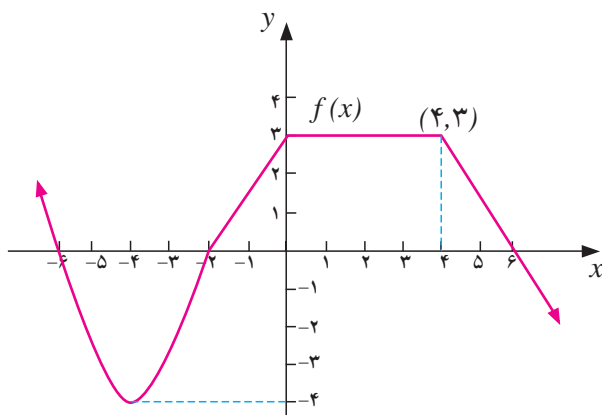
د) $(5, 3)$



۷- تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 18 & x < -5 \\ 1 & -5 \leq x < 1 \\ x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

۸- با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ که در شکل زیر رسم شده است، بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها صعودی، نزولی یا ثابت است را معلوم کنید. نمودار برای مقادیر کمتر یا مساوی ۲- بخشی از یک سهمی است. معادله‌ای برای این تابع بنویسید.

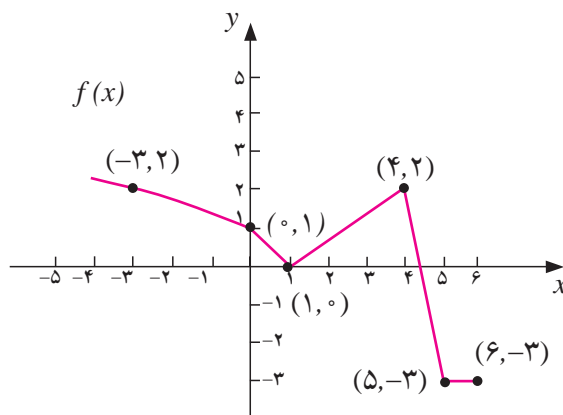


۹- تعیین کنید توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی هستند.

الف) $f(x) = \sqrt{x-2}$ ب) $f(x) = \frac{1}{x}$ ج) $f(x) = -|x-2| + 5$

۱۰- تابع $f(x) = -2x^2 + 16x - 35$ را رسم کنید و بازه‌هایی که تابع روی آن‌ها صعودی یا نزولی است، مشخص کنید.

۱۱- نمودار تابع $f(x)$ در زیر آمده است.





با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.
الف) دامنه و برد f را پیدا کنید.

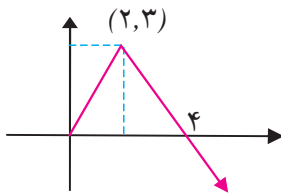
ب) بازه‌هایی که در آن‌ها $f(x) < 0$ یا $f(x) > 0$ را بیابید.

ج) بازه‌هایی که f در آن‌ها صعودی یا نزولی است را بیابید.

د) معادله‌ای برای f بیابید (تابع برای مقادیر کمتر از ۱ یک تابع رادیکالی به شکل $\sqrt{ax+b}$ است).

ه) $f\left(\frac{7}{4}\right)$ ، $f(5,3)$ و $f(-4)$ را بیابید.

۱۲- نمودار تابع h در شکل روبه‌رو داده شده است.



الف) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع زوج را نمایش دهد.

ب) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع فرد را نمایش دهد.

۱۳- مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 4a^2})$ یک تابع فرد باشد.

۱۴- زوج یا فرد بودن توابع f و g را که در زیر آمده است تعیین کنید.

$$f = \{(-2, 5), (-1, 4), (0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$$

$$g = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 0), (1, -2), (2, -1)\}$$

توابع یک به یک و تابع وارون



فعالیت ۸



۱- محیط هر مربع تابعی از اندازه یک ضلع آن است. محیط را با P و طول ضلع را با l نشان دهید و P را به صورت تابعی از l بنویسید. آیا این تابع یک به یک است؟

۲- اندازه ضلع هر مربع تابعی از محیط آن است. با نمادهای بالا l را به صورت تابعی از P بنویسید.

