فصل ۳

توابع خاص نامعادله و تعیین علامت

توابع خاص و حل نامعادله

روابط زیادی بین پدیده‌ها یافت می‌شود که خطی نیست. به‌طور مثال رابطه‌ی بین طول ضلع یک مربع و مساحت آن و یا رابطه‌ی بین شعاع یک دایره و مساحت آن غیر خطی است. اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از x است و به صورت $f(x)=x^{۲}$ یا $y=x^{۲}$ قابل نمایش است. این تابع چون به کمک یک چند جمله‌ای درجه دوم از x بیان شده است، یک تابع درجه دوم از x نامیده می‌شود. به جای x که معمولاً آن را متغیر مستقل[۱] می‌نامند می‌توان از حروف دیگری نیز استفاده کرد. مثلاً c ، b ، a و... بنابراین $f(x)=x^{۲}$ یا $f(a)=a^{۲}$ یا $f(b)=b^{۲}$ در حقیقت یک تابع را نمایش می‌دهند، هرگاه مقادیری که برای x یا a یا b در نظر می‌گیریم یکسان باشند. بنابراین اگر شعاع یک دایره را با r نمایش می‌دهیم تابعی که مساحت دایره را بر حسب شعاع آن معلوم می‌کند به صورت $f(r)=\pi r^{۲}$ است که باز هم یک تابع درجه دوم است. به نظر شما دامنه‌ی این تابع چیست؟

به عنوان مثالی دیگر کُره‌ای به شعاع r را در نظر بگیرید. حجم کُره، تابعی از شعاع آن است. این تابع را می‌توان با نمایش جبری $f(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ معرفی کرد. عبارت جبری $\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ یک چند جمله‌ای درجه سوم برحسب r است. بنابراین $f(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ را یک تابع درجه سوم می‌نامند. به همین ترتیب برخی از توابع هستند که معادله‌های آن‌ها، چند جمله‌ای‌های جبری بر حسب یک متغیر هستند. به این گونه توابع، توابع چند جمله‌ای گفته می‌شود.

به طور مثال توابع زیر همگی توابع چند جمله‌ای هستند :

$f(x)=x^{۲}+۳x+۱$ $\quad$ $g(x)=۵x^{۳}+۷$ $\quad$ $h(a)=۲a^{۳}+۳a^{۲}-۱$

$t(b)=b^{۴}+۲b-۱$ $\quad$ $f(x)=\frac{۳}{۸}x^{۵}+۶x^{۴}+۲x-\sqrt{۷}$ $\quad$ $f(x)=-۴x+۹$

---

۱. معمولاً اعضای دامنه را متغیر مستقل و مقادیر تابع را متغیر وابسته می‌نامند.

۱- فرض کنید که تابع $f(x)=x^{۲}$ تابعی باشد که مساحت یک مربع را برحسب طول ضلع آن به‌دست می‌دهد. نمودار این تابع را رسم کنید و آن را با نمودار تابعی که با معادله‌ی $y=x^{۲}$ داده می‌شود مقایسه کنید. دامنه و برد هر دو را به‌دست آورید و با یک‌دیگر مقایسه کنید.

۲- تابع $g(x)$ با جدول زیر داده شده است. جاهای خالی را پر کنید.

x	-۳	-۲	۰	۱	۲	۳
$g(x)=x^{۲}+۵$	۱۴					

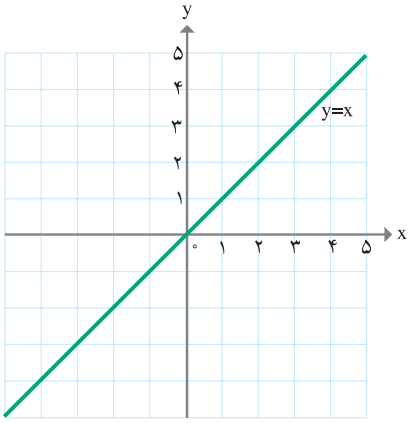
تابع همانی: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو در دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، آن تابع را تابع همانی می‌نامند.

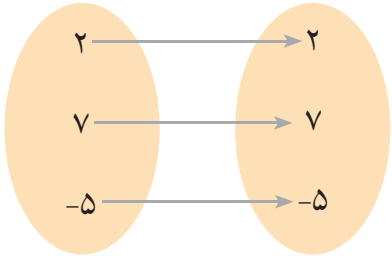
در ادامه سه تابع با نمایش‌های متفاوت ارائه شده است :

الف) توضیح دهید که چرا هر یک از نمونه‌های ارائه شده تابع همانی هستند؟

ب) آیا می‌توانید تفاوت‌های آن‌ها را بیان کنید؟

ج) دامنه و برد هر کدام را به‌دست آورید.





اعداد طبیعی	۱	۲	۳	۴	۵	...
اعداد طبیعی	۱	۲	۳	۴	۵	...

تابع همانی را معمولاً با معادله‌ی $f(x) = x$ نیز نمایش می‌دهند.

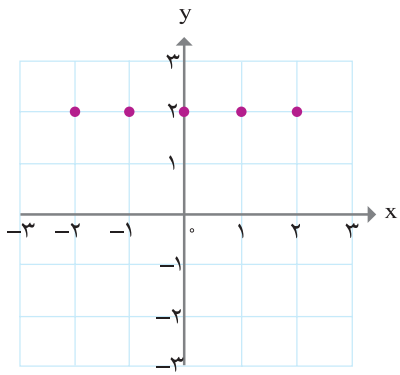
تابع ثابت

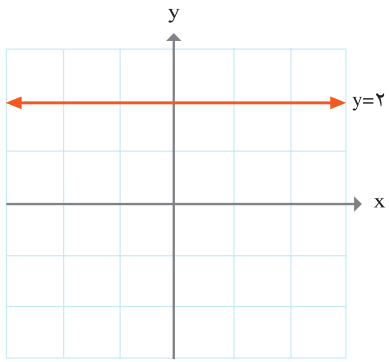
فرض کنید که دمای هوا در ساعات ۹ تا ۱۱ صبح تغییر نکند. این رابطه بین ساعات روز و دمای هوا، گونه‌ای از تابع را مشخص می‌کند که تابع ثابت نامیده می‌شود.

فعالیت

نمونه‌هایی از تابع ثابت در این‌جا ارائه شده‌اند، آن‌ها را با هم مقایسه کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آن‌ها را بیان کنید. بُرد این توابع چه خاصیتی دارد؟

ساعات روز	۹	۹/۵	۱۰	۱۰/۵	۱۱
دمای هوا	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸





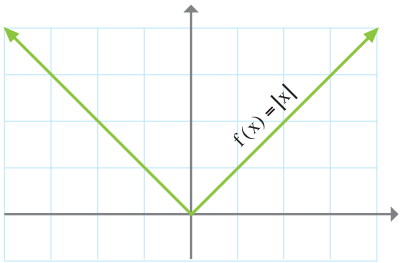
تابع ثابت تابعی است که برد آن تنها شامل یک عضو است.

تابع قدر مطلق

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد را به قدر مطلق آن‌ها نظیر می‌کند.

x	-۴	$-\frac{۷}{۳}$	-۲	-۱	۰	۱	$\sqrt{۲}$	$\frac{۷}{۳}$	۳	۴
f(x)	۴	$\frac{۷}{۳}$	۲	۱	۰	۱	$\sqrt{۲}$	$\frac{۷}{۳}$	۳	۴

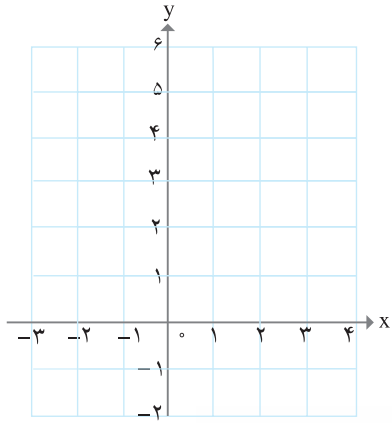
تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود. تابع قدر مطلق را با $f(x)=|x|$ نمایش می‌دهند.



