



فصل ۱

ترجمه فارسی دیباچه مفتاح الحساب

بسم الله الرحمن الرحيم

ستایش خداوندی را سزااست که در آفرینش
آحاد یگانه است، و در به هم پیوستن
اعداد گوناگون بی همتا است. و درود بر
بهترین آفریده او محمد(ص) که والاترین
شفاعت کننده روز رستاخیز است، و بر خاندان
او و فرزندان او که راههای رهایی و رستگاری
را رهنمونند. اما بعد.....



محاسبات جبری،

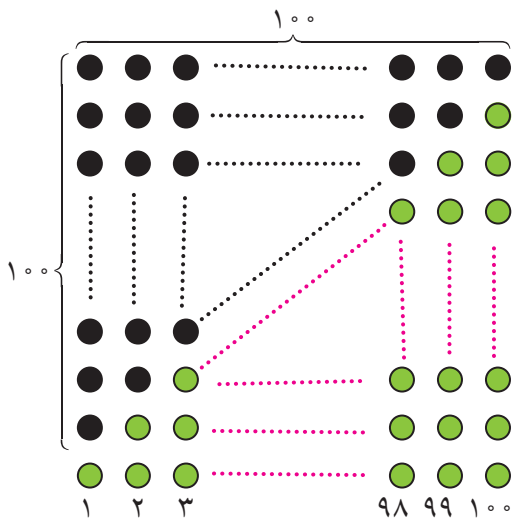
معادلات

و نامعادلات

۱. مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۲. تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش پذیری
۳. بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی
۴. بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله‌ای‌ها
۵. معادلات
۶. ماکزیمم و مینیمم توابع درجه دوم
۷. معادلات شامل عبارات گویا
۸. معادلات شامل عبارات گنگ
۹. حل معادلات به روش هندسی
۱۰. قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۱۱. معادلات قدرمطلق
۱۲. نامعادلات قدرمطلق
۱۳. حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)



مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی



گاوس یکی از دانشمندان ریاضی قرن هیجدهم است که داستان جالبی در زمان مدرسه خود دارد. یک روز معلم برای سرگرم کردن دانش‌آموزان از آنها می‌خواهد اعداد ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع بزنند و نتیجه را به دست آورند. در حالی که دانش‌آموزان مشغول این کار کسل‌کننده بودند، گاوس نتیجه را به سرعت به دست می‌آورد و به معلم ارائه می‌کند.

آیا شما هم می‌توانید این عمل جمع را به سرعت انجام دهید؟ شکل مقابل می‌تواند ایده‌ای برای این کار به شما بدهد.

بحث در کلاس

از شکل بالا چگونه می‌توان استفاده کرد و جمع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به دست آورد؟

تمرین در کلاس



۱- با استفاده از تجربیاتی که در بالا به دست آورده‌اید برای یک عدد طبیعی n نشان دهید:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲- اگر جمله اول یک دنباله حسابی a و قدر نسبت آن d باشد، جملات آن به شکل زیرند:

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$$

نشان دهید مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $\frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$.

۳- نشان دهید $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.



بحث در کلاس

می‌گویند یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه‌ای بدهد و از او خواست خودش جایزه‌ای برای خودش تعیین کند. شطرنج ۶۴ خانه دارد و مخترع شطرنج گفت در خانه اول یک دانه گندم بگذاردید و در خانه دوم ۲ گندم بگذاردید و در خانه سوم ۴ گندم بگذاردید و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم بگذاردید و نهایتاً کل گندم‌ها را به من بدهید. اگر هر دانه گندم یک گرم باشد، چند گرم گندم جایزه مخترع شطرنج خواهد شد؟

این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی* با روش خاص خود آن را حل کرده است. شما هم سعی کنید راه حلی برای آن بیابید.



حل یک مسئله



طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌زنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

آن مقدار از مساحت مربع (بر حسب متر مربع) که در هر مرحله رنگ می‌شود یک دنباله هندسی به شکل زیر تشکیل می‌دهد.

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \left(\frac{1}{4}\right)^n, \dots$$

بنابراین آن مقدار از مساحت مربع که پس از n مرحله رنگ می‌شود برابر است با

$$S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$\frac{1}{4}S_n$ شباهت زیادی با S_n دارد. از همین نکته برای محاسبه S_n استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = -\frac{1}{4} + S_n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

این تساوی معادله‌ای بر حسب S_n است و از آن نتیجه می‌شود، $S_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

حال باید نامعادله $1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \geq \frac{99}{100}$ را حل کنیم.

$$\frac{99}{100} \leq 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow 99 \leq 100 - \frac{100}{4^n} \Rightarrow \frac{100}{4^n} \leq 1 \Rightarrow 100 \leq 4^n$$



حداقل مقدار n که در این نامعادله صدق می‌کند ۷ می‌باشد، یعنی پس از مرحله هفتم حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است.

فعالیت ۱



۱- برای یک عدد طبیعی n و یک عدد حقیقی q قرار دهید $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$. با مقایسه S و qS نتیجه بگیرید:

$$(1 - q)S = 1 - q^{n+1}$$

۲- اگر $q \neq 1$ نشان دهید:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

۳- اگر جمله اول یک دنباله هندسی برابر a و قدر نسبت آن برابر q باشد، جملات این دنباله به شکل زیرند.
 $a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots$

نشان دهید در حالت $q \neq 1$ مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $a \frac{1 - q^n}{1 - q}$

۴- در حالت $|q| < 1$ ، مجموع n جمله اول دنباله هندسی بالا با افزایش n به چه عددی نزدیک می‌شود؟

با انجام فعالیت بالا قضیه زیر به دست می‌آید.

در یک دنباله هندسی نامتناهی با جمله اول a و قدر نسبت q که $|q| < 1$ ، مجموع تمام جملات آن برابر است با $\frac{a}{1 - q}$.

