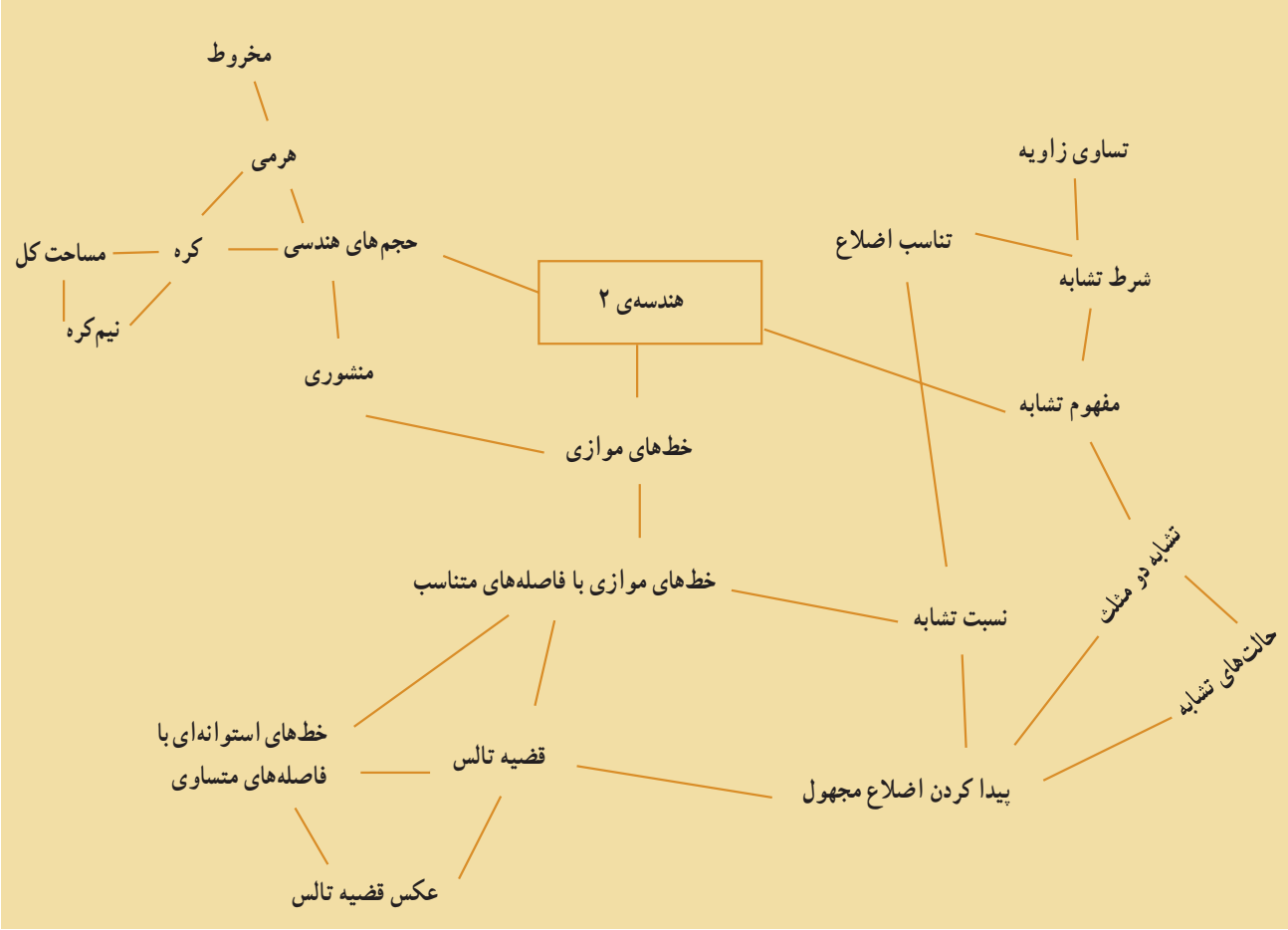
فصل ششم

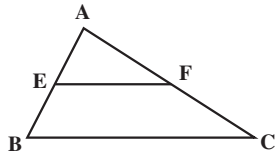
هندسه‌ی ۲

فصل آخر کتاب مجدداً به هندسه مربوط می‌شود. قسمت اول آن که به قضیه‌ی تالس و تشابه مربوط می‌شود، برای دانش‌آموزان تازگی دارد. مبحث حجم نیز ادامه‌ی درس حجم در کلاس دوم راهنمایی است اما موضوعات آن با موضوعات کلاس دوم تفاوت دارد. کتاب ریاضی سال دوم به بررسی حجم‌های منشوری می‌پردازد اما در این قسمت، حجم‌های هرمی و کروی آموزش داده می‌شوند. همچنین، در این فصل رسم ۶ وجود دارد. در پایان نیز تمرین دوره‌ای به یادآوری و تمرین همه‌ی مطالب کتاب می‌پردازد. لازم است برای آماده کردن دانش‌آموزان جهت امتحان نهایی، به این تمرین‌ها پاسخ داده شود. مفاهیم و محتوای این فصل به صورت زیر باهم در ارتباط‌اند.



موضوع قضیه‌ی تالس و تشابه، در قسمت‌های زیادی در واقع به یک مفهوم تبدیل می‌شوند ؛ برای مثال، در شکل صفحه‌ی بعد و با استفاده از رابطه‌ی تالس، می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$



همین‌طور، با استفاده از تشابه در مثلث AEF و ABC می‌توانیم تساوی مربوط به تناسب اضلاع دو مثلث را بنویسیم که دقیقاً همان تساوی گفته شده به‌دست می‌آید.

در قسمت حجم، علاوه بر ارتباطی که این درس با درس حجم در کتاب ریاضی دوم راهنمایی دارد، می‌توان به این موضوع اشاره کرد که با توجه به درس عبارت‌های جبری، بهتر است روابط محاسبه‌ی حجم و مساحت را به کمک عبارت‌های جبری بیان کنیم ؛ برای مثال، حجم کره‌ای به شعاع r را با V نشان می‌دهیم و می‌نویسیم : $V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$. بهتر است درحل مسائل به دانش‌آموزان یاد دهیم که چگونه روابط را بنویسند و قسمت‌های مجهولی موردنظر مسئله را به کمک معادله یا پیدا کردن تعداد یک عبارت جبری به‌دست آورند.

زمان‌بندی

فروردین ماه

هفته‌ی سوم: خط‌های متوازی با فاصله‌های متساوی ــ تقسیم پاره‌خط به قطعات مساوی

هفته‌ی چهارم: قضیه‌ی تالس ــ پیدا کردن ضلع مجهول و عکس قضیه‌ی تالس

اردیبهشت ماه

هفته‌ی اول: شکل‌های متشابه مفهوم تشابه و نسبت تشابه

هفته دوم: تشابه دو مثلث و حل کردن مسئله‌ها

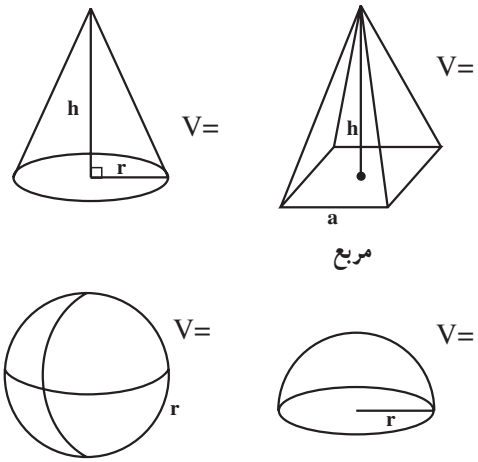
هفته سوم: یادآوری حجم ــ هرم ــ مخروط

هفته‌ی چهارم: کره ــ رسم۶، تمرین دوره‌ای ۲

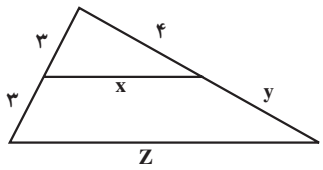
نکته‌ی مهم در پایان سال این است که آموزش حتماً تا هفته‌های پایانی اردیبهشت ماه ادامه یابد. بعضی از معلمان آموزش‌ها را سریع به پایان می‌رسانند و در اردیبهشت ماه فقط به دوره کردن می‌پردازند. این، روش خوبی نیست و کیفیت آموزش را پایین می‌آورد. در صورتی که آموزش کیفیت مناسبی داشته باشد، به این حجم از دوره کردن نیازی نیست. البته خوب است که در دو هفته‌ی پایانی، ضمن حل کردن تمرین‌های دوره‌ای و چند نمونه سؤال امتحان نهایی، دانش‌آموزان را برای امتحانات نهایی آماده کنیم.

نمونه‌ی سؤال برای مشخص کردن ارتباط‌ها

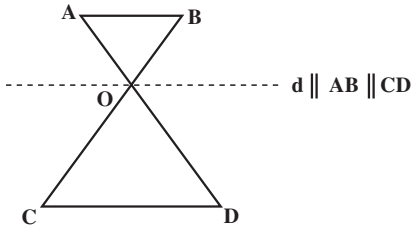
۱ــ حجم شکل‌ها را با V نمایش دهید و دستور محاسبه حجم را با یک عبارت بنویسید.



۲ــ ضلع‌های مجهول را پیدا کنید.



۳ــ AB∥CD است ؛ تناسب اضلاع را به دو صورت (با استفاده از خطوط موازی و تشابه) بنویسید.