در حالتی که دامنه‌ی تابع قدر مطلق مجموعه اعداد حقیقی در نظر گرفته شود، نمودار تابع را رسم کرده‌ایم. برد این تابع، همه‌ی اعداد نامنفی یعنی : $[۰ \text{ و } +\infty)$ است. همان گونه که از جدول و شکل پیداست، این تابع یک به یک نیست.

با تکمیل جدول، زیر تابع $f(x)=|x|+۳$ را رسم کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۳
$f(x)=\lvert x\rvert+۳$				۳	$\frac{۷}{۲}$			



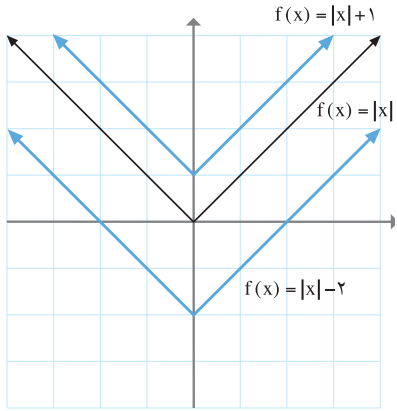
فعالیت

در شکل زیر با کمک تابع $f(x)=|x|$ دو تابع $f(x)=|x|+۱$ و $f(x)=|x|-۲$ را رسم کرده‌ایم.

الف) با استفاده از شکل‌های زیر توضیح دهید که هر یک از آن‌ها چگونه رسم شده است.

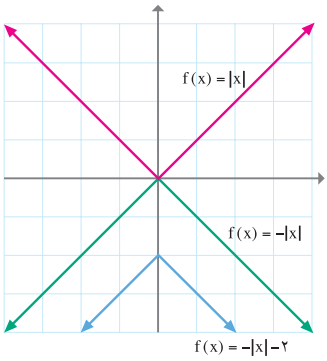
ب) دامنه و برد هر یک را به‌دست آورید. آیا این توابع یک به یک هستند؟

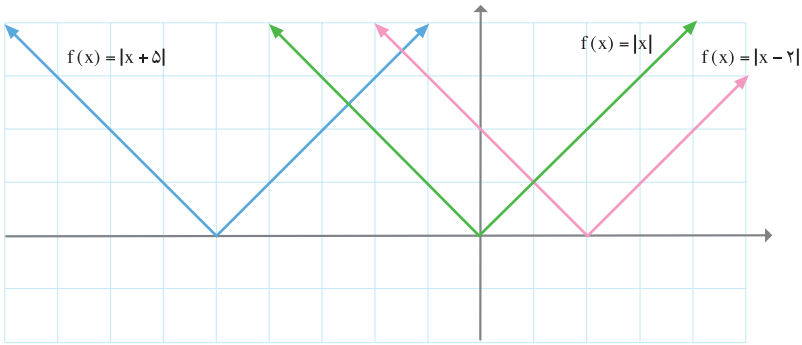
ج) به همین روش تابع $f(x)=|x|+۴$ را رسم کنید.



این گونه رسم یک تابع به کمک تابعی دیگر را «انتقال» نمودار تابع می‌نامند.

در شکل‌های زیر دامنه و برد توابعی که به کمک تابع قدر مطلق $f(x)=|x|$ رسم شده‌اند را بیابید. $f(x)=-|x|$ چگونه رسم شده است؟





۱- نمودار تابع قدر مطلق $f(x)=|x-۴|$ را در حالت‌های زیر رسم کنید.

الف) دامنه‌ی f = {۱ و ۲ و ۳ و ۴}

ب) مجموعه‌ی همه‌ی اعداد بزرگتر یا مساوی ۴ = دامنه‌ی f

ج) همه‌ی اعداد حقیقی = دامنه‌ی f

۲- توابع $f(x)=|x|+۲$ و $g(x)=|x+۲|$ و $h(x)=|x|-\frac{۲}{۳}$ را به کمک انتقال تابع قدر مطلق $f(x)=|x|$ رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را به‌دست آورید.

۳- توابع $h(x)=\left|\frac{۱}{۲}x\right|$ و $f(x)=|x|$ و $g(x)=|۲x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و با یک‌دیگر مقایسه کنید. برای رسم این توابع از جدولی شبیه تابع قدر مطلق کمک بگیرید.

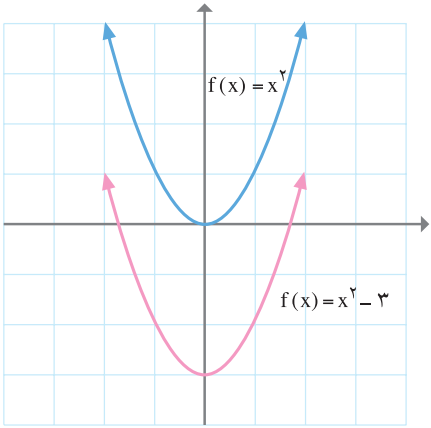
رسم نمودار برخی از توابع درجه دوم به کمک انتقال تابع $f(x)=x^۲$

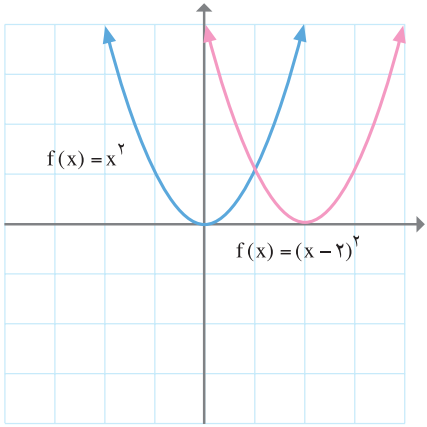
مانند آن چه که در مورد توابع قدر مطلق دیدیم، می‌توان نمودار برخی از توابع درجه دوم را به کمک انتقال تابع $f(x)=x^۲$ یا همان $y=x^۲$ رسم کرد.

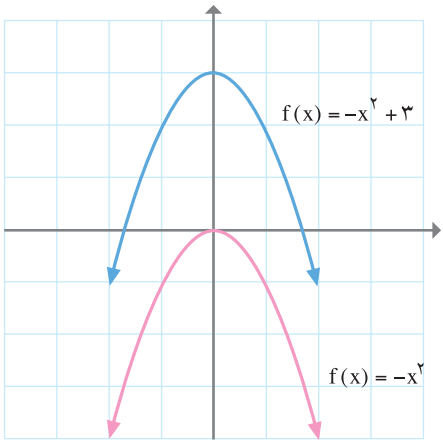
فعالیت

الف) توضیح دهید که هر یک از نمودارهای زیر چگونه به کمک نمودار $y=x^۲$ رسم شده‌اند.

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را با استفاده از نمودار آن‌ها به‌دست آورید.