مثال

تویی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع اولیه خود بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۵ متری برسد. می‌خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن این توپ چقدر مسافت طی می‌کند؟
 ارتفاع توپ قبل از n امین برخورد با زمین را A_n می‌نامیم. روشن است که

$$A_1 = 5, A_2 = \frac{5}{4}, A_3 = \frac{5}{16}, \dots, A_n = \frac{5}{4^{n-1}}, \dots$$



بنابراین مسافت طی شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین عبارت است از:

$$1^\circ, \frac{1^\circ}{4}, \frac{1^\circ}{16}, \dots, \frac{1^\circ}{4^{n-1}}, \dots$$

کل مسافت طی شده توسط توپ برابر است با مجموع جملات دنباله بالا. اما دنباله بالا یک دنباله هندسی نامتناهی با

جمله اول 1° و قدر نسبت $\frac{1}{4}$ است و مجموع جملات آن برابر است با

$$\frac{a}{1-q} = \frac{1^\circ}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4^\circ}{3} \approx 1.33^\circ$$

یعنی توپ تقریباً 1.33° متر تا توقف کامل طی می کند.

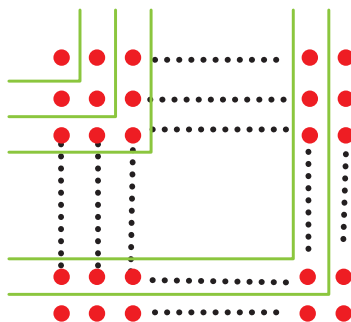


مسائل



۱- در دنباله حسابی $\dots, 11, 8, 5$ حداقل چند جمله آن را باید جمع کنیم تا حاصل از 50° بیشتر شود؟

۲- به کمک شکل زیر نتیجه بگیرید $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$.



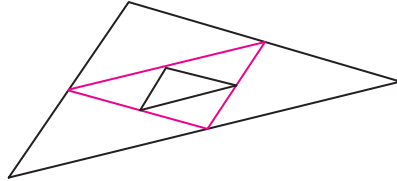
۳- در مسئله شطرنج نشان دهید جایزه مخترع شطرنج بیش از 1000 میلیارد تن خواهد شد.

۴- علی می خواهد پول های خود را پس انداز کند. او روز اول 1000 تومان در صندوق خود قرار می دهد و قرار می گذارد هر روز $9/10$ پول روز قبل را در صندوق، پول قرار دهد. پس از 50 روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچ گاه از 10000 تومان بیشتر نخواهد شد.

۵- برای محافظت از تابش های مضر مواد رادیواکتیو لایه هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آن ها نصف می شود. چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش 99 درصد کاهش یابد؟



۶- یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عملیات را به‌طور متوالی ادامه دهید.



مجموع محیط مثلث‌های به‌دست آمده چقدر است؟ مجموع مساحت مثلث‌های به‌دست آمده چقدر است؟

تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

در سال‌های پیش دیدیم که با تقسیم یک چندجمله‌ای $P(x)$ بر یک چندجمله‌ای دیگر $B(x)$ یک خارج قسمت $Q(x)$ و باقی‌مانده $R(x)$ به‌دست می‌آید که درجه‌ی آن برابر صفر است یا از درجه‌ی $B(x)$ کمتر خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$P(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

این تساوی را رابطه‌ی تقسیم می‌نامند.

تمرین در کلاس



- ۱- چندجمله‌ای $P(x) = 4x^4 + 2x^3 + 1$ را بر چندجمله‌ای $B(x) = x^2 - 1$ تقسیم کنید.
- ۲- مقسوم، مقسوم علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده را مشخص کنید.
- ۳- رابطه‌ی تقسیم را بنویسید و به‌کمک آن مقدار $P(1)$ و $P(-1)$ را به‌دست آورید.

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $B(x)$ صفر باشد، نتیجه می‌شود، $P(x) = B(x)Q(x)$ در این حالت گوئیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $B(x)$ بخش‌پذیر است.

مثال

چندجمله‌ای $x^2 + 1$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر است، زیرا $x^2 + 1 = (x + 1)(x - 1) + 2$.



فعالیت ۲



فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ تقسیم شده است و باقی مانده‌ی آن R باشد.

- ۱- رابطه‌ی تقسیم را بنویسید.
- ۲- درجه‌ی باقی مانده‌ی تقسیم چیست؟
- ۳- $P(a)$ را به دست آورید.
- ۴- اگر $P(a)$ صفر باشد، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

از فعالیت بالا قضیه زیر به دست می‌آید.

باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ همان $P(a)$ است. بنابراین اگر $P(a)$ صفر باشد، چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است.

مثال

باقی مانده‌ی تقسیم $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 3$ بر $x+1$ را حساب می‌کنیم.

$x+1$ را می‌توانیم به صورت $x-(-1)$ بنویسیم، پس $P(-1)$ را حساب می‌کنیم.

$$R = P(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) + 3 = 2 - 5 - 1 + 3 = -1$$

بحث در کلاس

چگونه می‌توانیم باقیمانده تقسیم یک چندجمله‌ای مانند $P(x)$ بر چندجمله‌ای $ax+b$ را به دست آوریم؟

تمرین در کلاس



الف) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

- ۱- عبارت $2 - 5x + 3x^2$ بر $x-1$ بخش پذیر است.
 - ۲- چندجمله‌ای $a^n - x^n$ بر $x-a$ بخش پذیر است.
 - ۳- چندجمله‌ای $a^n + x^n$ بر $x+a$ بخش پذیر است.
 - ۴- باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ برابر است با $P(-b)$.
- ب) باقی مانده‌ی تقسیم $1 + 2x - 4x^2$ را بر $1 - 2x$ تعیین کنید.