خطوط موازی و قضیه‌ی تالس

موضوعات در یک نگاه

درس با خط‌های موازی با فاصله‌های مساوی شروع می‌شود و به خط‌هایی با فاصله‌های مناسب تعمیم می‌یابد. به دنبال آن، قضیه‌ی تالس مطرح می‌شود و تساوی نسبت‌هایی که از قضیه‌ی تالس به‌دست می‌آیند نتیجه‌گیری می‌شود. سپس، با تعمیم قضیه‌ی تالس، کاربرد آن در پیدا کردن ضلع‌های مجهول و با مطرح کردن عکس قضیه‌ی تالس، نحوه‌ی بررسی موازی بودن خط‌ها آموزش داده می‌شود.

اهداف

در فرایند آموزش این درس، انتظار می‌رود هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر برسد.

۱ــ قضیه‌ی خط‌های متوازی با فاصله‌های مساوی را درک کند و آن را در حل مسئله‌ها و پیدا کردن ضلع‌های مجهول به‌کار برد.

۲ــ با استفاده از قضیه‌ی یاد شده، پاره‌خط داده شده را به قسمت‌های مساوی تقسیم کند.

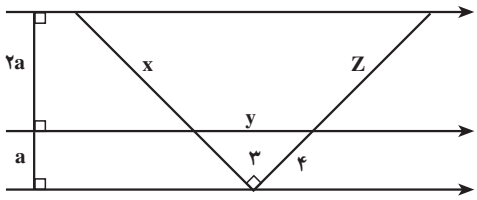
۳ــ قضیه‌ی تالس را درک کند و نتایج آن را به‌صورت تساوی نسبت‌ها بنویسد.

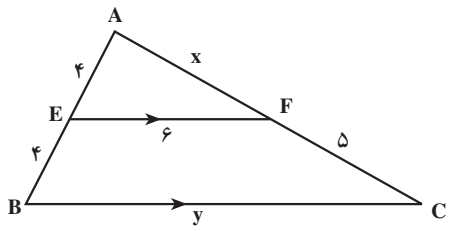
۴ــ قضیه‌ی تالس را برای پیدا کردن ضلع‌های مجهول به‌کار برد.

۵ــ از عکس قضیه‌ی تالس برای بررسی موازی بودن خطوط استفاده کند.

نمونه‌ی سؤال برای ارزش‌یابی

۱ــ در شکل‌های زیر، اندازه‌ی ضلع مجهول را پیدا کنید.





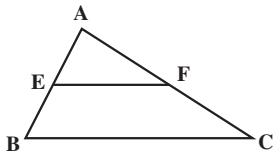
۲ــ با توجه به شکل و اندازه‌های داده شده، آیا EF∥BC است؟

AE = ۱/۲

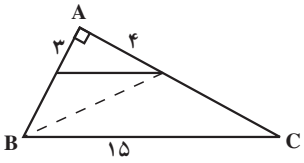
AF = ۲/۲

EB = ۲

FC = ۳



۳ــ با توجه به شکل، اندازه‌ی BF را پیدا کنید.



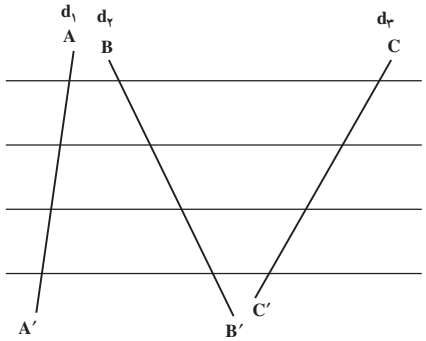
شناسنامه‌ی مبحث خطوط موازی و قضیه تالس

درس‌ها	صفحات	مفاهیم و محتوا	هدف‌ها	فعالیت‌ها	پیش‌بینی امکانات	واژگان
خط‌های متوازی با فاصله‌های متساوی	۱۲۷ ۱۲۸	قضیه‌ی خط‌های موازی با فاصله‌های مساوی	ــ قضیه‌ی خط‌های متوازی با فاصله‌های متساوی را درک و درستی آن را ثابت کند. ــ ازقضیه بالا در حل مسائل استفاده کند.	ــ مطالعه‌ی متن در مورد خط‌های متوازی ــ انجام دادن کار در کلاس برای به‌کار بردن قضیه	خط‌کش	متوازی متساوی
تقسیم پاره‌خط به قطعات تساوی	۱۲۹ ۱۳۰	تقسیم پاره‌خط	ــ با استفاده از قضیه‌ی فوق، پاره‌خط داده شده را به قسمت‌های متساوی تقسیم کند.	ــ مطالعه‌ی متن درس ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین تقسیم پاره‌خط	خط‌کش پرگار	ــ
قضیه‌ی تالس	۱۳۱ ۱۳۲ ۱۳۳ ۱۳۴	قضیه تالس تعمیم قضیه عکس قصیه	ــ مفهوم قضیه‌ی تالس را درک کند و نسبت‌ها را نتیجه بگیرد. ــ عکس قضیه‌ی تالس را درک کند وبرای بررسی موازی بودن دو خط به‌کار برد. ــ تعمیم قضیه‌ی تالس را در یک مثلث درک کند و نسبت‌ها را نتیجه بگیرد ــ از قضیه‌ی تالس و تعمیم آن برای حل مسائل و پیدا کردن ضلع مجهول استفاده کند.	ــ مطالعه‌ی متن در مورد قضیه‌ی تالس ــ انجام دادن کار درکلاس برای نوشتن نسبت‌های مساوی ــ مطالعه‌ی متن درمورد عکس قضیه‌ی تالس ــ انجام کار در کلاس درخصوص بررسی موازی بودن خطوط ــ مطالعه‌ی متن درخصوص تعمیم قضیه‌ی تالس ــ انجام کار درکلاس برای پیدا کردن ضلع مجهول	خط‌کش	قضیه‌ی تالس عکس قضیه

خط‌های متوازی با فاصله‌های متساوی

ایجاد انگیزه کنید:

با توجه به شکل، سه نفر در نقاط A و B و C قرار گرفته‌اند و می‌خواهند به ترتیب روی خطوط d_1 و d_2 و d_3 حرکت کنند و به ترتیب به نقاط A' و B' و C' برسند. اگر سرعت آن‌ها یکسان باشد، کدام‌یک زودتر می‌رسد؟ چرا؟ اگر سرعت آن‌ها یکسان نباشد، کدام‌یک از آن‌ها باید سرعت بیش‌تری داشته باشد تا برنده شود؟ چرا؟



هدف فعالیت:

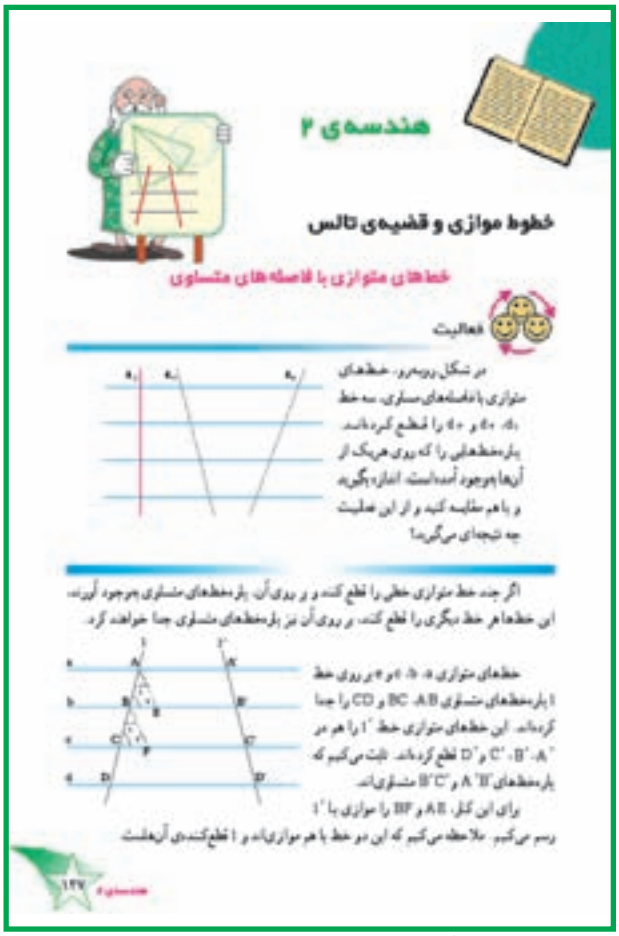
دانش‌آموزان با توجه به اندازه‌گیری طول پاره‌خط‌ها، می‌توانند به تجربه دریابند که هرگاه خطوطی، خطوط موازی را قطع کنند، طول پاره‌خط‌هایی که روی هریک از خطوط ایجاد می‌شود، مساوی است.

شروع کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید متن فعالیت را بخوانند و با اندازه‌گیری پاره‌خط‌ها به نتیجه‌ی موردنظر برسند. آن‌ها درمی‌یابند که هرگاه خطوط موازی متحدالفاصله را خطوط دیگری مانند d_1 و d_2 و d_3 قطع کنند، روی هریک از آن‌ها پاره‌خط‌های مساوی پدید می‌آید.