مسائل

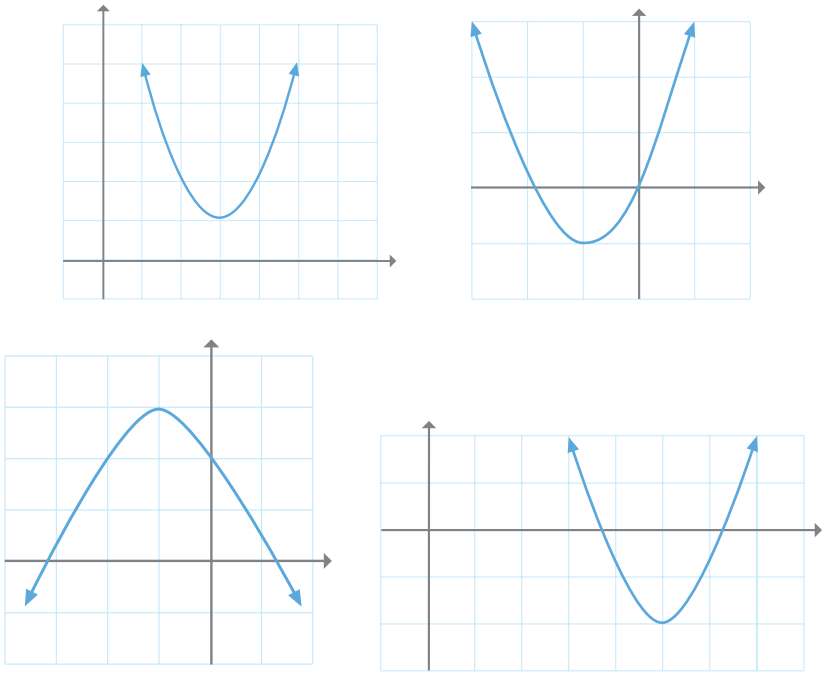
۱- در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه دوم زیر رسم شده‌اند.

$f(x)=(x-۵)^۲-۲$ $\qquad$ $f(x)=(x+۱)^۲-۱$

$f(x)=(x-۳)^۲+۱$ $\qquad$ $f(x)=-(x+۱)^۲+۳$

الف) تعیین کنید که هر یک از نمودارها چه تابعی را نشان می‌دهند.

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به‌دست آورید :



۲- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$f(x)=\frac{۱}{۳}x^۲$ $\qquad$ $f(x)=-(x-۱)^۲-۴$ $\qquad$ $f(x)=۲x^۲$ $\qquad$ $f(x)=(x-۵)^۲$

توابع گویا

همان‌گونه که برخی از توابع به کمک یک چند جمله‌ای قابل نمایش هستند، بعضی از توابع را می‌توان به کمک یک عبارت گویا نمایش داد. هر یک از توابع زیر یک تابع گویا است :

$$f(x)=\frac{۲}{x+۱} \qquad g(x)=\frac{x^۲-۳x+۱}{-\frac{۲}{۵}x+۷} \qquad h(x)=\frac{\sqrt{۲}x-۱}{x^۲-۴}$$

فعالیت

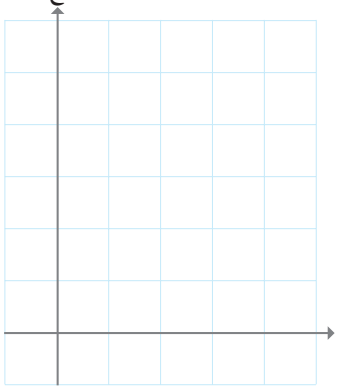
۱- جدول زیر رابطه‌ی بین اعداد طبیعی و وارون آن‌ها را نشان می‌دهد.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
f(x)	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۸}$	...

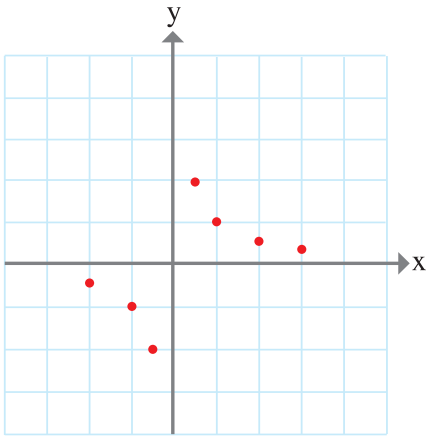
الف) معادله‌ای برای رابطه‌ی داده شده بر حسب x به‌دست آورید. آیا این معادله یک تابع گویا را نشان می‌دهد؟

ب) دامنه‌ی این تابع را معلوم کنید.

ج) نمودار این تابع را (با مشخص کردن زوج‌های مرتب داده شده در جدول، در یک صفحه مختصات) رسم کنید.



۲- در فعالیت ۱ به جای اعداد طبیعی،اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. تنها عدد حقیقی که وارون ندارد، صفر است، زیرا تقسیم بر صفر تعریف نشده است. یک نمایش مناسب برای تابعی که به هر عدد حقیقی، وارون آن را نسبت دهد، نمایش جبری $f(x)=\frac{۱}{x}$ یا معادله‌ی $y=\frac{۱}{x}$ است. دامنه‌ی چنین تابعی، مجموعه‌ی همه‌ی اعدادی است که به ازای آن‌ها عبارت گویای $\frac{۱}{x}$ تعریف شده است،یعنی دامنه‌ی تابع $f(x)$ مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی به‌جز صفر یا همان $R-\{۰\}$ است.



الف) چه تفاوتی بین دامنه‌ی تابع f و دامنه‌ی تابع به‌دست آمده در فعالیت ۱ وجود دارد؟

ب) قسمتی از نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. بقیه‌ی نمودار را کامل کنید. (زوج‌های مرتب بیش‌تری را از تابع مشخص کنید و نقاط به‌دست آمده روی نمودار را به هم وصل کنید.)

ج) آیا می‌توانید به کمک شکل به‌دست آمده، برد تابع f را تعیین کنید؟ آیا این تابع یک به یک است؟

دامنه‌ی توابع گویای زیر را به‌دست آورید :

$$f(x)=\frac{x+۱}{x^۲-۹} \qquad g(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x} \qquad h(x)=\frac{x+۷}{۳x} \qquad k(x)=\frac{\frac{۱}{۲}x-۴}{x^۲+۱}$$

توابع گویا در دنیای واقعی دارای کاربردهای زیادی هستند. در فعالیت زیر با یکی از این کاربردها آشنا می‌شویم :

هزینه‌ی پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری وصنعتی از رودخانه‌ای به‌وسیله‌ی تابعی مانند : $f(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و f(x) هزینه‌ی پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است . مثلاً هزینه‌ی پاک‌سازی ۱۰ درصد آلودگی برابر است با :

$$f(۱۰)=\frac{۲۵۵\times ۱۰}{۱۰۰-۱۰}=\frac{۲۵۵۰}{۹۰}=۲۸/۳۳$$

پل زمان خان – استان چهارمحال و بختیاری

الف) هزینه‌ی پاک‌سازی ۵۰ درصد از آلودگی این رودخانه چه‌قدر است؟

ب) آیا امکان داردکه با توجه به تابع داده شده، ۱۰۰ درصد از آلودگی رودخانه را از بین برد؟

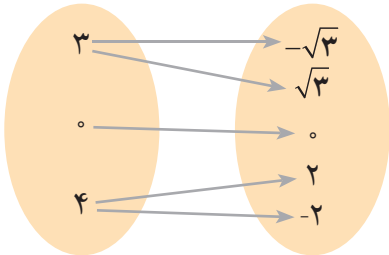
ج)دامنه‌ی تابع داده شده را با توجه به رابطه‌ی داده شده به کمک بازه نمایش دهید.

د) دامنه‌ی این تابع را با دامنه‌ی تابع g مطرح شده در تمرین در کلاس مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای از این مقایسه به‌دست می‌آید؟

توابع رادیکالی[1]

پیدا کردن دامنه وبرد هر تابع دلخواهی، همیشه کار ساده‌ای نیست .در این کتاب تأکید بر پیدا کردن دامنه‌ی توابع است. زیرا در بیش‌تر کاربردهای توابع در دنیای واقعی، تعیین دامنه اهمیت بیش‌تری از پیدا کردن برد آن دارد. ضمناً به‌طور معمول پیدا کردن دامنه، کمک به یافتن برد آن می‌نماید.