فعالیت ۳



برای یک عدد حقیقی a و عدد طبیعی n عبارت $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$ را در نظر بگیرید.
۱- عبارت $aS - S$ را حساب کنید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$[a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)]$$

۲- اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به $-a$ نتیجه بگیرید:

$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1)$$

مثال

به کمک اتحادهای بالا عبارت‌های زیر را ساده می‌کنیم.

$$A = \frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1}, \quad B = \frac{(1 + t + t^2 + t^3 + t^4)(1 - t)}{t^5 - 1}$$

صورت و مخرج کسر A را تجزیه می‌کنیم.

$$A = \frac{(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

برای ساده کردن B می‌توان نوشت:

$$B = \frac{1 - t^5}{(t^5 + 1)(t^5 - 1)} = \frac{-1}{t^5 + 1}$$

تمرین در کلاس



به کمک اتحاد $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$ اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

بسط دوجمله‌ای غیاث الدین جمشید کاشانی

در سال‌های قبل با محاسبه مربع و مکعب دوجمله‌ای‌ها آشنا شدید. در حالت کلی نیز می‌توان توان‌های طبیعی دوجمله‌ای‌ها را به دست آورد.



فعالیت ۴



به اتحادهای زیر و ضرایبی که در آنها است توجه کنید.

$(a+b)^0 = 1$	۱
$(a+b)^1 = a+b$	۱ ۱
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	۱ ۲ ۱
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	۱ ۳ ۳ ۱
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	۱ ۴ ۶ ۴ ۱
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
.....	

- ۱- چه الگویی در توان‌های a و b و ضرایب آنها می‌باید؟
- ۲- با توجه به الگوی به‌دست آمده $(a+b)^6$ برابر چه عبارتی می‌شود؟
- ۳- تعداد جملات هر بسط با توان دو جمله‌ای چه رابطه‌ای دارد؟

هر عبارت به صورت $(a+b)^n$ را که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است، دو جمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی و بسط آن را به صورت چندجمله‌ای از a و b بسط دو جمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی می‌نامند زیرا این دانشمند ایرانی از اولین کسانی بوده است که روی آن کار کرده است. این چندجمله‌ای دارای $n+1$ جمله است و هر جمله‌ی آن به صورت مضربی از $a^k b^{n-k}$ است و جملات $a^k b^{n-k}$ و $a^{n-k} b^k$ ضریب‌های مساوی دارند.

ضرایب بسط دو جمله‌ای را می‌توان در مثلثی مانند زیر مرتب کرد که به آن مثلث خیام — پاسکال می‌گویند.

		۱				
		۱	۱			
		۱	۲	۱		
		۱	۳	۳	۱	
		۱	۴	۶	۴	۱
					



مرتب نمودن ضرایب به صورت صفحه‌ی قبل را ابتدا خیام، دانشمند مشهور ایرانی، و سپس پاسکال انجام داد و به همین خاطر به نام هر دوی آن‌ها خوانده می‌شود.

تمرین در کلاس



- ۱- اعداد هر سطر در مثلث خیام - پاسکال چگونه از طریق اعداد سطر قبل از آن به دست می‌آیند؟
- ۲- چه ارتباطی بین اعداد هر سطر در مثلث صفحه‌ی قبل با بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی وجود دارد؟
- ۳- مجموع ضرایب در هر یک از بسط‌های $(a+b)^2$ ، $(a+b)^3$ و $(a+b)^4$ را به دست آورید. آیا می‌توانید مجموع ضرایب در بسط $(a+b)^n$ را حدس بزنید؟ حدس خود را ثابت کنید.
- ۴- طرف دوم هر یک از عبارات‌های زیر را به دست آورید.

$$(2x + y)^5 =$$

$$(3x + 2z)^4 =$$

$$(2a - 1)^6 =$$

مسائل



- ۱- $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. در هر یک از حالت‌های زیر $P(x)$ را به گونه‌ای تعیین کنید که در شرایط مورد نظر صدق کند.
الف) $P(1) = 0$ ، $P(2) = 0$ ب) $P(1) = 1$ ، $P(0) = 0$ ج) $P(2) = -1$ ، $P(-1) = 2$
- ۲- مقدار m را چنان بیابید که چندجمله‌ای $P(x) = x^3 - mx^2 - x + 4$ بر $2x + 1$ بخش پذیر باشد.
- ۳- در چندجمله‌ای $P(x) = x^2 + ax^2 + x + b$ ، a و b را طوری بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ بوده و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.
- ۴- m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای $x^4 - 3x^3 + mx + n$ بر $x^2 - 5x + 6$ بخش پذیر باشد.
- ۵- نشان دهید عبارت $x - 2$ یک فاکتور (عامل) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ است. سپس معادله‌ی $f(x) = 0$ را حل کنید.
- ۶- a را چنان بیابید که یک جواب معادله‌ی $x^3 - 2x^2 + ax + 2 = 0$ برابر ۲ باشد. سپس جواب‌های دیگر معادله را به دست آورید.

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

ج) $(2x - 3y)^4$

ب) $(1 + \frac{2}{x})^6$

الف) $(1 - x)^4$



۸- فرض کنید $(2 + \sqrt{3})^n = 362 + b\sqrt{3}$ ، که در آن b یک عدد صحیح و n یک عدد طبیعی است. نشان دهید $(2 - \sqrt{3})^n = 362 - b\sqrt{3}$ و به کمک آن مقدار b را به دست آورید.