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ به دلیل متفاوت بودن خط‌کش‌ها و خطاهای موجود روی خط‌کش، ممکن است جواب دانش‌آموزان متفاوت دربیاید. این مطلب مهم نیست؛ آنچه مهم است، طول‌های یکسان بین


هندسه‌ی ۲

خطوط موازی و قضیه‌ی تالس

خط‌های متوازی با فاصله‌های متساوی

فعالیت

در شکل روبه‌رو، خط‌های موازی با فاصله‌های مساوی، سه خط d_1، d_2 و d_3 را قطع کرده‌اند. پاره‌خط‌هایی را که روی هریک از آن‌ها به‌وجود آمده‌است، اندازه‌بگیرید و با هم مقایسه کنید و از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اگر چند خط موازی خطی را قطع کنند و بر روی آن، پاره‌خط‌های متساوی به‌وجود آورند، این خط‌ها هر خط دیگری را قطع کنند، بر روی آن نیز پاره‌خط‌های متساوی جدا خواهند کرد.

خط‌های متوازی a، b، c و d بر روی خط l پاره‌خط‌های متساوی AB، BC و CD را جدا کرده‌اند. این خط‌های متوازی خط l' را هم در A'، B'، C' و D' قطع کرده‌اند. ثابت می‌کنیم که پاره‌خط‌های $A'B'$ و $B'C'$ متساوی‌اند.

برای این کار، AE و BF را موازی با l' رسم می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که این دو خط با هم موازی‌اند و l قطع‌کننده‌ی آن‌هاست.

۱۲۷

خطوط برای هریک از خطوط d_1 و d_2 و d_3 می‌باشد.

۲ــ دانش‌آموزان به غلط تصور می‌کنند طول‌هایی که روی سه خط به‌وجود می‌آید، با هم برابرند. تأکید کنید که پاره‌خط‌های روی d_1 با هم، پاره‌خط‌های روی d_2 با هم و پاره‌خط‌های روی d_3 با هم برابرند.

۳ــ از بعضی از دانش‌آموزان بخواهید که نتیجه‌ی به‌دست آمده را تکرار کنند.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

۱ــ توانایی بیان نتیجه‌ی به‌دست آمده را با جملات خود ندارند.

۲ــ تصور می‌کنند که همه‌ی پاره‌خط‌های روی خطوط d_1 و d_2 و d_3 با هم برابرند.

ادامه دهید:

با توجه به متن کتاب در صفحه‌ی ۱۲۷، علّت درستی نتیجه‌ی به‌دست آمده را قدم به قدم روی تخته توضیح دهید.

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ برای دانش‌آموزان توضیح دهید که وقتی از کلمه به همین ترتیب استفاده می‌کنیم، روند اثبات مانند قبل است و احیاناً فقط حروف آن تغییر کرده است.

۲ــ یادآوری تعریف متوازی‌الاضلاع و خواص آن توصیه می‌شود.

۳ــ دو خط l و l′ را چنان رسم کنید که به وضوح $AB \neq A'B'$ باشد.

هدف کار در کلاس:

در تمرین ۲ کار در کلاس، دانش‌آموزان به این حکم هم می‌رسند که اگر خطی از وسط یک ضلع مثلث، موازی ضلع دیگر رسم شود، از وسط ضلع مقابل به آن می‌گذرد.

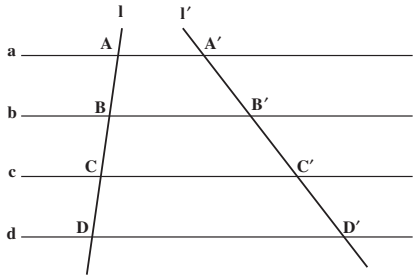
فعالیت موازی:

۱ــ فعالیت زیر بعد از فعالیت داده شده در کتاب، پیشنهاد می‌شود چهار خط موازی a و b و c و d خط l را چنان قطع کرده‌اند که $AB = BC = CD$.

الف) از نقطه‌ی A و B موازی l′ رسم کنید و محل برخورد آن‌ها را به ترتیب، خطوط b و C و E و F بنامید.

ب) چرا دو مثلث ABE و BCF مساوی‌اند؟

پ) چرا چهارضلعی‌های AA′B′E و BB′C′F متوازی‌الاضلاع هستند؟



ت) با توجه به مطالب بالا نشان دهید که $A'B' = B'C'$ است.

ث) آیا می‌توان نوشت $A'B' = B'C' = C'D'$ ؟ چرا؟

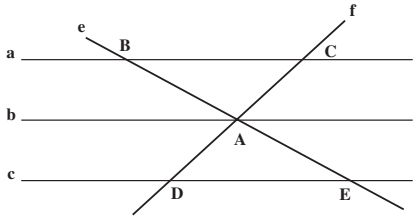
از فعالیت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲ــ از دانش‌آموزان بخواهید خطوط موازی را خطوط دقیق‌تر خود فرض کنند ؛ چند خط مورب با شیب‌های متفاوت بکشند و مجدداً فعالیت مطرح شده در کتاب را تجربه کنند.

توسعه:

۱ــ خطوط a و b و c موازی و متحدالفاصله‌اند. علت تساوی دو مثلث ABC و ADE را بنویسید.

۲ــ دانش‌آموزان می‌توانند مشابه خاصیت فوق را در خطوط دایره‌ای موازی پیدا کنند.



فعالیّت خارج از کلاس:

از دانش‌آموزان بخواهید در اطراف خود یا روی نقشه، دسته خطوط موازی پیدا کنند.

تقسیم پاره‌خط به قطعات متساوی

ایجاد انگیزه کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید در دفتر خود یک پاره‌خط ۵ سانتی‌متری رسم کنند و آن را به ۷ قسمت مساوی تقسیم کنند. بر این نکته تأکید کنید که می‌خواهیم دقیقاً ۷ قسمت مساوی داشته باشیم. درباره‌ی روش‌های پیشنهادی بحث کنید و اشکالات آن‌ها را مطرح کنید.

شروع کنید:

با توجه به متن کتاب، پاره‌خط دلخواه AB را روی تخته رسم کنید و روش تقسیم پاره‌خط‌ها به ۵ قسمت را برای دانش‌آموزان توضیح دهید.

بپرسید!

۱ــ آیا هر پاره‌خط با هر اندازه‌ای را می‌توان به دو قسمت مساوی تقسیم کرد؟

۲ــ آیا مهم است که نیم‌خطی که رسم می‌کنیم، با پاره‌خط‌ها چه زاویه‌ای بسازد؟ آیا انتخاب زاویه‌ی مناسب کار رسم را تسهیل می‌کند؟چرا؟

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ به عنوان یک کاربرد، می‌توانید به دسته خطوط موازی متحدالفاصله اشاره کنید.

۲ــ توضیح دادن زاویه‌ای که An با AB می‌سازد، مهم نیست.

۳ــ برای تقسیم‌بندی روی Ax، می‌توان از خط‌کش با طول‌های مشخص ۱cm استفاده کرد یا به کمک پرگار پاره‌خط‌های روی Ax را جدا کرد.

۴ــ هرچه فاصله‌ی تقسیم‌ها کمتر باشد، رسم کردن خطوط موازی راحت‌تر است.

۵ ــ در بیان روش توضیح دهید که روش کار مهم است و شما برای رسم دقیق خطوط موازی، می‌توانید از معلومات گذشته‌ی خود استفاده کنید.


تقسیم پاره‌خط به قطعات متساوی

اگر بخواهیم پاره‌خط AB را به قسمت‌های متساوی ـ مثلاً به پنج قسمت متساوی ـ تقسیم کنیم، چنین عمل می‌کنیم:
ابتدا نیم‌خط AX را رسم می‌کنیم و با شروع از نقطه‌ی A، پنج پاره‌خط متساوی پشت‌سرهم روی آن جدا می‌کنیم؛ سپس، آخرین نقطه را به B وصل می‌کنیم و از سایر نقاط، خطوطی موازی با آن رسم می‌کنیم. این پاره‌خط‌ها AB را به پنج قسمت متساوی تقسیم می‌کنند.

کار در کلاس

۱ــ به روش دیگری هم می‌توان یک پاره‌خط را به قسمت‌های متساوی تقسیم کرد؛ مثلاً، برای تقسیم کردن پاره‌خط AB به پنج قسمت متساوی، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:
از A و B دو نیم‌خط متوازی رسم می‌کنیم و با شروع از A و B به‌دنبال هم، پنج پاره‌خط متساوی روی هر یک از آن‌ها جدا می‌کنیم؛ سپس، نقاط به‌دست آمده روی دو نیم‌خط را به‌ترتیب وصل می‌کنیم. خط‌های رسم شده متوازی‌اند.
چرا این خط‌های متوازی، پاره‌خط AB را به قسمت‌های متساوی تقسیم می‌کنند؟ چون خطوط موازیند و بر روی Ax و By پاره‌خط‌های متساوی پدید آورده‌اند، پس روی AB نیز پاره‌خط‌های متساوی پدید می‌آورند.

۲ــ AB را به سه قسمت متساوی تقسیم کنید.

۳ــ پاره‌خط MN را به دو قسمت تقسیم کنید؛ طوری که یکی از قسمت‌ها دو برابر قسمت دیگر باشد.