مثال



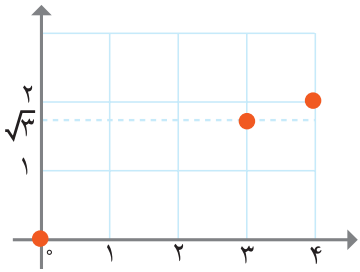
۱– می‌دانید که تنها اعداد نامنفی ریشه‌های دوم دارند. در رابطه‌ی مقابل که با نمودار ون نمایش داده شده است ، هر عدد به ریشه‌های دوم آن نظیر شده است، چرا این رابطه یک تابع نیست؟

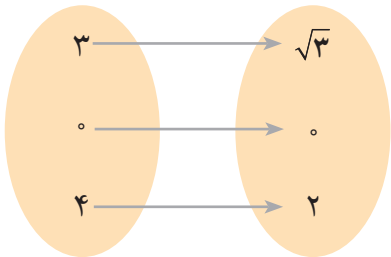
اگر رابطه‌ی بالا را به این شکل تغییر دهیم که هر عدد به ریشه‌ی دوم نا منفی آن نظیر شود یک تابع به‌دست می‌آید. برخی نمایش‌های متفاوت تابع به‌دست آمده در صفحه‌ی بعد ارایه شده است.

۱. در این کتاب تنها با برخی از توابع رادیکالی آشنا می‌شویم.

x	۰	۳	۴
y	۰	$\sqrt{۳}$	۲

$\{(۰,۰),(۳,\sqrt{۳}),(۴,۲)\}$



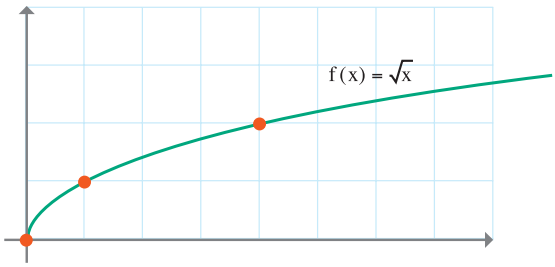


دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی $A=\{۰,۳,۴\}$ وبرد آن $B=\{۰,\sqrt{۳},۲\}$ است.

نمایش جبری این تابع به صورت $y=\sqrt{x}$ است که یک تابع رادیکالی نامیده می‌شود.

۲- در مثال قبل سه عدد ۰و۳و۴ به ریشه‌ی دوم نامنفی خود نظیر شدند. حال فرض کنید که تابعی مانند f هر عدد نامنفی را به ریشه‌ی دوم نامنفی آن نظیر کند. دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی همه‌ی اعداد نامنفی است که می‌توان آن را به صورت بازه‌ی $[۰,+\infty)$ نمایش داد. برد تابع f نیز $[۰,+\infty)$ است.

معادله‌ی این تابع به صورت $y=\sqrt{x}$ یا $f(x)=\sqrt{x}$ است و نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.

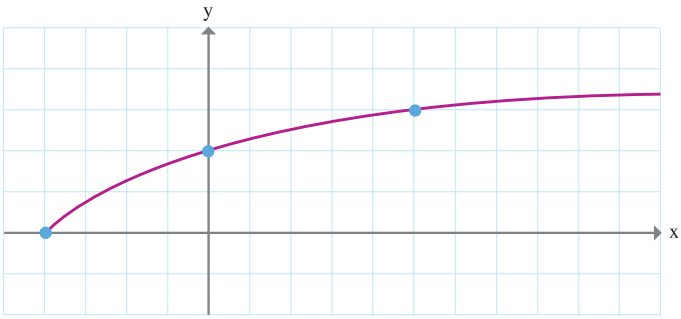


آیا کار با سه نمایش دیگر این تابع (زوج مرتبی، نمودار ون و جدول) آسان‌تر و کارامدتر هستند؟

۳- دامنه وبرد تابع $f(x)=\sqrt{x+۴}$ را به‌دست آورید ونمودار آن را رسم کنید.

حل : برای یافتن دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{x+۴}$ یا $y=\sqrt{x+۴}$ باید اعدادی را بیابیم که برای آن‌ها حاصل x+۴ نامنفی باشد. به عبارت دیگر باید داشته باشیم : $x+۴\geq ۰$

جواب این نامعادله $x \geq -۴$ است. پس دامنه‌ی تابع بازه $[-۴,+\infty)$ است. نمودار تابع f چنین است :



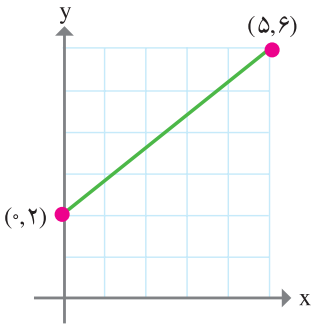
برد این تابع یا مجموعه‌ی مقادیری که برای y به دست می‌آید، بازه‌ی $[۰,+\infty)$ است.

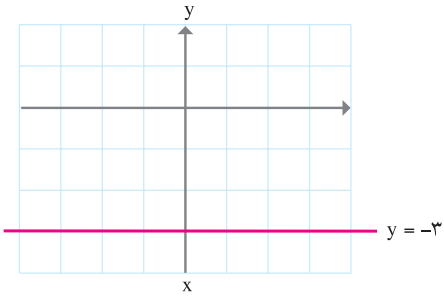
۱– نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را به‌دست آورید.

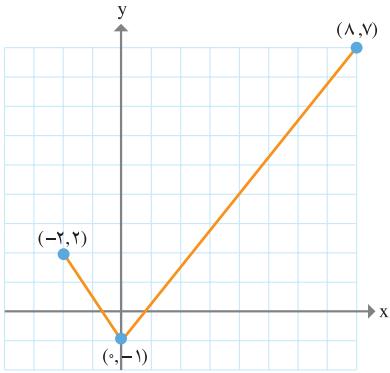
الف) $g(x) = \sqrt{x} + ۴$ ب) $h(x) = \sqrt{x - ۴}$

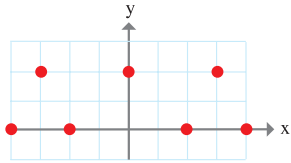
ج) $t(x) = \sqrt{x} - ۴$ د) $m(x) = \sqrt{۲x - ۵}$

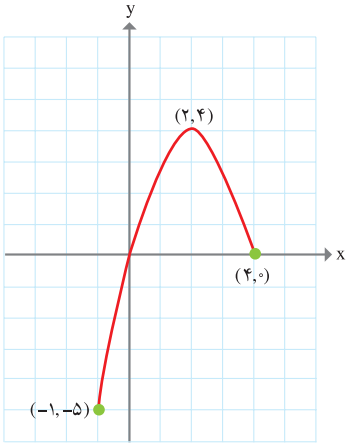
۲– در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هریک از این توابع را به کمک نمودار آن‌ها معلوم کنید. در هر مورد که امکان دارد دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید.

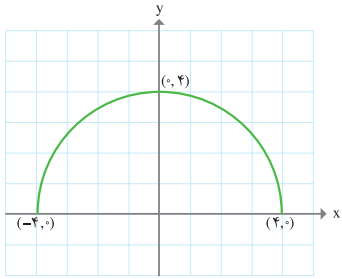


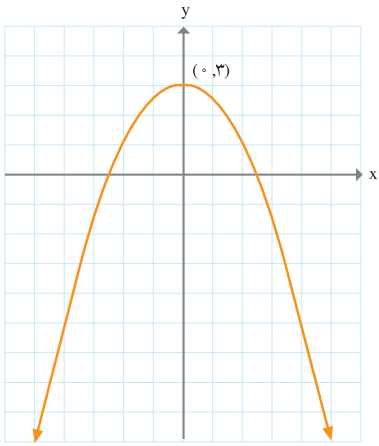



y
x
(۸,۷)
(−۲,۲)
(۰,−۱)


y
x


y
x
(۲,۴)
(۴,۰)
(−۱,−۵)


y
x
(۰,۴)
(−۴,۰)
(۴,۰)


y
x
(۰,۳)

تمرین

۱- نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید ودامنه وبرد هر یک را به‌دست آورید. کدام‌یک از این توابع خطی است؟

$f(x)=\frac{۱}{۲}x \qquad g(x)=\frac{۱}{۲}x+۲ \qquad h(x)=\frac{۱}{۲}(x-۲)$

۲- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

$y=\sqrt{۲x} \qquad y=\sqrt{-۵+x} \qquad y=\sqrt{-x+۳} \qquad y=\sqrt[۳]{x}$

$f(x)=\sqrt{x-۲}+۱ \qquad g(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{x+۳} \qquad h(x)=-\sqrt{x}-۱ \qquad y=\sqrt{-۲x+۷}$

۳- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید .

الف) دامنه‌ی تابع $f(x)=x^۲-۱$ برابر $(۰,\infty)$ و بُرد آن نیز $(۰,\infty)$ است.

ب) دامنه‌ی تابع $f(x)=۲|x|-\frac{۱}{۳}$ همه‌ی اعداد حقیقی و بُرد آن $(۲,\infty)$ است.

ج) دامنه‌ی تابع ثابت $f(x)=۲$ برابر $(-\infty,+\infty)$ است.

د) اگر $f(x)=۲x+۱$ آن‌گاه : $f(۱)=\frac{f(۲)}{۲}$

۴- اگر $f(x)=۲x-۳$ مطلوب است :

$f(۰) \qquad f(۱) \qquad f(\frac{۳}{۲}) \qquad f(a) \qquad f(۲x) \qquad f(x+۱)$

۵- دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

$f(x)=x^۲-\frac{۳}{۵}x-۱ \qquad h(x)=\frac{۵}{x^۲-۲x} \qquad y=\frac{۳x^۲-x+۷}{x^۲-۲x-۳} \qquad g(x)=\frac{۱}{x^۲}$

$y=\frac{۲x-۷}{۴} \qquad y=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}} \qquad f(z)=\frac{z+۲}{\sqrt{z-۲}} \qquad y=\frac{\sqrt{x+۱}}{x}$

۶- نمودار یک تابع خطی f از نقاط (۳ و۴-) و (۳- و ۰) می‌گذرد. مطلوب‌است :

$f(-۱)$, $f(-۴)$

۷- دو مثال از دو تابع متفاوت ارایه کنید که هر دو دارای دامنه‌ها و بردهای مساوی باشند، ولی هیچ زوج مرتبی در بین آن‌ها مشترک نباشد.

۸- فرض کنید برای تابعی مانند f داشته باشیم : $f(x-۱)=۵x$ مطلوب‌است : $f(۷)$.

۹- نمودار تابعی مانند y را رسم کنید که دامنه‌ی آن $[-۳,۳]$ وبرد آن $[۰,۵]$ باشد، مشروط بر آن‌که :

الف) تابع y یک به یک باشد.

ب) تابع y یک به یک نباشد.

۱۰- یک شرکت حمل ونقل مسافر، برای هر گروه ۸۰ نفره یا بیش‌تر از افراد ، نرخ حمل ونقل هر مسافر توسط اتوبوس دربستی را از فرمول زیر تعیین می‌کند :

$n \geq ۸۰$ $\quad$ نرخ حمل ونقل هر مسافر بر حسب هزار تومان $= ۸-۰/۰۵(n-۸۰)$

که در آن n تعداد مسافر است و $n \in \{۹۰،۱۰۰،۱۱۰،۱۲۰،۱۳۰،۱۴۰،۱۵۰\}$

الف) نرخ حمل ونقل هر مسافر برای یک گروه ۱۰۰ نفره چه‌قدر است؟

ب) هزینه‌ی حمل ونقل ۱۰۰مسافر چه‌قدر است؟

ج) تابعی بنویسید که هزینه‌ی حمل ونقل را برحسب n به‌دست دهد .

د) جدول زیر را کامل کنید و سپس نمودار R(n) را رسم نمایید. بیش‌ترین مقدار به‌دست آمده برای R(n) را چگونه تفسیر می‌کنید؟

n (تعداد مسافر)	۹۰	۱۰۰	۱۱۰	۱۲۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۵۰
R(n) (هزینه‌ی کل بر حسب هزار تومان)	...	...	...	...	۷۱۵	...	...

۱۱- فرض کنید $f(x)=۳x$ و $g(x)=۲x+۱$ کدام‌یک از روابط زیر در مورد f وg درست وکدام‌یک نادرست است ؟

الف) $g(a+b)=g(a)+g(b)$, $f(a+b)=f(a)+f(b)$

ب) $g(ab)=g(a).g(b)$, $f(ab)=f(a).f(b)$

ج) $g(kx)=kg(x)$, $f(kx)=kf(x)$

۱۲- فرض کنید $f(x)=mx+b$ یک تابع خطی باشد وداشته باشیم :

$f(۲)=۵$ و $f(x+۲)=f(x)+۲$

الف) مطلوب‌است تابع f و رسم نمودار آن.

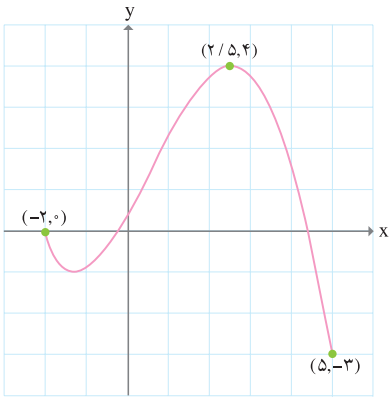
ب) آیا می‌توان گفت که در هر تابع خطی رابطه‌ی $f(x+۲)=f(x)+۲$ برقرار است؟

۱۳- یک تانکر گاز از یک استوانه و دونیم‌کره به شعاع r در دوانتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

۱۴- تابعی بنویسید که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی : $\{۰,۲,۵\}$ باشد و هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کند :

الف) یک به یک نباشد ب) $f(۰)>f(۲)$

۱۵-دامنه وبرد تابع زیر را پیدا کنید.

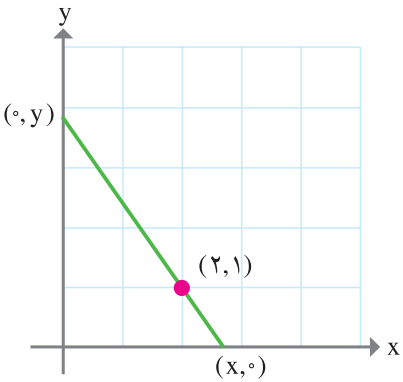


۱۶- اگر $f(x)=\frac{x+۳}{x^۲-۴}$ مطلوب‌است :

$f(\sqrt{۲})$ و $f(۱)$ و $f(۰)$

۱۷- اگر $f(x)=x^۳+۲x^۲+ax+b$ و $f(۱)=۵$ و $f(-۲)=-۱$ مقدار $۳a-۲b$ را به دست آورید.

۱۸- به ازای هر خط که از نقطه (۱و۲) می‌گذرد وجهت مثبت محورهای مختصات را در نقاط (x و۰) و (y و۰) قطع می‌کند، یک مثلث قائم الزاویه در ناحیه‌ی اول محورهای مختصات تشکیل می‌شود.رابطه‌ای ریاضی بنویسید که مساحت هرمثلث قائم‌الزاویه را به عنوان تابعی از x به‌دست دهد. دامنه‌ی این تابع را معلوم کنید.