۹- عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$A = x^4 - x^2y^2, \quad B = (a^6 + 1)^2 - (a^6 - 1)^2$$

۱۰- اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، اتحاد زیر را به دست آورید.

$$1 - x^n = (1+x)(1-x + \dots - x^{n-1})$$

بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک چندجمله ای ها

در دوره‌ی راهنمایی با مفاهیم مقسوم علیه، عدد اول و تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد آشنا شدیم. مشابه این مفاهیم برای عبارات جبری نیز قابل بررسی است. با مروری بر این مفاهیم به تعمیم آن به عبارات جبری می پردازیم.

تجزیه عدد: هر عدد طبیعی مخالف یک که اول نباشد یک عدد مرکب است. هر عدد مرکب را می توان به حاصل ضرب عامل های اول تجزیه نمود. در حالتی که در تجزیه اعداد عامل های اول تکراری را به صورت توانی بنویسیم به آن تجزیه استاندارد می گوئیم.

برای تجزیه ی یک عدد به عامل های اول، مرتباً عدد را به عامل های اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ... تقسیم می کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم سپس آن را به صورت تجزیه ی استاندارد می نویسیم.



مثال

۳۶۰	۲
۱۸۰	۲
۹۰	۲
۴۵	۳
۱۵	۳
۵	۵
۱	

عدد ۳۶۰ را به صورت تجزیه ی استاندارد می نویسیم.

عدد ۳۶۰ را مطابق الگوی مقابل به طور متوالی بر مقسوم علیه های اول آن تقسیم می کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم. در نتیجه ۳۶۰ حاصلضرب اعداد اول سمت راست هستند.

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$



تمرین در کلاس



عددهای 12° و 525 و 47 را به صورت تجزیه‌ی استاندارد بنویسید.

می‌دانید که بزرگترین عددی که دو عدد طبیعی a و b بر آن بخش پذیرند بزرگترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد نامیده می‌شود که به اختصار با ب.م.م. نشان می‌دهند. برای یافتن ب.م.م. چند عدد می‌توانیم آن‌ها را به صورت استاندارد به عامل‌های اول تجزیه کنیم، در این صورت حاصلضرب عامل‌های مشترک با کمترین توان، ب.م.م. این اعداد خواهند بود.

مثال

ب.م.م. اعداد 36 و 225 و 405 را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} 36 = 2^2 \times 3^2 \\ 225 = 3^2 \times 5^2 \\ 405 = 3^4 \times 5 \end{cases}$$

هریک از اعداد را به صورت استاندارد تجزیه می‌کنیم. تنها عامل مشترک عدد 3 است و

کمترین توان آن 2 است. پس ب.م.م. 3^2 است. روشن است که همه این اعداد بر ب.م.م. خود بخش پذیرند.

تمرین در کلاس



ب.م.م. اعداد 78 و 234 و 156 را به دست آورید.

می‌دانید که کوچکترین عددی که بر دو عدد طبیعی a و b بخش پذیر است را کوچکترین مضرب مشترک آن دو عدد می‌نامند که به اختصار با ک.م.م. نشان می‌دهند. برای یافتن ک.م.م. چند عدد می‌توانیم آن‌ها را به صورت استاندارد به عامل‌های اول تجزیه کنیم، در این صورت حاصلضرب عامل‌های موجود در این تجزیه‌ها با بزرگترین توان، ک.م.م. این اعداد خواهند بود.

مثال

ک.م.م. اعداد $a = 2^2 \times 5^2$ و $b = 2 \times 5^2 \times 7^2$ و $c = 2^5 \times 5 \times 13$ را تعیین می‌کنیم.

حاصلضرب همه‌ی عامل‌های مشترک و غیرمشترک a ، b و c با بیشترین توان را به دست می‌آوریم:

$$2^5 \times 5^2 \times 7^2 \times 13$$

عدد بالا ک.م.م. سه عدد a ، b و c است و روشن است که بر a ، b و c بخش پذیر است.



تمرین در کلاس



- ۱- ک.م.م. اعداد ۱۵ و ۳۵ و ۱۴۰ را به دست آورید.
- ۲- می‌خواهیم سالنی به ابعاد ۴۰ و ۳۶ متر را با فرش‌های مربع شکل هم اندازه که اندازه‌ی ضلع آن‌ها بر حسب متر عدد طبیعی باشد بپوشانیم. اندازه‌ی ضلع فرش‌ها چه عددهایی می‌تواند باشد؟ ضلع فرش‌ها چقدر باشد تا کمترین تعداد فرش برای پوشاندن سالن مورد نیاز باشد بدون آن که فرش‌ها روی هم بیفتند؟
- ۳- ب.م.م. و ک.م.م. هر یک از دسته اعداد زیر را تعیین کنید. (حروف نشان دهنده اعداد اول متمایزند و مخالف ۲، ۳ و ۵ هستند.)

الف) $۳۲a^۳, ۱۶ab^۲, ۸a^۲b^۳$ ب) $۶x^۲y, ۸xy^۲z, ۱۰x^۲y^۲z^۲$

در چندجمله‌ای‌ها نیز، همانند اعداد، اعمال جمع و ضرب و مفهوم بخش‌پذیری برقرار است. پس می‌توانیم ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌ها را نیز همانند اعداد تعریف کنیم.



فعالیت ۵



چندجمله‌ای‌های $P(x) = ۲x^۲ - ۱۶$ و $Q(x) = ۳x^۲ - ۱۲$ را در نظر بگیرید.

- ۱- $P(x)$ و $Q(x)$ را تجزیه کنید.
- ۲- بزرگترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش‌پذیرند را بنویسید.
- ۳- کوچکترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که هم بر $P(x)$ و هم بر $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد را بنویسید.

آنچه که در فعالیت بالا انجام دادید یافتن ب.م.م. و یا ک.م.م. دو چندجمله‌ای بود. بنا به تعریف:

بزرگترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش‌پذیرند را بزرگترین مقسوم علیه مشترک (به اختصار ب.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می‌نامند.

کوچکترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که بر چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ بخش‌پذیر است را کوچکترین مضرب مشترک (به اختصار ک.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می‌نامند.

این تعاریف برای بیش از دو چندجمله‌ای به شکل مشابه انجام می‌شود.



مثال

ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌های $P(x) = x^2 + 1$ و $Q(x) = x^6 - 1$ و $R(x) = 4x^2 - 4$ را تعیین می‌کنیم. برای این کار، ابتدا هر یک از چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم. سپس مشابه آنچه که در مورد ب.م.م. و ک.م.م. اعداد گفته شد عمل می‌کنیم.

$$P(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$Q(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$R(x) = 4(x^2 - 1) = 4(x-1)(x+1)$$

تنها عامل مشترک در این تجزیه‌ها $x+1$ است و کمترین توان آن ۱ است، پس $x+1$ ب.م.م. این سه چندجمله‌ای است.

عواملی که در این تجزیه‌ها وجود دارند عبارتند از: $x^2 + x + 1$, $x^2 - x + 1$, $x - 1$, $x + 1$, ۴ و بزرگترین توان آن‌ها ۱ است. بنابراین ک.م.م. این سه چندجمله‌ای عبارت است از:

$$4(x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1) = 4(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 4(x^6 - 1)$$

ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌ها کمک زیادی به کوتاه‌تر شدن و ساده کردن محاسبات در کسرها و جمع و تفریق عبارت‌های گویا می‌کند.

تمرین در کلاس



۱- حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{48} - \frac{1}{16}$$

۲- کسره‌ای زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$A = \frac{3x^2 - 3xy}{3(x-y)^2}$$

$$B = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 8x + 7}$$

۳- حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{a+5}{a-1} - \frac{6}{a^2+a+1} - \frac{6(a^2+2)}{a^3-1}$$



۱- سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف زده می‌شود. اولین زنگ هر ۱۸ دقیقه یک بار، دومین زنگ در هر ۲۴ دقیقه یک بار و سومین زنگ هر ۳۲ دقیقه یک بار زده می‌شوند. بعد از اولین بار که هر سه زنگ با هم زده شوند حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا آن‌ها دوباره با هم زده شوند؟

۲- در دنباله‌های حسابی زیر چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

$$۱, ۵, ۹, \dots$$

$$۴, ۷, ۱۰, \dots$$

۳- ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی شده‌اند. حداقل تعداد شیشه‌ها کدام است؟ (کنجایش شیشه‌ها را بر حسب لیتر عدد طبیعی فرض کنید.)

۴- حاصل هریک از عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x} \div \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 2x^2}$

ب) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} \div \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 10x + 21}$

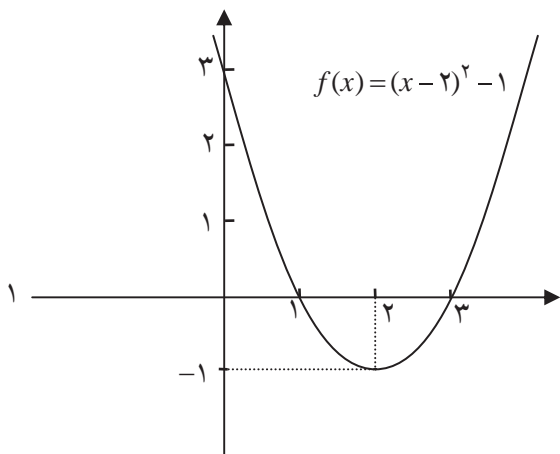
ج) $\frac{1}{a^2 - 1} + \frac{2a}{a^2 + 2a + 1} - \frac{2}{a + 1}$

د) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{8}{x^2 + 2x - 3}$

معادلات

در سال‌های قبل با مفهوم معادله و حل معادله‌ی درجه‌ی اول و درجه‌ی دوم آشنا شدید. در این بخش با برخی نکات جدید درباره‌ی حل معادلات آشنا خواهیم شد و سپس انواع دیگری از معادلات جبری را بررسی خواهیم کرد.

فعالیت ۶

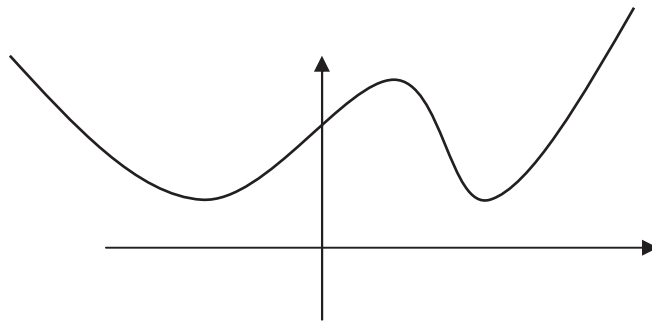


۱- نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x + 3$ به شکل مقابل است.

جواب‌های معادله $f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$ چه ویژگی از نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می‌کند؟ از طریق نمودار $f(x)$ چگونه می‌توان در مورد جواب‌های معادله $f(x) = 0$ اظهار نظر کرد؟



۲- نمودار تابع $g(x)$ به شکل زیر است. در مورد جواب‌های معادله $g(x) = 0$ چه می‌توانید بگویید؟



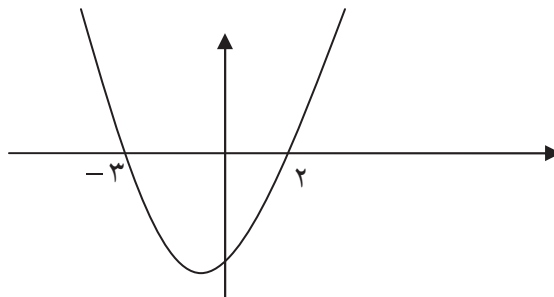
۳- با رسم نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x + 4$ توضیح دهید چرا معادله $x^2 - 4x + 4 = 0$ فقط یک جواب دارد.