۱۲۹

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

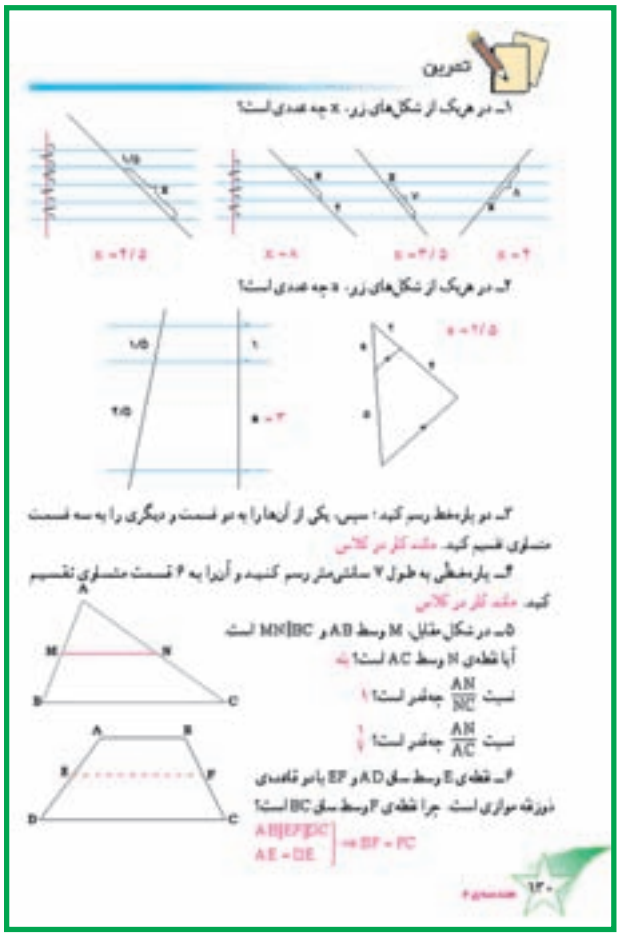
۱ــ دانش‌آموزان تصور می‌کنند که اگر نیم‌خط Ax را رسم کردند، باید از همه‌ی قسمت‌های منحنی انتهای ظاهری آن استفاده کنند. برای آن‌ها توضیح دهید اگر ما می‌توانستیم روی Ax این قسمت‌ها را جدا کنیم، از ابتدا روی AB این کار را می‌کردیم؛ پس، تنها قسمتی از Ax کافی است.

۲ــ برای دانش‌آموزان توضیح دهید که در تقسیم یک پاره‌خط به دو قسمت، تنها یک نقطه و برای تقسیم آن به پنج قسمت، تنها چهار نقطه کافی است.

هدف کار در کلاس:

در تمرین ۱ کار در کلاس، روش دیگری برای تقسیم پاره‌خط به قسمت‌های مساوی پیشنهاد شده است. مطابق این روش، تنها رسم دو خط موازی Ax||By کافی است.

در تمرین ۲ و ۳ روش تقسیم پاره‌خط، قسمت‌های نابرابر



نیز توضیح داده شده است.

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ برای دانش‌آموزان توضیح دهید که وقتی یک پاره‌خط را می‌خواهیم به گونه‌ای تقسیم کنیم که یکی سه برابر دیگری باشد، در واقع باید آن را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنیم.

۲ــ در مورد دو روش مطرح شده برای تقسیم پاره‌خط به قسمت‌های مساوی در کلاس گفت وگو کنید و محاسن و معایب هریک را به بحث بگذارید.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

اگر از دانش‌آموزان بخواهیم که پاره‌خطی را به دو قسمت چنان تقسیم کنند که یکی ۵ برابر دیگری باشد، تصور می‌کنند که باید پاره‌خط ۵ قسمت شود.

توصیه‌های آموزشی:

در تمرین ۶ بر این نکته تأکید کنید که اگر خطی از وسط یک ساق ذوزنقه، به موازات قاعده‌های آن رسم شود، از وسط ساق دیگر ذوزنقه می‌گذرد.

طرح این فعالیت بعد از مبحث ایجاد انگیزه، توصیه می‌شود.

فعالیت موازی:

۱ــ پاره خط دلخواهی رسم کنید و آن را AB بنامید.

ــ نیم‌خط دلخواه Ax را رسم کنید.

ــ روی نیم‌خط Ax با شروع از A، ۵ قسمت مساوی جدا کنید. چه روش‌هایی پیشنهاد می‌کنید؟

ــ از آخرین نقطه‌ی به‌دست آمده به B (سر دیگر پاره‌خط AB) وصل کنید.

ــ از دیگر نقاط به‌دست آمده، موازی این پاره‌خط را رسم کنید.

ــ بدین ترتیب، پاره‌خط AB به ۵ قسمت تقسیم می‌شود. تحقیق کنید که آیا این پاره‌خط‌ها مساوی‌اند.

با توجه به فعالیت ذکر شده، برای تقسیم کردن یک پاره‌خط به قسمت‌های مساوی پیشنهاد بدهید.

۲ــ پاره‌خط AB را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید؛ برای این منظور، چند نقطه روی AB می‌گذارید؟

A ├──────────┤ B

ــ پاره‌خط AB را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید؛ برای این منظور، چند نقطه روی AB می‌گذارید؟

A ├──────────┤ B

جدول زیر را کامل کنید.

تعداد نقاط روی پاره‌خط AB	۱	۲	۳	...	۱۰۰	...	n
تعداد قسمت‌های روی AB	۲	۳	۴		...		...

توسعه:

۱ــ پاره‌خط AB را به نسبت‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۵ تقسیم کنید.

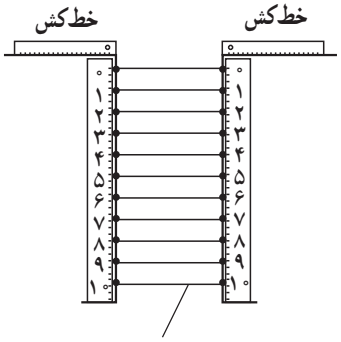
۲ــ پاره‌خط AB را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که $CD = ۳DB$ و $AC = \frac{۱}{۲}CD$ باشد.

۳ــ با استفاده از مطالب فراگرفته شده، در این قسمت مثلاً $۳\frac{۱}{۳}$ را به‌طور دقیق روی محور نشان دهید.

فعّالیّت خارج از کلاس:

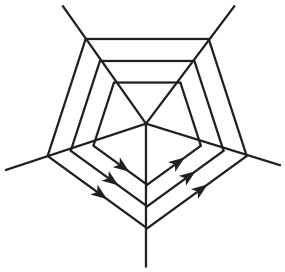
از دانش‌آموزان بخواهید وسیله‌ی زیر را بسازند.

ساخت این وسیله یا فکر کردن درباره‌ی چگونگی عملکرد آن برای برخی از دانش‌آموزان مفید است. دانش‌آموزان با این وسیله می‌توانند هر پاره‌خطی را حداکثر به ۱۰ قسمت تقسیم کنند.

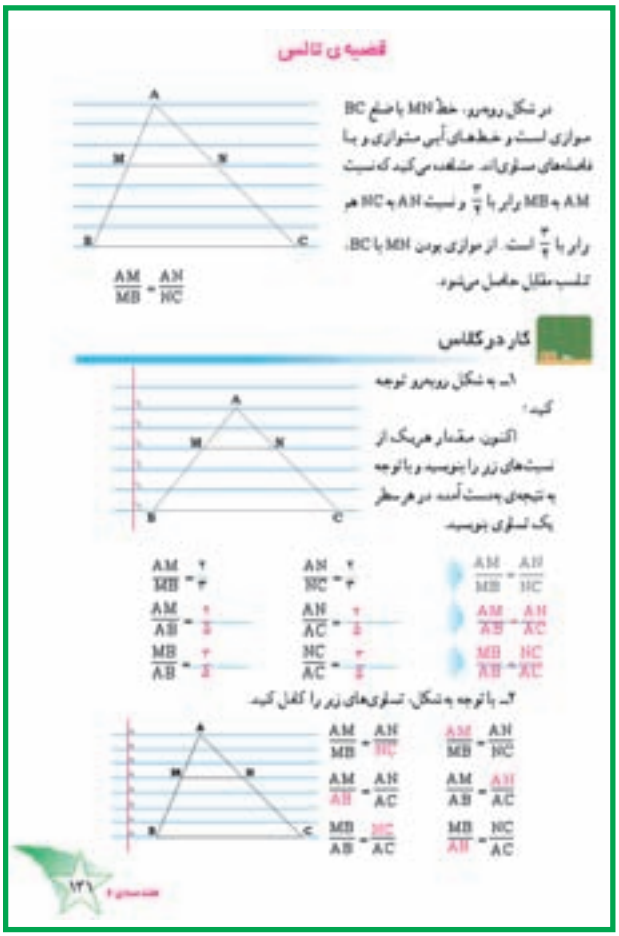


استفاده از ابزار و تکنولوژی:

با استفاده از یک نرم‌افزار ساده، می‌توان یک تار عنکبوت رسم کرد.



یادداشت معلم



قضیه‌ی تالس

در شکل روبه‌رو، خط MN با ضلع BC موازی است و خط‌های آبی موازی و با فاصله‌های مساوی‌اند. مشاهده می‌کنید که نسبت AM به MB برابر با $\frac{3}{2}$ و نسبت AN به NC هم برابر با $\frac{3}{2}$ است. از موازی بودن MN با BC، تناسب مقابل حاصل می‌شود.

$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

کار در کلاس

۱ــ به شکل روبه‌رو توجه کنید.

اکنون مقدار هریک از نسبت‌های زیر را بنویسید و با توجه به نتیجه‌ی بدست آمده در هر سطر یک تساوی بنویسید.