۳- این دو تابع را بر حسب یک متغیر x به صورت $y = f(x)$ و $y = g(x)$ بنویسید.

۴- با توجه به دامنه و برد این دو تابع، نمودار آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و نشان دهید که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.

(توجه داشته باشید که قرینه نقطه $A(a,b)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم نقطه $B(b,a)$ است.)

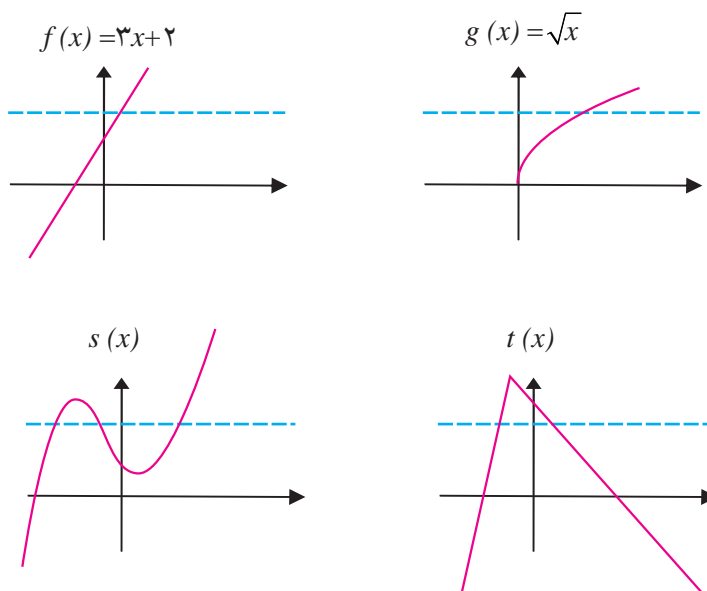


توابع یک به یک

همان‌طور که در درس ریاضی ۲ دیده‌اید وارون هر تابع، لزوماً یک تابع نمی‌باشد. به عبارت دیگر تنها توابعی وارون پذیر هستند که یک به یک باشند. این از جمله دلایلی است که باعث می‌شود توابع یک به یک را با دقت بیشتری مطالعه کنیم. از قبل می‌دانید که تابع f یک به یک است هر گاه دو عضو متمایز x_1, x_2 در دامنه به دو عضو متمایز $f(x_1), f(x_2)$ در برد نظیر شوند به بیان ریاضی می‌توان نوشت:

$$\text{تابع } f \text{ یک به یک است هر گاه } x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

اگر نمودار تابع f داده شده باشد، در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در شکل‌های داده شده توابع f و g یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می‌باشند. توابع s و t یک به یک نیستند و در نتیجه وارون پذیر هم نیستند.



یک به یک بودن تابع به این معنی است که هیچ دو نقطه متمایزی مانند x_1, x_2 یافت نمی‌شود که برای آن‌ها: $f(x_1) = f(x_2)$. به بیان دیگر اگر برای هر دو نقطه دلخواه x_1, x_2 و $f(x_1) = f(x_2)$ آن گاه $x_1 = x_2$. تابع یک به یک را به روش زیر نیز می‌توان مشخص کرد.

تابع f یک به یک است، اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از دامنه f داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



مثال

۱: نشان می‌دهیم تابع $f(x) = 3x + 2$ یک به یک است.
 به کمک نمودار تابع دیده می‌شود که هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. از طریق جبری نیز با فرض $f(x_1) = f(x_2)$ ثابت می‌کنیم $x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \\ &\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

روش جبری در جاهایی که نمودار تابع شناخته شده نیست یا رسم آن دشوار است مناسب است.

۲: ثابت می‌کنیم تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ یک به یک است.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \\ &\Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 1 \\ &\Rightarrow -2x_1 - x_1 = -2x_2 - x_2 \\ &\Rightarrow -3x_1 = -3x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

بنابراین f یک به یک است و در نتیجه وارون پذیر است.