برای یک تابع $f(x)$ جواب‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ را (در صورت وجود جواب) صفرهای تابع f می‌نامیم. صفرهای تابع f آن مقادیری از x هستند که به ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می‌شود. اگر نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم، صفرهای f ، طول‌های نقاط تلاقی نمودار با محور طول‌ها است.



مثال

اعداد ۲ و ۳- صفرهای تابع $f(x) = x^2 + x - 6$ می‌باشند و نمودار f در نقاطی به طول‌های ۲ و ۳- محور طول‌ها را قطع می‌کند.



نمودار توابعی که ضابطه آن‌ها یک چندجمله‌ای درجه دوم است را سهمی می‌نامند. سهمی‌ها شکل‌های مشابه و خواص هندسی مشترکی دارند که در درس هندسه با آن‌ها بیشتر آشنا خواهید شد. در سال‌های قبل دیدیم یک معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ دارای دو جواب به صورت زیر است.

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$



در حالت $\Delta = 0$ داریم $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$ در این حالت معادله فقط یک جواب دارد و می‌توان تعبیر کرد که معادله دو جواب مساوی دارد. به همین خاطر در این حالت گوییم معادله یک جواب مضاعف (تکراری) دارد. سال قبل دیدیم که اگر x' و x''

جواب‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ و $x'x'' = \frac{c}{a}$.

حل یک مسئله



مستطیلی بسازید که محیط آن ۲۲ سانتی‌متر و مساحت آن ۲۸ سانتی‌متر مربع باشد.

برای مشخص کردن این مستطیل باید طول و عرض آن را تعیین کنیم. اگر چنین مستطیلی وجود داشته باشد ضلع‌های آن را با x' و x'' نشان می‌دهیم. فرضیات مسئله به معنای آن است که

$$x'x'' = 28, x' + x'' = 11$$

x' و x'' ریشه‌های معادله درجه دوم $(x - x')(x - x'') = 0$ هستند. از طرف دیگر

$$(x - x')(x - x'') = x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = x^2 - 11x + 28$$

بنابراین برای یافتن جواب مسئله کافی است جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 11x + 28 = 0$ را حساب کنیم. از حل این معادله نتیجه می‌شود: $x' = 4$ و $x'' = 7$.

به‌طور کلی:

اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ ، آنگاه α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

مثال

معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که جواب‌های آن ۲ و ۳ باشد.

روش اول: داریم $S = x' + x'' = 2 + 3 = 5$ و $P = x' \times x'' = 2 \times 3 = 6$ ، پس ۲ و ۳ جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 6 = 0$ هستند.

روش دوم: $(x - 2)(x - 3) = 0$ معادله‌ای است که مستقیماً دیده می‌شود ۲ و ۳ جواب‌های آن هستند. این یک معادله‌ی درجه دوم است و پس از انجام عمل ضرب به شکل $x^2 - 5x + 6 = 0$ در می‌آید.



ماکزیم و مینیمم توابع درجه دوم

حل یک مسئله



بیشترین مساحت قطعه زمین مستطیل شکل کنار دریا که می‌توان آن را فقط با ۱۲۰ متر نرده محصور کرد چقدر است؟



برای فهم درست مسئله شکلی مانند بالا رسم می‌کنیم. برای حل مسئله باید تشخیص دهیم چه چیزی را باید به دست آوریم. در اینجا یافتن طول مستطیل برای حل مسئله کافی است. طول این زمین مستطیل شکل را با x نشان

می‌دهیم. پس عرض زمین برابر $\frac{۱۲۰-x}{۲}$ خواهد بود. اگر مساحت این زمین را با A نشان دهیم، داریم:

$$A = x\left(60 - \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 60x$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 120x) = -\frac{1}{2}\left[(x-60)^2 - 3600\right] = -\frac{1}{2}(x-60)^2 + 1800$$

بیشترین مقدار A وقتی است که $x-60=0$ و در نتیجه $x=60$. پس با انتخاب طول 60 متر بیشترین مساحت ساخته می‌شود که برابر ۱۸۰۰ مترمربع خواهد بود.

فعالیت ۷



تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید که در آن $a \neq 0$.

۱- درستی محاسبات زیر را توضیح دهید.

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

۲- اگر $a < 0$ به ازای چه مقداری از x تابع f بیشترین مقدار را خواهد یافت؟

۳- اگر $a > 0$ به ازای چه مقداری از x تابع f کمترین مقدار را خواهد یافت؟



از فعالیت فوق قضیه زیر به دست می آید.

تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ در حالت $a > 0$ به کمترین مقدار (مینیمم) و در حالت $a < 0$ به بیشترین مقدار (ماکزیمم) خود می رسد.



مثال

کمترین مقدار تابع $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ را تعیین می کنیم.