$\frac{AM}{MB} = \frac{2}{4}$ ، $\frac{AN}{NC} = \frac{2}{4}$ ، $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

$\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

$\frac{MB}{AB} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{NC}{AC} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$

۲ــ با توجه به شکل، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ، $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ، $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

$\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$ ، $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$

قضیه‌ی تالس

ایجاد انگیزه کنید:

شکل رسم شده در متن کتاب را روی تخته رسم کنید. به دانش‌آموزان بگویید: «همان‌طور که قبلاً نیز احساس کردید، بین تکه‌هایی که خطوط موازی روی AB پدید می‌آورند و تکه‌هایی که روی AC به‌وجود می‌آورید، ارتباط وجود دارد. این ارتباط چیست؟

شروع کنید:

نظریات دانش‌آموزان را جمع‌بندی کنید و با توجه به متن کتاب، تناسب لازم را بنویسید.

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ برای دانش‌آموزان توضیح دهید که وقتی می‌نویسیم: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$، ممکن است در حالت کلی AM و AN مساوی نباشند. همچنین، ممکن است MB و NC نیز مساوی نباشند امّا نسبت دو کسر مساوی است؛ برای مثال $\frac{6}{12} = \frac{12}{4}$ ولی $2 \neq 6$ و $4 \neq 12$ است.

۲ــ به ارتباط این قسمت و قسمت‌های قبلی اشاره کنید.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

دانش‌آموزان چنین تصور می‌کنند که وقتی می‌نویسند $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$، $AM = AN$ و $MB = NC$ است.

هدف کار در کلاس:

دانش‌آموزان در تمرین ۱ کار در کلاس با یک استنتاج منطقی به صورت مثال به تساوی بین دو نسبت مورد بحث می‌رسند و در تمرین۲، با داشتن سه جزء تناسب، جزء چهارم را می‌نویسند.

ادامه دهید:

با توجه به متن کتاب، صورت قضیه‌ی تالس و عکس آن را برای دانش‌آموزان بیان کنید.

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ برای دانش‌آموزان توضیح دهید که اثبات قضیه‌ی تالس را در سال‌های دبیرستان می‌خوانند و امسال آن را به‌طور تجربی فرا می‌گیرند.

۲ــ از بعضی از دانش‌آموزان بخواهید صورت قضیه‌ی تالس را بیان کنند.

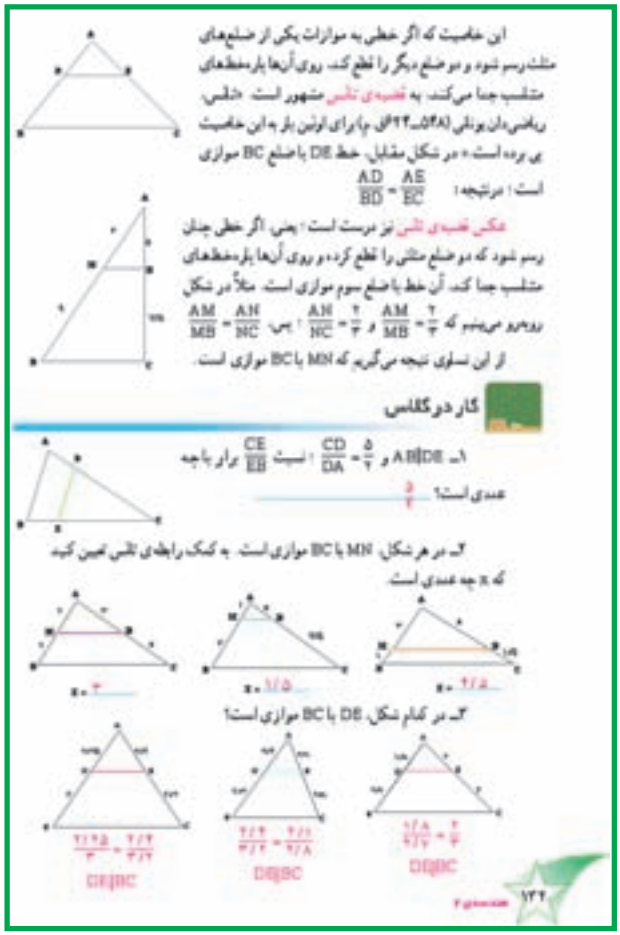
هدف کار در کلاس:

دانش‌آموزان در تمرین ۲ با نوشتن رابطه‌ی مناسب، جزء چهارم تناسب را به‌دست می‌آورند. در تمرین ۳، عکس قضیه‌ی تالس را تحقیق می‌کنند.

توصیه‌های آموزشی:

برای دانش‌آموزان توضیح دهید که اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ باشد، باید $ad = bc$ باشد.

پس برای حل کردن تمرین ۳ کار در کلاس، بعد از نوشتن تناسب لازم، اگر حاصل‌ضرب طرفین با حاصل‌ضرب وسطین



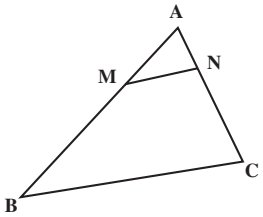
مساوی شود، دو خط موازی‌اند.

ادامه دهید:

با توجه به متن کتاب صفحه‌ی ۱۳۳، صورت قضیه را برای دانش‌آموزان توضیح دهید و آن را روی تخته اثبات کنید.

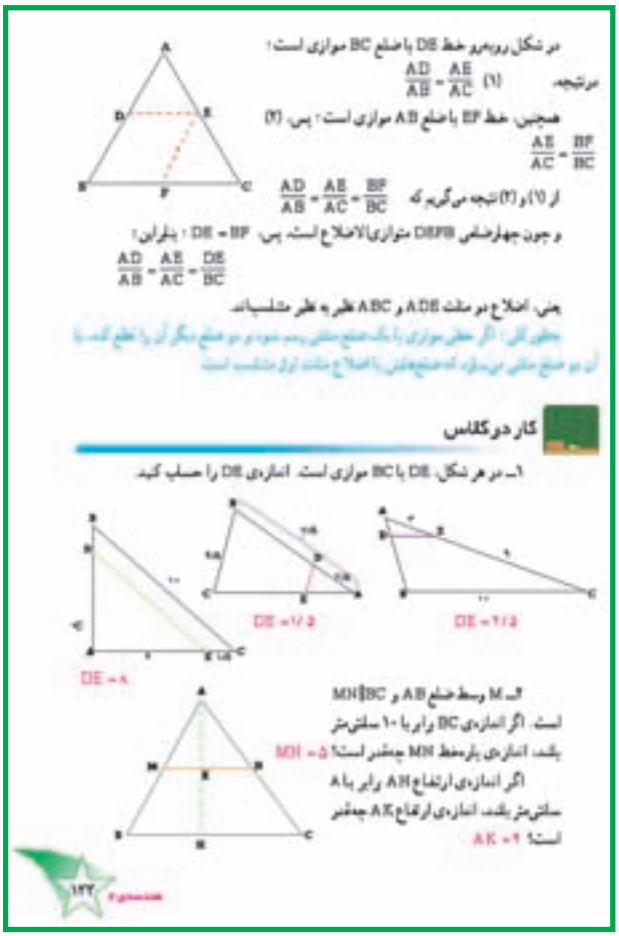
توصیه‌های آموزشی:

بر این نکته تأکید کنید که تناسب به‌دست آمده در واقع نسبت بین اضلاع دو مثلث است و زمانی می‌توانیم نسبت سوم را بنویسیم که دو نسبت دیگر نسبت بین اضلاع مثلث باشد. شکل زیر را رسم کنید و تناسب‌های ممکن را بنویسید.



ضلع‌های مثلث AMN

۱ $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$



ضلع‌های مثلث ABC

۲ $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

۳ $\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}$ ۴ $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$

در حالت‌های ۲ و ۳ و ۴ اضافه کردن $\frac{MN}{BC}$ به تناسب مجاز نیست ؛ زیرا آن‌ها نشان دهنده‌ی اضلاع مثلث نیستند.

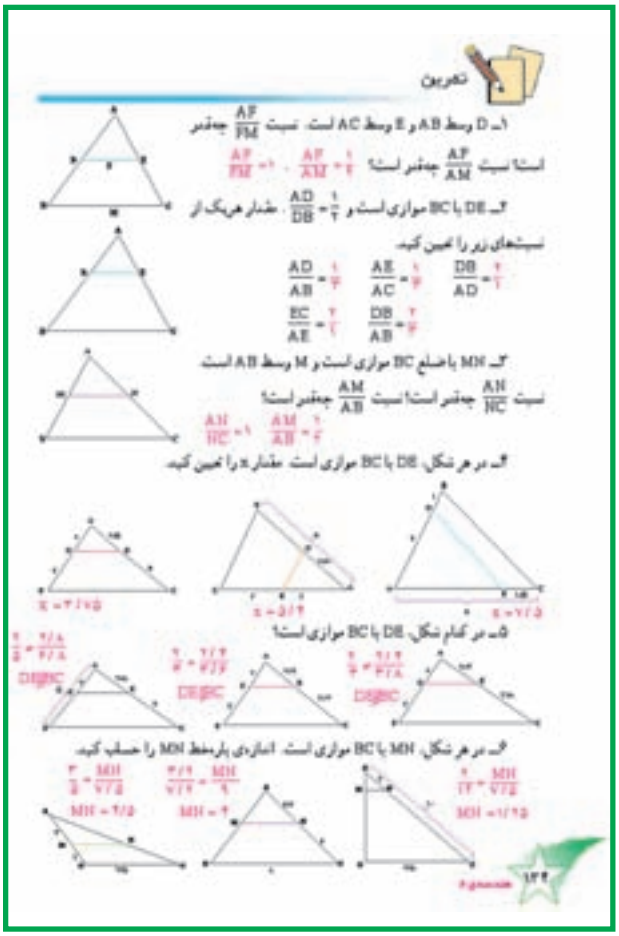
اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

در مواردی که اضلاع موازی در دو مثلث مجهول‌اند، اغلب، تناسب درست را نمی‌نویسند.