۱۹- کدام‌یک از توابع زیر وارون پذیرند؟

$f = \{(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲)\}$ $\quad g = \{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۲)\}$

$h = \{(۴,۱),(۵,۲),(۶,۱)\}$ $\quad k = \{(۱,۱),(۲,۵),(۳,۶)\}$

نامعادله و تعیین علامت

مسائل بسیاری هست که برای حل آن‌ها باید علامت عبارت‌های جبری را مشخص کنیم. به بیان دیگر نیاز است تا بدانیم آن عبارت به ازای چه مقادیری مثبت یا منفی است. به‌طور اختصار این موضوع «تعیین علامت» نامیده می‌شود.

به عنوان مثال و همان‌گونه که در بخش‌های قبل دیده‌اید برای تعیین دامنه‌ی تابعی مثل $f(x) = \sqrt{x-۱}$ نیاز است تا $x-۱$ تعیین علامت شود. همچنین در تمرین‌های گذشته آمده بود که سود حاصل از تولید یک کالا در یک شرکت از رابطه‌ی $y = ۶x - ۳۰۰$ به دست می‌آید، که x تعداد کالای تولیدی و y سود حاصل از فروش برحسب تومان است. جدول زیر مقادیر y را به ازای چند مقدار مختلف از x نشان می‌دهد.

x	۱	۵	۵۰	۱۰۰	۱۰۰۰
y =۶x-۳۰۰	-۲۹۴	-۲۷۰	۰	۳۰۰	۵۷۰۰

همان‌طور که دیده می‌شود با تولید ۵۰ عدد کالا سود ما صفر خواهد بود و اگر کمتر از این تعداد کالا تولید شود ضرر خواهد بود یا به عبارتی سود منفی خواهد شد.

در نتیجه تعیین علامت $y = ۶x - ۳۰۰$ مشخص می‌کند سود و ضرر به ازای چه تعداد کالا خواهد بود.

در این بخش قصد داریم به تعیین علامت عبارت‌هایی به شکل $y = ax + b$ که در آن a و b اعداد حقیقی و معلومی هستند بپردازیم. هر عبارت جبری به شکل $ax + b$ که a و b دو عدد بوده و $a \neq ۰$ یک «چند جمله‌ای درجه‌ی اوّل» برحسب x نامیده می‌شود.

فعالیت

عبارت $y = ۴x + ۸$ را درنظر بگیرید.

الف) جدول زیر را تکمیل کنید :

x	-۵	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۲}$
$y = ۴x+۸$			۰			۱۰	
علامت y			۰			+	

ب) نامعادله‌ی $۴x + ۸ \geq ۰$ را حل کنید.

ج) نمودار تابع $f(x) = ۴x + ۸$ را رسم کرده و با استفاده از آن مقادیری از x که $f(x) = ۰$ ، $f(x) > ۰$ و $f(x) < ۰$ را روی شکل مشخص کنید.

د) قسمت‌های ب و ج را برای $y = -۲x + ۶$ انجام دهید. مشخص کنید علامت ضریب x در دو عبارت مذکور چه تغییری در جواب ایجاد می‌کند؟

اکنون به مثال زیر توجه کنید :

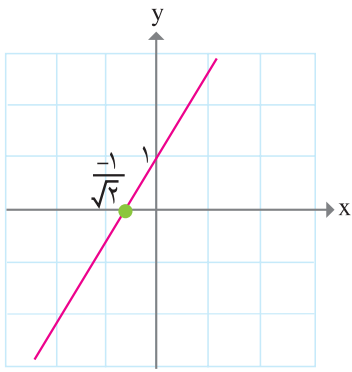
مثال

می‌خواهیم علامت عبارت $y = \sqrt{۲}x + ۱$ را به ازای مقادیر مختلف از x مشخص کنیم. روشن است که به ازای $x = \frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ ، داریم : $y = ۰$.

اگر $x > \frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ آنگاه $\sqrt{۲}x > -۱$ و در نهایت داریم $\sqrt{۲}x + ۱ > ۰$. پس عبارت فوق به ازای $x > \frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ مثبت است. به سادگی دیده می‌شود که اگر $x < \frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ آنگاه $y < ۰$. جمع‌بندی این مطالب در جدول زیر دیده می‌شود.

x	$x < \frac{-۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$	$x > \frac{-۱}{\sqrt{۲}}$
علامت y	−	۰	+

همچنین نمودار $y=\sqrt{۲}x+۱$ به صورت زیر است :
و می‌توان نتایج جدول فوق را از روی آن به‌دست آورد.



روشن است که به ازای $x>\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ ، y به دست آمده بالای محور xها، یعنی مثبت است و به ازای $x<\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ ، $y=\sqrt{۲}x+۱$ پایین محور xها قرار دارد، یعنی منفی است و به ازای $x=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ برابر صفر است.

با توجه به فعالیت و مثال بالا در مورد تعیین علامت $y=ax+b$ در حالتی که $a>۰$ می‌توان گفت :

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
علامت y=ax+b	−	۰	+

مثال

۱− عبارت $y=۳x+۴$ به صورت زیر تعیین علامت می‌شود.

x	$x<-\frac{۴}{۳}$	$-\frac{۴}{۳}$	$x>-\frac{۴}{۳}$
y=۳x+۴	−	۰	+

۲− دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۱}$ را مشخص کنید.
جدول تعیین علامت $۲x-۱$ به شکل زیر است :

x		$\frac{۱}{۲}$	
علامت ۲x−۱	−	۰	+

بنابراین دامنه‌ی تابع عبارت است از $\left[\frac{۱}{۲},+\infty\right)$.

تمرین

۱- دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{۱۰۰-۵x}$ را مشخص کنید.

۲- جدول تعیین علامت $y=ax+b$ را در حالتی که $a<۰$ رسم کنید.

۳- با مراجعه به ابتدای بحث مشخص کنید برای این که سود شرکت حداقل ۱۰ میلیون تومان باشد، چه نامعادله‌ای باید حل شود؟ حداقل چه تعداد کالا باید تولید شود؟

همان‌طور که می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد مثبت یا دو عدد منفی همواره مثبت است. همچنین اگر دو عدد علامت‌های مختلفی داشته باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها همواره منفی است. با توجه به این مطلب می‌توان مثال زیر را حل نمود.

مثال

علامت عبارت $y=(x-۱)(x-۲)$ را به ازای مقادیر مختلف x بیابید. جدول تعیین علامت برای $x-۱$ و $x-۲$ به صورت زیر است.

x		۱	
x−۱	−	۰	+

x		۲	
x−۲	−	۰	+

می‌توان اطلاعات مربوط به این دو جدول را در یک جدول به شکل زیر نمایش داد.

x		۱		۲	
x−۱	−	۰	+		+
x−۲	−		−	۰	+

در نتیجه برای تعیین علامت $(x-۱)(x-۲)$ باید مشخص کنیم x در چه محدوده‌ای قرار دارد. سه محدوده در جدول فوق وجود دارد: $x\geq ۲$ ، $۱<x<۲$ و $x\leq ۱$.

بنابراین تعیین علامت عبارت $(x-۱)(x-۲)$ به صورت زیر است(؟)

x		۱		۲	
(x−۱)(x−۲)	+	۰	−	۰	+

در نتیجه مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(x-۱)(x-۲) \geq ۰$ عبارت است از $(-\infty, ۱] \cup [۲, +\infty)$.
برای سهولت در نوشتن، تمام جدول‌های صفحه‌ی قبل را می‌توان در یک جدول به صورت زیر نشان داد.

x		۱		۲	
x−۱	−	۰	+		+
x−۲	−		−	۰	+
(x − ۱)(x − ۲)	+	۰	−	۰	+

۱ــ عبارت $(۲x-۱)(x-۴)$ را تعیین علامت کنید.

۲ــ نامعادله‌ی $x^۲ - ۷x + ۱۰ \geq ۰$ را با استفاده از تجزیه حل کنید.