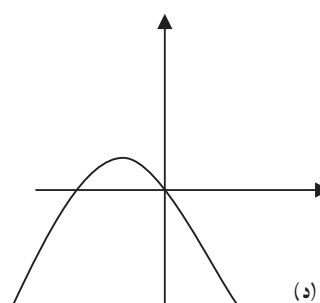
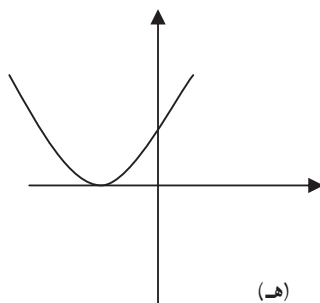
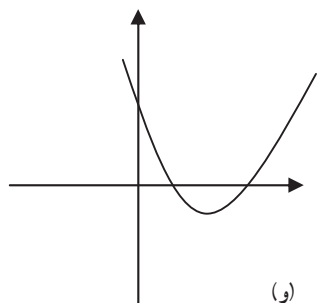
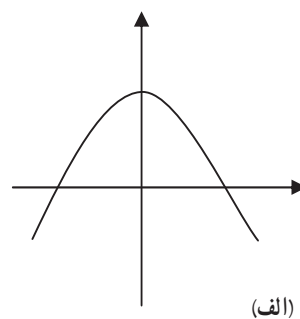
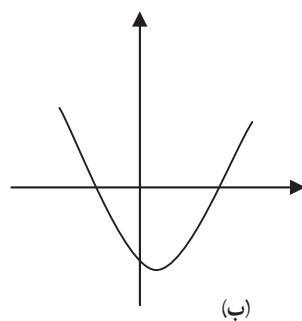
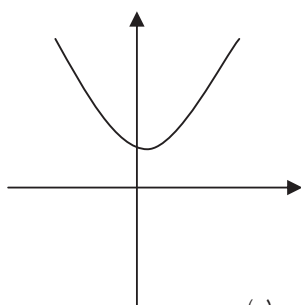
به ازای $x = \frac{12}{6} = 2$ تابع کمترین مقدار را داراست. از آنجا که $f(2) = -7$ ، کمترین مقدار تابع برابر -7 می باشد.

تمرین در کلاس



۱- اگر جمع دو عدد $\frac{7}{6}$ و حاصل ضربشان $\frac{-1}{4}$ باشد آن دو عدد را بیابید.

۲- در هر یک از شکل های زیر سهمی به معادله $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر مورد علامت ضرایب a, b, c و تعداد ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.



۳- نشان دهید در بین مستطیل هایی که محیط شان مقدار ثابتی است، مربع دارای بیشترین مساحت است.



حل یک مسئله



یک معادله چندجمله‌ای با ضرایب صحیح بیابید که $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ یک جواب آن باشد.

عباس: جواب این مسئله بسیار ساده است کافی است معادله‌ی چندجمله‌ای $x - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 0$ را در نظر بگیریم.

معلم: در این چندجمله‌ای اعداد غیر صحیح به کار رفته است و این جواب مسئله نیست.

حسن: ما چگونه می‌توانیم چنین معادله‌ای بسازیم؟

معلم: بهتر است اول در حالت ساده‌تری این مسئله را حل کنید. مثلاً معادله‌ای با ضرایب صحیح بسازید که $\sqrt{2}$ یک جواب

آن باشد.

عباس: ما قبلاً به چنین معادله‌ای برخورد کرده‌ایم. کافی است معادله $x^2 - 2 = 0$ را در نظر بگیریم.

معلم: این معادله را چگونه می‌توانید به دست آورید؟

عباس: کافی است در تساوی $x = \sqrt{2}$ طرفین را به توان ۲ برسانیم. نتیجه می‌شود $x^2 = 2$ و سپس معادله $x^2 - 2 = 0$ به دست

می‌آید.

معلم: بله این روش شما کارساز است. البته توجه دارید که معادله ساخته شده جواب‌های دیگری هم دارد. آیا می‌توانید این

روش را برای حل مسئله اصلی هم به کار برید؟

عباس: بهتر است این روش را آزمایش کنیم. قرار می‌دهیم $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$. با به توان دو رساندن طرفین این تساوی می‌توان

نوشت $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. متأسفانه هنوز اعداد غیر صحیح در معادله جدید وجود دارند.

معلم: بله هنوز اعداد غیر صحیح وجود دارند و باز هم باید عملیات دیگری را انجام دهید.

عباس: فکر می‌کنم باز هم باید روش خود را تکرار کنیم. می‌توان نوشت $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$ و با به توان دو رساندن طرفین این

معادله و ساده کردن آن خواهیم داشت: $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. به نظر می‌رسد این معادله جواب مسئله باشد.

معلم: بله شما به جواب مسئله رسیده‌اید. البته این معادله جواب‌های دیگری هم دارد و خوب است بقیه‌ی جواب‌های این

معادله را هم به دست آوریم. این یک معادله درجه چهار است ولی با در نظر گرفتن $z = x^2$ می‌توان آن را به یک معادله‌ی درجه

دوم بر حسب z تبدیل کرد: $z^2 - 10z + 1 = 0$. با حل این معادله خواهیم داشت: $z = 5 \pm 2\sqrt{6}$. حال با حل دو معادله‌ی

$x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $x^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ خواهیم داشت:

$$x^2 = 5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \Rightarrow x = \pm(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

با همین روش جواب‌های $x = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ برای معادله‌ی دیگر به دست می‌آیند. این معادله دارای چهار جواب است.

در برخی از معادلات با در نظر گرفتن یک متغیر جدید می‌توان آن را به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل کرد.



تمرین در کلاس



معادله $x^2 - 2 = (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1)^4$ را حل کنید.

حل یک مسئله



اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ یک چند جمله‌ای درجه n باشد که $a_0 \neq 0$ و از روی آن چند جمله‌ای درجه n ، $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را بسازیم، آیا رابطه‌ای بین ریشه‌های این دو چند جمله‌ای وجود دارد؟ چند جمله‌ای $Q(x)$ را چند جمله‌ای وارونه $P(x)$ می‌نامند.

یکی از دانش‌آموزان که در مورد چگونگی جواب معادلات چند جمله‌ای فکر کرده بود مسئله بالا برایش مطرح شده بود که آن را با معلم خود در میان گذاشت. معلم نیز این مسئله را برای همه دانش‌آموزان مطرح کرد تا همه درباره آن فکر کنند و راه‌حل‌های خودشان را ارائه کنند.

در جلسه‌ی بعدی درس، معلم از دانش‌آموزان خواست راه‌حل‌های خودشان را ارائه کنند.