هدف کار در کلاس:

تمرین ۱ کار درکلاس، تمرین نوشتن تناسب بین اضلاع مثلث است و در تمرین ۲، دانش‌آموزان به این نتیجه می‌رسند که می‌توانند تناسب فوق را به هر پاره‌خط محدود به نقطه‌ی A و پاره‌خط BC تعمیم دهند.

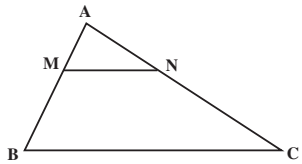
طرح فعالیت‌های زیر بعد از ایجاد انگیزه در هر قسمت



پیشنهاد می‌شود.

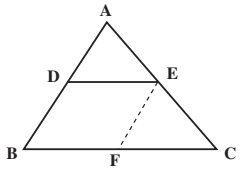
فعالیت موازی:

۱ــ در شکل زیر، $MN \parallel MB$ رسم شده است. طول AM و MB و AN و NC را اندازه بگیرید. نسبت $\frac{AM}{MB}$ و $\frac{AN}{NC}$ را بنویسید؛ چه ارتباطی بین این نسبت‌ها برقرار است؟



۲ــ در مثلث ABC و $DE \parallel BC$ است.

ــ از نقطه‌ی E موازی پاره‌خط AB رسم کنید. محل برخورد آن را با BC، F بنامید.



ــ در جای خالی، نام پاره‌خط‌های مناسب را بنویسید.

$$\left.\begin{array}{l} DE \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \underline{\qquad} \\ EF \parallel AB \Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \underline{\qquad} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

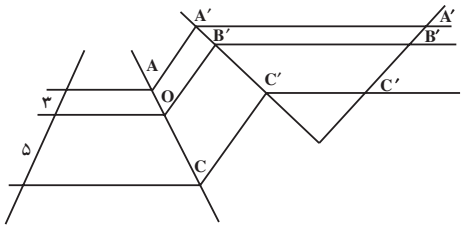
ــ چرا چهارضلعی DEFB متوازی‌الاضلاع است؟

ــ آیا $DE = BF$ است؟ چرا؟

ــ تساوی بین تناسب‌های بالا را با جایگزینی DE به جای BF بازنویسی کنید.

ــ از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

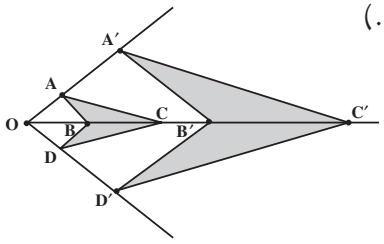
۳ــ با توجه به الگوی معرفی شده؛ شکل را امتداد دهید. درمورد پاره‌خط‌های AB و BC و $A'B$ و $B'C'$ و ... چه نظری دارید؟



بیان احساس دانش‌آموزان درباره‌ی این شکل جالب است. (خط‌های موازی امانت‌دار نسبت‌ها هستند.)

توسعه:

روش زیر را برای دو برابر کردن یک شکل تحلیل کنند. (نقطه‌ی دلخواه O را به A وصل کنید. سپس، آن را ادامه دهید؛ به طوری که $AA' = 2OA$ شود. این عمل را برای سایر نقاط تکرار کنید.)



فعّالیّت خارج از کلاس:

۱ــ از دانش‌آموزان بخواهید در مورد تالس تحقیق کنند.

۲ــ از دانش‌آموزان بخواهید طرحی برای ۲برابر، ۳ برابر کردن یک شکل ارائه دهند.

تشابه

موضوعات در یک نگاه

درس تشابه برای دانش‌آموزان تازگی دارد. این درس با مقایسه‌ی چند تصویر برای درک مفهوم مشابه بودن شروع می شود. سپس، شروط متشابه بودن دو شکل بیان و تشابه بعضی ازشکل‌های هندسی بررسی می‌شود. در ادامه، موضوع فقط به تشابه دو مثلث و حالت‌های تشابه محدود می‌شود و به کمک سه حالت تشابه دو مثلث و نوشتن تناسب بین اجزاء نظیر ضلع مجهول، محاسبه می‌شود.

اهداف

در فرایند آموزش این درس، انتظار می‌رود هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر برسد.

۱ــ مفهوم تشابه را درک کند و با چند مثال توضیح دهد.

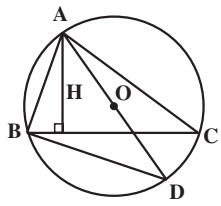
۲ــ شرط‌های تشابه دو شکل را توضیح دهد و مثال بزند و در شکل‌های هندسی بررسی کند.

۳ــ حالت‌های تشابه دو مثلث را در اثبات تشابه دو مثلث به‌کار برد.

۴ــ تناسب بین اضلاع نظیر دو مثلث متشابه را بنویسد و ضلع مجهول را پیدا کند.

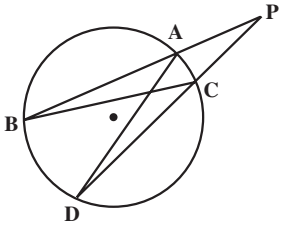
نمونه‌ی سؤال برای ارزش‌یابی

۱ــ با توجه به شکل، چرا دو مثلث ABH و ABD متشابه‌اند؟ نسبت تشابه را بنویسید.

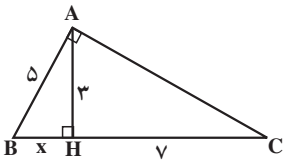


۲ــ با توجه به شکل و استفاده از تشابه دو مثلث نتیجه بگیرید :

$$PA \times PB = PC \times PD$$

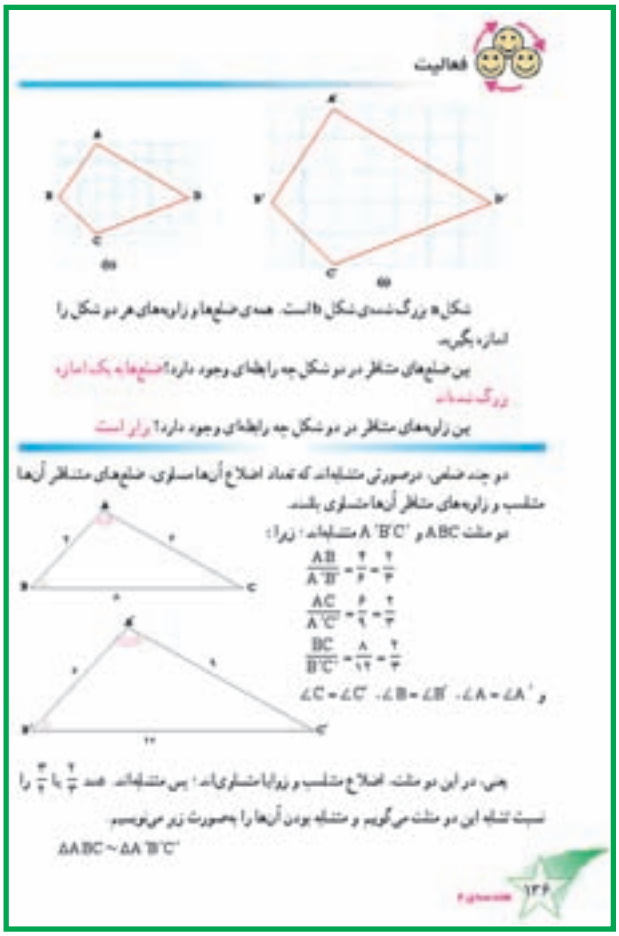


۳ــ با توجه به شکل، ضلع مجهول را پیدا کنید.



شناسنامه‌ی مبحث تشابه

درس‌ها	صفحات	مفاهیم و محتوا	هدف‌ها	فعالیت‌ها	پیش‌بینی امکانات	واژگان
شکل‌های متشابه	۱۳۵ ۱۳۶ ۱۳۷ ۱۳۸ ۱۳۹	مفهوم تشابه تشابه دو شکل	ــ مفهوم تشابه را با چند مثال توضیح دهد. ــ دو شرط تشابه بدون شکل‌ها را درک و در دو شکل هندسی بررسی کند. ــ در صورت متشابه بودن دو شکل هندسی، تناسب اضلاع آن را بنویسد.	ــ دیدن تصاویر و مطالعه‌ی متن ــ انجام دادن فعالیت برای درک‌های شرط تشابه ــ مطالعه‌ی متن در مورد تشابه دو شکل ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین نوشتن نسبت تشابه دو شکل	چند تصویر برای بررسی مفهوم تشابه خط کش نقاله	علت تشابه تشابه تناسب اضلاع اضلاع نظیر زوایای نظیر نسبت تشابه
تشابه دو مثلث	۱۴۰ ۱۴۱ ۱۴۲ ۱۴۳ ۱۴۴	حالات تشابه دو مثلث پیدا کردن ضلع مجهول	ــ حالت‌های تشابه دو مثلث را درک کند و در حل مسائل به‌کار برد. ــ با معلوم بودن تشابه دو مثلث، نسبت تشابه را بنویسد و ضلع مجهول را پیدا کند.	ــ مطالعه‌ی متن درمورد تشابه دو مثلث به حالت دو زاویه ــ انجام دادن کار درکلاس برای تمرین حالت فوق ــ مطالعه‌ی متن در مورد تشابه دو مثلث در دو حالت دیگر ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین دو حالت و نوشتن نسبت تشابه	خط کش نقاله	متشابه ضلع متناظر زاویه‌ی متناظر



شکل‌های متشابه

ایجاد انگیزه کنید:

ــ برای دانش‌آموزان، یک داستان خیالی تعریف کنید : تمساحی به انسانی حمله کرده بود و قصد داشت او را بخورد. پس دهانش را کامل باز کرد. عکاسی توانست این لحظه را عکاسی کند. این عکس که در کلیه‌ی روزنامه‌ها چاپ شده است، با اندازه‌ی واقعی تفاوت دارد. از دانش‌آموزان بپرسید که به نظر آن‌ها چگونه می‌توان فهمید زاویه‌ی نهایی دهان تمساح چه‌قدر بوده است.