۳ــ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x^۲ \geq ۲۵$ چیست؟

۴ـ تابع $g(x) = \sqrt{-(x-۱)(x-۳)}$ به ازای چه مقادیری از x قابل قبول است؟

علی به عنوان یکی از اعضای تیم والیبال مدرسه‌اش وارد زمین شده است و آماده‌ی شنیدن صدای سوت آغاز بازی از سوی داور است. او به محض شنیدن صدای سوت ضربه‌ای به توپ می‌زند، فرض کنید $h(t) = -(t-۱)^۲ + ۳$ نشانگر ارتفاع توپ در زمان t برحسب متر باشد. (مبدأ زمان با سوت داور و زمان نیز برحسب ثانیه است).

الف) جدول زیر را کامل کنید.

t	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲
h(t)						

$h(۰)$ نشانگر چه کمیتی می‌تواند باشد؟

ب) نمودار $h(t)$ را رسم کنید. چهار زمان مختلف بیابید که در آن‌ها توپ در فاصله‌ی حداقل ۲/۵ متری از زمین باشد.

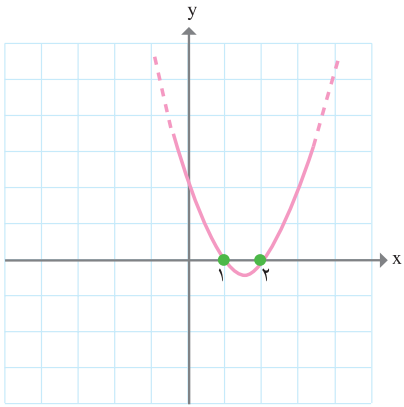
ج) پس از چه زمانی توپ به زمین برخورد خواهد کرد؟ روی نمودار آن را مشخص کنید.

د) با توجه به نمودار $h(t)$ مشخص کنید آیا توپ به ارتفاع بیش از ۳ متر می‌رسد؟

هـ) تمام زمان‌هایی که توپ در ارتفاع بیشتر از یا مساوی ۲/۵ متر از زمین است را با یک نامعادله نشان داده و آن‌ها را بیابید. با توجه به نمودار نیز به این سؤال پاسخ دهید.

همان‌گونه که در فعالیت فوق دیده می‌شود موارد زیادی پیش می‌آید که برای تعیین علامت یک عبارت و یا حل یک نامعادله درنظر گرفتن نمودار آن مفید می‌باشد.

مثال



در قسمت‌های قبل تابع $f(x)=(x-۱)(x-۲)$ تعیین علامت شد، نمودارتابع به شکل مقابل است.

همان‌طور که می‌دانید تعیین علامت به این معناست که عبارت به ازای چه مقادیری منفی یا مثبت است. در شکل مقابل مشهود است که دربازه‌ی (۲ و ۱) نمودار زیر محور xها قرار دارد، یعنی مقدار تابع منفی است. در دو نقطه‌ی ۲ و ۱ (ریشه‌ها) برابر صفر بوده و خارج از بازه‌ی [۱,۲] نمودار بالای محور xها می‌باشد یعنی عبارت $(x-۱)(x-۲)$ مثبت است.

تمرین

۱- با رسم نمودار $y=x^۲-۲$ جواب نامعادله‌ی $x^۲-۲\geq ۰$ را به‌دست آورید.

۲- نامعادله‌ی $x^۲+۱>۰$ به ازای چه مقادیری از x برقرار است؟ با رسم نمودار $y=x^۲+۱$ وضعیت آن را نسبت به محور xها بررسی کرده و به سؤال قبل جواب دهید.

۳- اگر $f(x)=(x-۱)(x-۲)$ ، با توجه به نمودار آن تمام مقادیر x که $f(x)\geq ۲$ را روی شکل مشخص کنید.

۴- با توجه به نمودارهای درجه‌ی دومی که تا به حال در کتاب دیده‌اید آیا می‌توانید با رسم شکل حالاتی که نمودار محور xها را قطع نمی‌کند مشخص کنید؟

تعیین علامت چند جمله‌ای درجه‌ی دوم

در مطالب گذشته با تعیین علامت عبارت‌هایی نظیر $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ ، $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ و $x^2-7x+10$ آشنا شدیم. در این بخش قصد داریم روش کلّی برای تعیین علامت یک عبارت به شکل $y=ax^2+bx+c$ که در آن a و b و c اعداد معلومی هستند ارائه کنیم.

سه عبارت بالا و به طور کلّی هر عبارت به شکل ax^2+bx+c که $a\neq 0$ و a و b و c اعداد معلومی هستند را یک «چند جمله‌ای درجه‌ی دوم» بر حسب x می‌نامیم.

فعالیت

چند جمله‌ای درجه‌ی دوم ax^2+bx+c را درنظر بگیرید.

الف) اگر $ax^2+bx+c=0$ ، به روش Δ ریشه‌های آن را مشخص کنید. (فرض کنید $\Delta\geq 0$).

ب) اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم مذکور باشند، نشان دهید :

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

ج) با استفاده از (ب) جاهای خالی زیر را پر کنید.

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left[x^2-(.....)x+(.....)\right]=a(.....)(.....)$$

پس از حل فعالیت فوق در می‌یابید که اگر یک عبارت درجه‌ی دوم دو ریشه داشته باشد آنگاه به صورت حاصل ضرب دو عبارت درجه‌ی اوّل با یک ضریب (همان a) تجزیه می‌شود. چون روش تعیین علامت عبارت‌های درجه‌ی اوّل و حاصل ضرب آن‌ها را می‌دانیم به راحتی می‌توان آن عبارت درجه‌ی دوم را تعیین علامت کرد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال

عبارت $y=2x^2-3x+1$ را تعیین علامت کنید.

با روش Δ به سادگی به دست می‌آید که ۱ و $\frac{1}{2}$ ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x+1=0$ هستند.

بنابراین مطابق فعالیت بالا داریم $2x^2-3x+1=2(x-1)(x-\frac{1}{2})$. جدول تعیین علامت به قرار صفحه‌ی بعد است :

x		$\frac{۱}{۲}$		۱	
$۲x-۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$x-۱$	$-$		$-$	۰	$+$
$۲(x-۱)(x-\frac{۱}{۲})$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

اگر ضریب ۲ در مثال فوق عددی منفی، مثلاً ۲− بود چه تغییری در جدول تعیین علامت رخ می‌داد؟

اگر $a>۰$ و عبارت درجه‌ی دوم $y=ax^۲+bx+c$ دو ریشه مانند $x_۲$ و $x_۱$ داشته باشد

طبق فعالیت داریم : $ax^۲+bx+c=a(x-x_۱)(x-x_۲)$

فرض کنید $x_۱<x_۲$ ، در این صورت جدول تعیین علامت y به صورت زیر است.

x		$x_۱$		$x_۲$	
$ax^۲+bx+c$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

۱− توابع زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $f(x)=۶x^۲-۸x+۲$

ب) $g(x)=-۳x^۲+۹x-۲$

۲− اگر $y=ax^۲+bx+c$ و معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ دو ریشه مانند $x_۱$ و $x_۲$ داشته باشد و $a<۰$ جدول تعیین علامت آن را بکشید. تفاوت آن با حالتی که $a>۰$ چیست؟

۳− اگر $x_۱=x_۲$ در هر دو حالت $a>۰$ و $a<۰$ جدول تعیین علامت $ax^۲+bx+c$ را مشخص کنید.

۴− با رسم نمودار $y=(x+۱)^۲$ و $y=-(x+۱)^۲$ این دو عبارت را تعیین علامت کنید. شباهت این سؤال با سؤال قبل چیست؟

تا کنون با مطالعه‌ی قسمت‌های قبل با روش تعیین علامت عبارت‌های درجه‌ی دومی که ریشه‌ی حقیقی دارند آشنا شده‌اید. در این بخش قصد داریم تا عبارت‌های درجه‌ی دومی را بررسی کنیم که ریشه‌ی حقیقی ندارند.