علی: به نظر من بهتر است ابتدا در حالت‌های خاص که ساده‌تر است مسئله را بررسی کنیم، مثلاً چند جمله‌ای‌های درجه اول و دوم را بررسی کنیم.

معلم: آفرین، این روش شما کمک زیادی به حل یک مسئله می‌کند. با مشاهده‌ی مسئله در حالت‌های خاص می‌توانیم درک بهتری از جزئیات مسئله پیدا کنیم. حال بگو چه پیشنهادی داری؟

علی: من توانستم حدس بزنم که چه رابطه‌ای بین ریشه‌های دو چند جمله‌ای وجود دارد ولی نتوانستم اثباتی برای آن ارائه کنم.

در حالت چند جمله‌ای‌های درجه اول مانند $P(x) = ax + b$ داریم $Q(x) = bx + a$ و ریشه‌های آن‌ها به ترتیب $-\frac{a}{b}$ و $-\frac{b}{a}$ می‌باشند که وارون یکدیگرند. در حالت چند جمله‌ای‌های درجه‌ی دوم محاسبات پیچیده‌تر بود و نتوانستم فکر خود را تعقیب کنم.

سعید: جالب است اتفاقاً من نیز همین کار را کردم ولی با چند جمله‌ای درجه دوم خاصی که ریشه‌هایشان را می‌دانستم محاسبه کردم و به همین نتیجه رسیدم. من یک چند جمله‌ای ساده مثل $P(x) = (x+3)(x-4)$ را در نظر گرفتم که ریشه‌هایش را از قبل می‌دانستم. اگر آن را به صورت استاندارد بنویسیم داریم: $P(x) = x^2 - x - 12$. بنابراین $Q(x) = -12x^2 - x + 1$ و ریشه‌های آن از دستور کلی معادله‌ی درجه‌ی دوم $\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ خواهند شد.

معلم: هر دو روش کارهای خوبی برای حل مسئله انجام داده‌اند. در هر دو روش این حدس پیش می‌آید که ریشه‌های دو چند جمله‌ای معکوس یکدیگرند. شما می‌توانید این حدس را در مثال‌های دیگری هم بررسی کنید. حال چگونه می‌توانید این مطلب را برای یک چند جمله‌ای دلخواه ثابت کنید؟ ابتدا بهتر است حدس خود را به شکل دقیق‌تری بیان کنید. مثلاً برای دو چند جمله‌ای

$P(x) = ax^2 + bx + c$ و $Q(x) = cx^2 + bx + a$ اگر r یک ریشه‌ی $P(x)$ باشد باید تحقیق کنیم که آیا $\frac{1}{r}$ یک ریشه $Q(x)$ می‌شود؟



علی: پس باید از $P(r) = 0$ بتوانیم نتیجه بگیریم $Q(\frac{1}{r}) = 0$. اما اگر صفر یک ریشه $P(x)$ باشد چنین نتیجه‌گیری امکان‌پذیر نخواهد بود.

معلم: لابد صفر نمی‌تواند ریشه $P(x)$ شود. آیا می‌توانید این مطلب را بررسی کنید؟

سعید: درست است صفر نمی‌تواند ریشه $P(x)$ باشد، زیرا $P(0) = a_0 \neq 0$.

معلم: حالا که مطمئن شدید $P(x)$ ریشه صفر ندارد، سعی کنید از فرض $P(r) = 0$ حکم $Q(\frac{1}{r}) = 0$ را به دست آورید.

عباس: پس فرض کنیم $P(r) = ar^2 + br + c = 0$ اکنون می‌خواهیم $Q(\frac{1}{r})$ را به دست آوریم.

$$Q(\frac{1}{r}) = c(\frac{1}{r})^2 + b(\frac{1}{r}) + a = \frac{c + br + ar^2}{r^2} = \frac{P(r)}{r^2} = 0$$

معلم: آفرین، محاسبه را به درستی انجام دادی. انجام این محاسبه در حالت کلی هم چندان مشکل نیست.

اگر r ریشه‌ای از چندجمله‌ای $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = P(x)$ باشد آن‌گاه $P(r) = 0$ بنابراین:

$$Q(\frac{1}{r}) = a_0 (\frac{1}{r})^n + a_1 (\frac{1}{r})^{n-1} + \dots + a_{n-1} (\frac{1}{r}) + a_n$$

$$= \frac{1}{r^n} (a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_{n-1} r^{n-1} + a_n r^n) = \frac{1}{r^n} P(r) = 0$$

بنابراین $\frac{1}{r}$ ریشه‌ی $Q(x)$ است.

علی: آیا عکس مطلب هم درست است اگر s ریشه‌ای از $Q(x)$ باشد آیا می‌توان گفت $P(\frac{1}{s}) = 0$ ؟

معلم: این مطلب بدیهی است زیرا اگر از چندجمله‌ای $Q(x)$ شروع کنیم و چندجمله‌ای وارون آن را بسازیم همان $P(x)$ می‌شود.

برهان نهایی این مسئله مانند یک مبحث ریاضی مختصر و رسمی است و نتایج نهایی فرایند فکر ما را نمایش می‌دهد. ولی مطلب مهم آن است که بدانیم با یک مسئله چگونه برخورد کنیم و راه‌حل‌های خود را به دست آوریم؟ اگر به شیوه‌های کار توجه کنید کاری که ما انجام دادیم آزمایش حالت‌های خاص به منظور دیدن یک الگو برای برهان یک مسأله‌ی کلی بود. از این روش در حل بسیاری از مسائل می‌توان استفاده کرد.

تمرین در کلاس



با استفاده از فرمول جواب‌های دو معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ و $cx^2 + bx + a = 0$ به دست‌آورد و نشان دهید جواب‌های آن‌ها عکس یکدیگرند.