ــ از دانش آموزان بخواهید نظر خود را در مورد تشابه و معنای آن، در کلاس مطرح کنند (مباحث طرح شده، پیشینه‌ی ذهنی دانش‌آموزان را درباره‌ی مفهوم تشابه نشان می‌دهد).

شروع کنید:

مفهوم و معنای ریاضی تشابه برای اولین بار برای دانش‌آموزان مطرح می‌شود. دانش‌آموزان در سال اول راهنمایی حالت خاصی از تشابه ــ یعنی تساوی دو مثلث ــ را بررسی کرده‌اند.

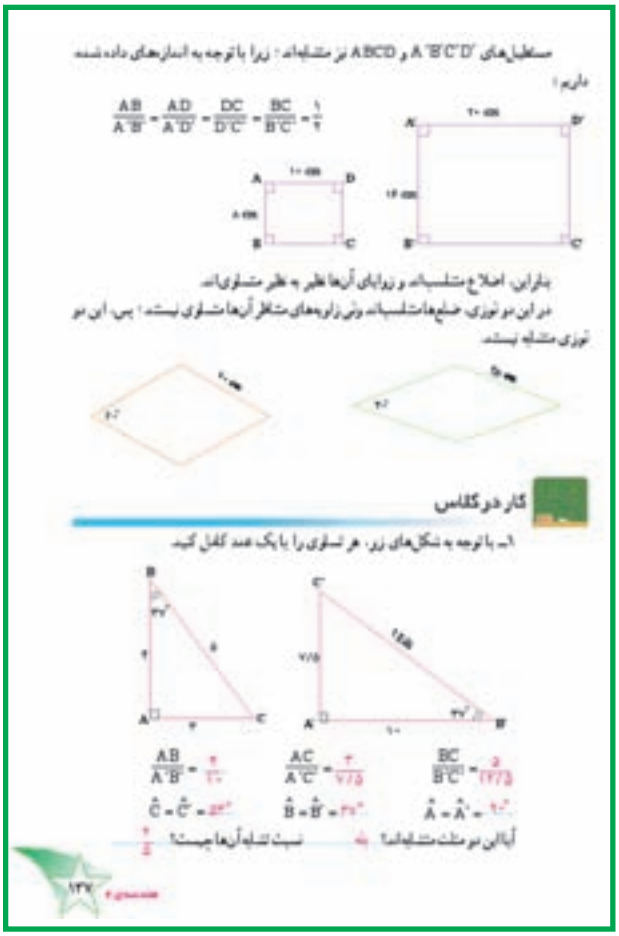
پس از بحث‌های انگیزشی مطرح شده توسط دانش‌آموزان، از آن‌ها بخواهید عکس‌های ص ۱۳۵ را بررسی کرده و سپس، فعالیت صفحه‌ی ۱۳۶ را به دقت حل کنند.

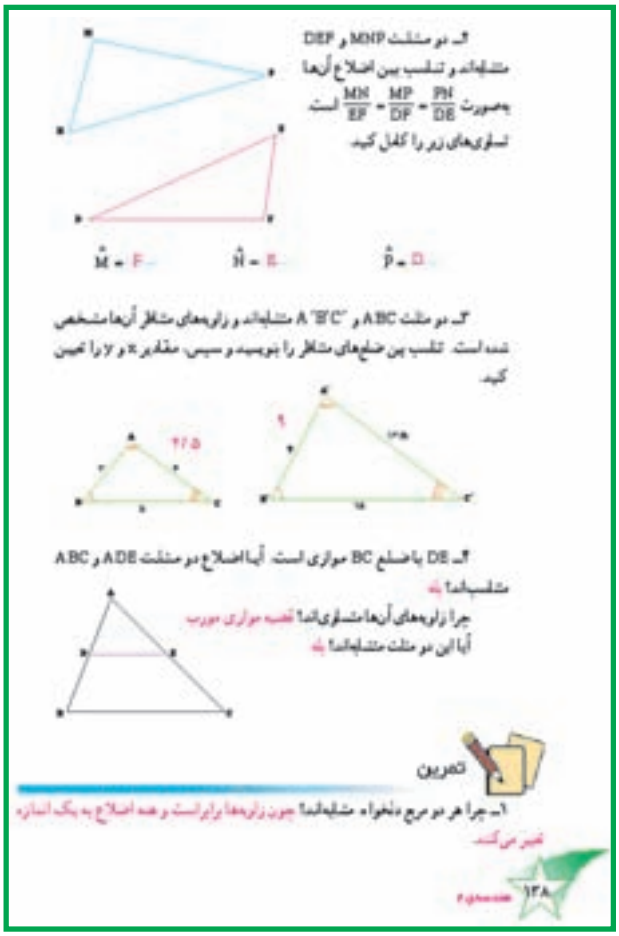
هدف فعالیت:

هدف اصلی این فعالیت، کشف رابطه‌ی بین اضلاع و زاویه‌ها در شکل متشابه است. دانش‌آموزان باید با اندازه‌گیری طول پاره‌خط‌ها و مقدار زوایا رابطه‌ای را بین اندازه‌های این دو شکل بیابند.

آموزش دهید:

پس از بحث و بررسی، نتایج گروه‌های کلاسی را





جمع‌بندی کنید و صفحات ۱۳۶ و ۱۳۷ کتاب را در کلاس بررسی نمایید. به کمک رسم شکل بر روی تخته، تشابه در اشکال مختلف را بررسی کنید. سپس، از دانش‌آموزان بخواهید کار درکلاس صفحه‌ی ۱۳۷ و ۱۳۸ را انجام دهند.

هدف کار در کلاس:

در تمرین ۱ هدف، استفاده از اطلاعات به‌دست آمده در صورت تشابه دو شکل است. نکته‌ی اصلی این تمرین، ایجاد نظم در نحوه‌ی نوشتن روابط است. تعیین زاویه‌های مساوی و اضلاع متناسب بسیار اهمیت دارد.

تمرین دوم، بر یافتن رابطه‌های صحیح تأکید بیش‌تری دارد. در تمرین سوم، دانش‌آموزان می‌باید به کمک روابط موجود، مجهول‌ها را پیدا کنند. هدف اصلی تمرین چهارم، آمادگی اولیه برای حل مسائل تشابه است. در تمرین‌های این بخش نیز این هدف در قالب‌های دیگر مطرح شده است. در تمرین شماره‌ی ۱، مفهوم اصلی تشابه مورد بررسی قرار گرفته و در تمرین ۵، یکی ازکاربردهای تشابه با نام مقیاس نقشه مطرح شده است.

توصیه‌های آموزشی:

ــ به دانش‌آموزان یادآوری کنید که اگر رابطه‌ی تناسب اضلاع را جابه‌جا بنویسند، تمامی نتیجه‌گیری‌های بعدی نادرست خواهد بود.

ــ به دانش‌آموزان بگویید که اگر زاویه‌های مساوی را تشخیص دهند، نوشتن رابطه‌ی اضلاع ساده‌تر خواهد بود.

بپرسید!

از دانش‌آموزان بپرسید : آیا دو مستطیل همیشه با هم متشابه‌اند؟

توسعه:

ــ از دانش‌آموزان بخواهید نسبت تشابه را بین دو شکل غیرهندسی ــ مثلاً شکل کتاب ــ پیدا کنند (روش‌های مختلف بررسی شود.)

ــ از آنان بخواهید در دو مثلث متشابه، طول ارتفاع، میانه و عمود منصف‌های آن‌ها را بررسی کنند و بگویند که آیا نسبت تشابه در مورد اجزاء فرعی مثلث‌ها نیز صحیح است؟

ــ طرح سؤال‌هایی چون «آیا یک مربع و یک مستطیل می‌توانند متشابه باشند و آیا یک دایره و یک بیضی می‌توانند متشابه باشند» مسیر خوبی برای توسعه است.