حتماً از سال گذشته به یاد دارید که در این حالت $\Delta < 0$. به عبارت دیگر اگر معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه نداشته باشد آنگاه $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. در نتیجه $4ac - b^2 > 0$. از طرفی

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

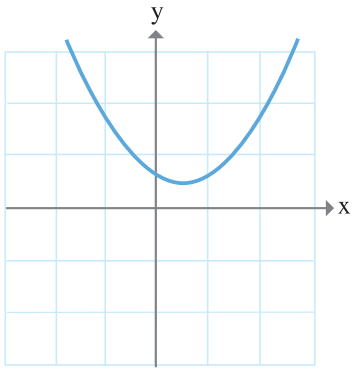
$$a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

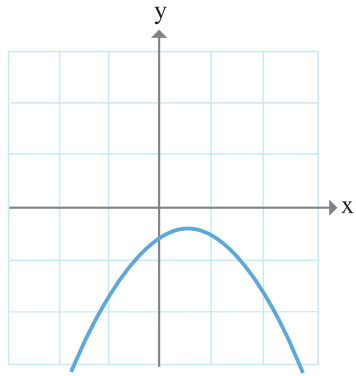
از دوعبارت داخل کروشه یکی مثبت و یکی نامنفی است. بنابراین عبارت داخل کروشه همواره مثبت است. (به ازای هرx) در نتیجه علامت $ax^2 + bx + c$ ، بسته به این که a چه علامتی دارد همواره یک نوع است. جدول تعیین علامت به شکل زیر است.

	x	دلخواه
$a > 0$	$ax^2 + bx + c$	$+$
$a < 0$	$ax^2 + bx + c$	$-$

البته این موضوع از منظر دیگری نیز قابل بررسی است. همان‌گونه که می‌دانیم پس از رسم نمودار $y = ax^2 + bx + c$ محل برخورد آن با محور xها نشانگر ریشه‌های آن می‌باشد، زیرا در این مکان‌ها $y = 0$. بنابراین اگر عبارت مذکور ریشه نداشت به این معنی است که هیچ گاه $y = 0$ اتفاق نمی‌افتد یعنی هیچ نقطه‌ای از نمودار روی محور xها نیست. با توجه به نمودارهای درجه‌ی دوم مختلفی که تاکنون دیده‌ایم دراین حالت یا نمودار به تمامی بالای محور xها قرار دارد یا به تمامی پایین محور xها قراردارد.

در این صورت شکل کلّی به دو صورت زیر است :





چرا اگر قسمتی از نمودار عبارت درجه‌ی دوم بالای محور xها و قسمتی پایین باشد آنگاه آن عبارت حتماً ریشه دارد؟

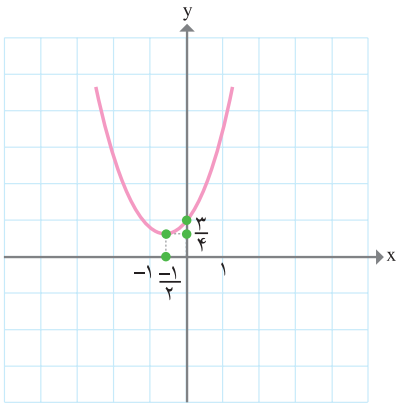
مثال

تمام جواب‌های نامعادله‌ی $x^۲+x+۱\geq ۰$ را بیابید.

داریم :

$$x^۲+x+۱=(x+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}+۱$$
$$=(x+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}$$

چون همواره $(x+\frac{۱}{۲})^۲\geq ۰$ پس $x^۲+x+۱\geq\frac{۳}{۴}>۰$ ، در نتیجه به ازای هر x نامساوی $x^۲+x+۱\geq ۰$ درست است، یعنی جواب نامعادله عبارت است از مجموعه‌ی $\mathbb{R}$.



درضمن نمودار $y=x^۲+x+۱$ به صورت مقابل است.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود نمودار مقابل به‌ازای هر x بالای محور xها قراردارد، یعنی مثبت است.

مثال

عبارت $y = x^2 - x + 5$ را تعیین علامت کنید.

می‌دانیم $\Delta = 1^2 - 4 \times 5 = -19$ ، بنابراین $\Delta < 0$ و همچنین ضریب x^2 برابر یک است که مثبت می‌باشد. بنابراین طبق مطالب قبل همواره $x^2 - x + 5 > 0$. یعنی مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x^2 - x + 5 > 0$ عبارت است از $\mathbb{R}$.

جمع‌بندی تمام مطالب مربوط به تعیین علامت چند جمله‌ای درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است :

حالت اوّل : $\Delta > 0$ ، در این حالت دو ریشه‌ی متمایز مانند x_1 و x_2 داریم $(x_1 < x_2)$

x		x_1		x_2	
$y = ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

حالت دوم : $\Delta = 0$ ، در این حالت یک ریشه داریم :

x		$x_1 = x_2$	
$y = ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	0	موافق علامت a

حالت سوم : $\Delta < 0$

x	دلخواه
$y = ax^2 + bx + c$	موافق علامت a

مسائل

۱ــ نشان دهید اگر $x \in \mathbb{R}$ آنگاه $2x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

۲ــ اگر $a > 0$ ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

(یعنی حاصل جمع هر عدد مثبت با معکوس خودش حداقل دو است.)

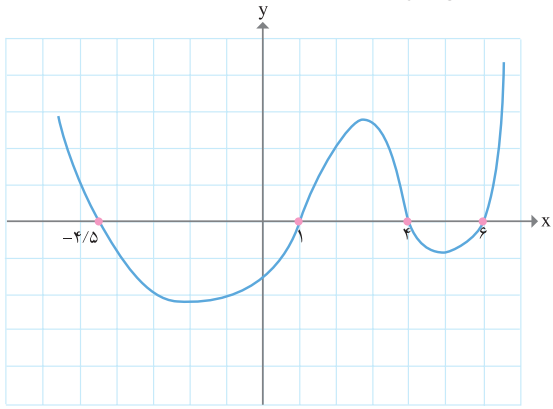
۳ــ اگر $b > ۰$ و a با استفاده از تمرین قبل نشان دهید : $(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}) \geq ۴$

۴ــ دامنه‌ی هریک از توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{-۲x^۲-۳x+۱}$ ب) $g(x)=\sqrt{x^۲+۱}$

ج) $h(x)=\sqrt{x(x-۳)^۲}$ د) $i(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x-۲}}$

۵ ــ نمودار تابع f مطابق شکل زیر است.



$\sqrt{f(x)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟

۶ــ تمامی اعدادی که اگر جای a قرار گیرند عبارت $y=ax^۲+۳x+۱$ همواره مثبت می‌شود را بیابید.

۷ــ به ازای هریک از مقادیر a معادله‌ی $x^۲+۲x+a=۰$ یا ریشه‌ی حقیقی ندارد یا دو ریشه‌ی متمایز یا دو ریشه‌ی یکسان دارد. در هریک از این سه حالت تمام مقادیر ممکن برای a را بیابید.

۸ ــ مهدی و امید در حال تمرین برای مسابقه‌ی فوتبال هستند. آن‌ها قرار است تمرین شوت زدن انجام دهند. با شنیدن صدای سوت مربّی هرکدام به توپی که جلوی پایشان است ضربه‌ای می‌زنند. اگر $h(t)=-t^۲+۱۰t$ نشانگر ارتفاع توپ مهدی در زمان t و $g(t)=-۳t^۲+۱۸t$ نشانگر ارتفاع توپ امید در زمان t باشد طی چند ثانیه توپ امید در ارتفاع بالاتر از ارتفاع توپ مهدی قرار دارد؟ (t برحسب ثانیه و $h(t)$ و $g(t)$ برحسب متر هستند.)