۳: تابع $g(x) = \sqrt{x}$ یک به یک است. این موضوع به دو روش قابل اثبات است.
 الف) استفاده از آزمون خط افقی، یعنی هر خط به موازات محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

در حقیقت $g(x) = \sqrt{x}$ یک تابع اکیداً صعودی است، در نتیجه اگر $x \neq x$ اطمینان داریم که $f(x) \neq f(x)$. این خاصیت برای تمام توابع اکیداً صعودی برقرار است یعنی. توابع اکیداً صعودی یک به یک و در نتیجه وارون پذیر هستند. توابع نزولی اکید نیز یک به یک و در نتیجه وارون پذیر هستند.

ب) روش محاسبه جبری:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

تمرین در کلاس



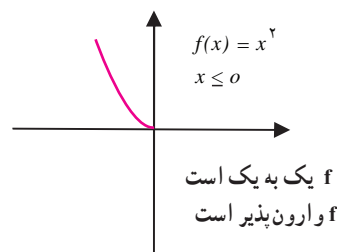
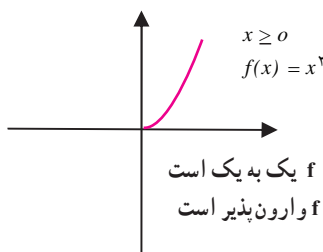
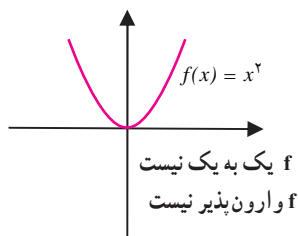
کدام یک از توابع زیر یک به یک است. در مورد الف) و ب) موضوع را با رسم نمودار توابع نیز بررسی کنید.

الف) $f(x) = 1 - x^2$ ب) $g(x) = \sqrt{2x - 3}$ ج) $h(x) = \frac{x+6}{3x-4}$



اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست، اما با کوچکتر کردن دامنه یک تابع ممکن است بتوانیم تابعی یک به یک بسازیم.

مثلاً تابع $f(x) = x$ یک به یک نیست اما می‌توانیم دامنه تابع را به بازه $(-\infty, 0]$ محدود کنیم و در این صورت تابعی یک به یک به دست آوریم. همچنین می‌توانیم دامنه آن را به بازه $[0, \infty)$ محدود کنیم و تابعی یک به یک به دست آوریم.



تمرین در کلاس



۱. کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند.

$$f(x) = x^2 - 2x \quad x \geq 0 \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2} \quad x \geq 0 \quad (\text{ب})$$

۲. با محدود کردن دامنه هر یک از توابع زیر روی یک بازه، تابعی یک به یک بسازید.

$$y = |x - 2| \quad (\text{الف}) \quad y = (x + 3)^2 \quad (\text{ب}) \quad y = \sin x \quad (\text{ج})$$

$$y = \cos x \quad (\text{د}) \quad y = |x| + 3 \quad (\text{ه})$$

اگر f تابعی وارون پذیر باشد و وارون آن تابع g باشد، g تابعی است که برعکس f عمل می‌کند، یعنی اگر $f(a) = b$ آنگاه $g(b) = a$. این ویژگی باعث می‌شود نمودار g قرینه نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم شود. به خاطر این ویژگی با در دست داشتن نمودار یک تابع وارون پذیر می‌توانیم نمودار تابع وارون آن را رسم کنیم.

بحث در کلاس

اگر f تابعی وارون پذیر و وارون آن تابع g باشد، آیا g نیز وارون پذیر خواهد بود؟ وارون g چه تابعی خواهد بود؟



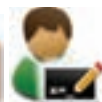
محاسبه تابع وارون

در ریاضی ۲ یاد گرفته‌اید که اگر تابعی یک به یک مانند f به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داده شده باشد، برای بدست آوردن f^{-1} ، جای مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب را عوض می‌کنیم به عبارت دیگر برای هر تابع یک به یک f تابع f^{-1} به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in f\}$$

با توجه به تعریف f^{-1} ، هنگامی که نمودار یک تابع یک به یک f داده شده باشد برای به دست آوردن نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه نمودار f را نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم.

تمرین در کلاس



ابتدا تعیین کنید که کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند، سپس وارون هر کدام که یک به یک هستند را مانند نمونه در همان دستگاه مختصات رسم کنید. از خط $y = x$ برای سهولت استفاده کنید.