فعالیت موازی:

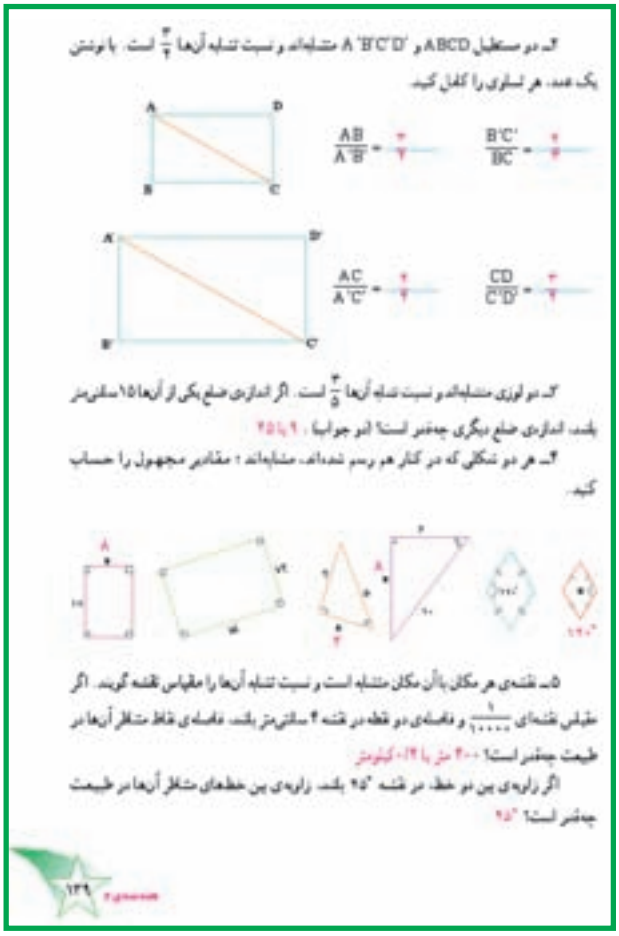
به کمک دستگاه زیراکس یک چندضلعی را کوچک کنید و از دانش‌آموزان بخواهید اندازه‌ی ضلع و زاویه‌های هرکدام را اندازه‌گیری کنند. سپس رابطه‌ای بین آن‌ها بیابند و در پایان به کمک ماشین حساب، اعلام کنند که شما با دستگاه زیراکس، شکل را چند درصد کوچک کرده‌اید.

تلفیق با سایر دروس:

وقتی طرحی از طبیعت رسم می‌شود، در صورتی طبیعی و زیبا جلوه می‌کند که تناسب طول‌ها در آن رعایت شود. کاریکاتور به این علت جذاب و خنده‌دار است که تناسب واقعی در آن رعایت نمی‌شود.

فعّالیّت خارج از کلاس:

ــ از دانش‌آموزان بخواهید نمونه‌ای از شکل‌های متشابه را برای ارائه در کلاس پیدا کنند.



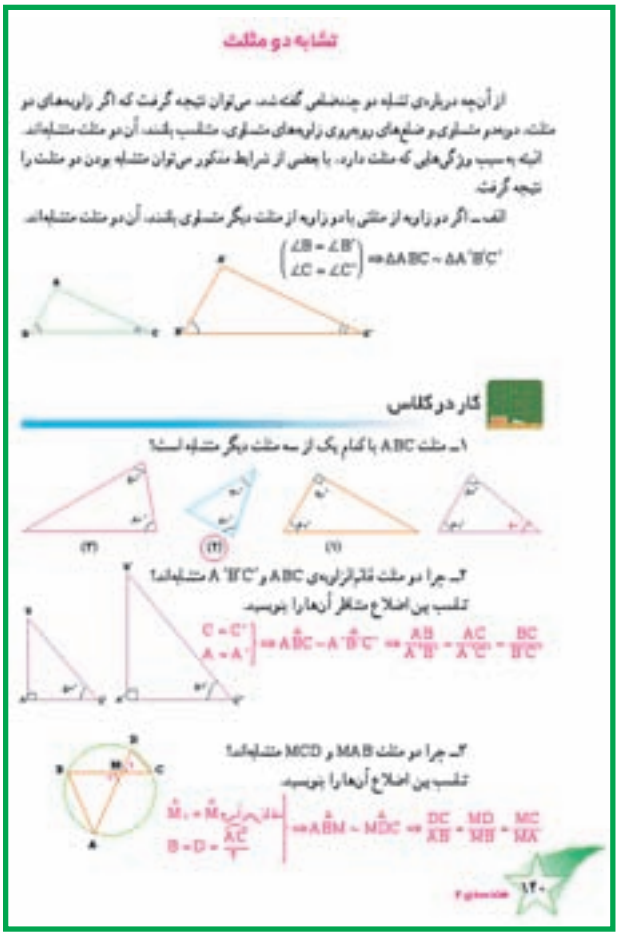
ــ از آنان بخواهید به کمک تصویر صفحه‌ی ۱۳۵ کتاب (بالای صفحه)، وسیله‌ای بسازند که بتوان یک شکل را در دو اندازه بزرگ و کوچک کرد (نام این وسیله، واندوگراف است.)

استفاده از ابزار و تکنولوژی:

به‌عنوان یک تحقیق، از دانش‌آموزان بپرسید که دستگاه زیراکس چگونه کار می‌کند.

ــ در هر نرم‌افزار گرافیکی، zoom in و zoom out شکل‌ها را به کمک تشابه بزرگ و کوچک می‌کنند.

یادداشت معلم



تشابه دو مثلث

ایجاد انگیزه کنید:

ــ کلاس را گروه‌بندی کنید. به هر گروه یک مثلث مقوایی بدهید و سپس، از هرکدام ازگروه‌ها بخواهید یک مثلث متشابه با مثلث نمونه بسازند ؛ نسبت تشابه را مشخص کنند و روند کار را توضیح دهند. سپس، از دانش‌آموزان بپرسید : چه زمانی مطمئن می‌شوید که دو مثلث با هم متشابه‌اند؟

شروع کنید:

دانش‌آموزان در سال اول، ابتدا آموختند که دو مثلث در صورتی با هم برابرند که بر هم منطبق شوند. سپس، با انجام دادن چند فعالیت، دریافتند که لازم نیست همه‌ی اجزاء مثلث را بررسی کنیم ؛ اگر سه ضلع، دو ضلع و زاویه‌ی بین یا دو زاویه و ضلع بین از دو مثلث با هم برابر باشند، آن دو مثلث با هم برابر خواهند بود.

در مورد تشابه نیز همین روند می‌تواند اتفاق بیفتد. به دانش‌آموزان اعلام کنید که برای تشابه، لازم نیست همه‌ی اجزاء اصلی مثلث بررسی شود بلکه راه‌هایی وجود دارد که متشابه بودن دو مثلث را به سرعت می‌توان تعیین کرد.

آموزش دهید:

حالت اول تشابه یعنی «تساوی دو زاویه از مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر» را در کلاس توضیح دهید. سپس، از دانش‌آموزان بخواهید کار در کلاس صفحات ۱۴۰ و ۱۴۱ را انجام دهند.

هدف کار در کلاس :

در تمرین اول هدف، به‌کار بستن قاعده‌ی گفته شده است. در تمرین دوم و سوم هدف، ارائه‌ی یک دلیل ریاضی برای اثبات تشابه دو مثلث است و تمرین چهارم و پنجم و ششم، سؤالات مفهومی تشابه را طرح می‌کند.

آموزش دهید:

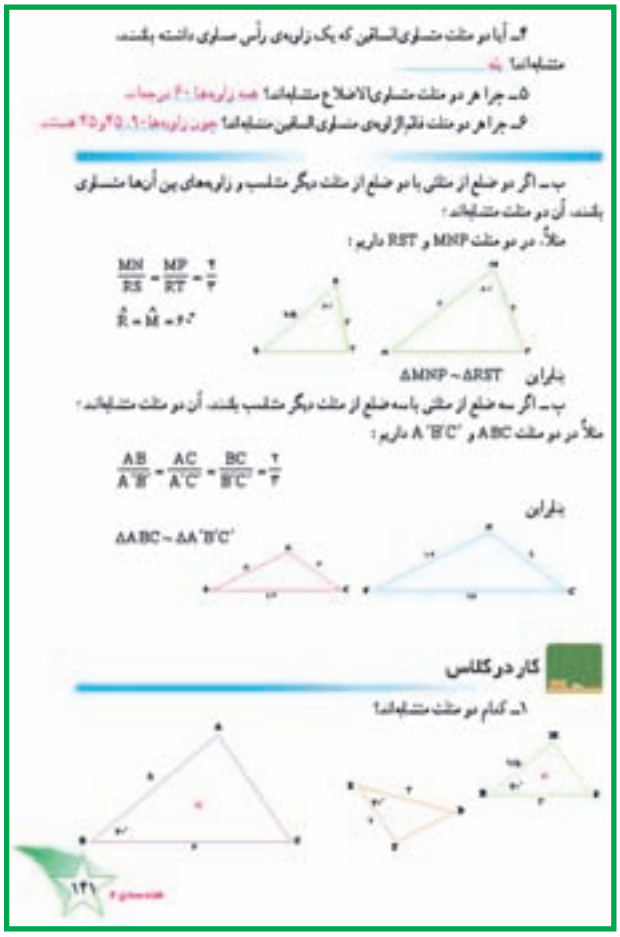
پس از بیان حالت اول، حالت دوم ــ یعنی متناسب بودن دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین ــ را در کلاس بررسی کنید. سپس، حالت سوم ــ یعنی متناسب بودن سه ضلع دو مثلث ــ را نیز آموزش دهید. بعد از آن، از دانش‌آموزان بخواهید کار درکلاس صفحه‌ی ۱۴۱ و ۱۴۲ را انجام دهند.

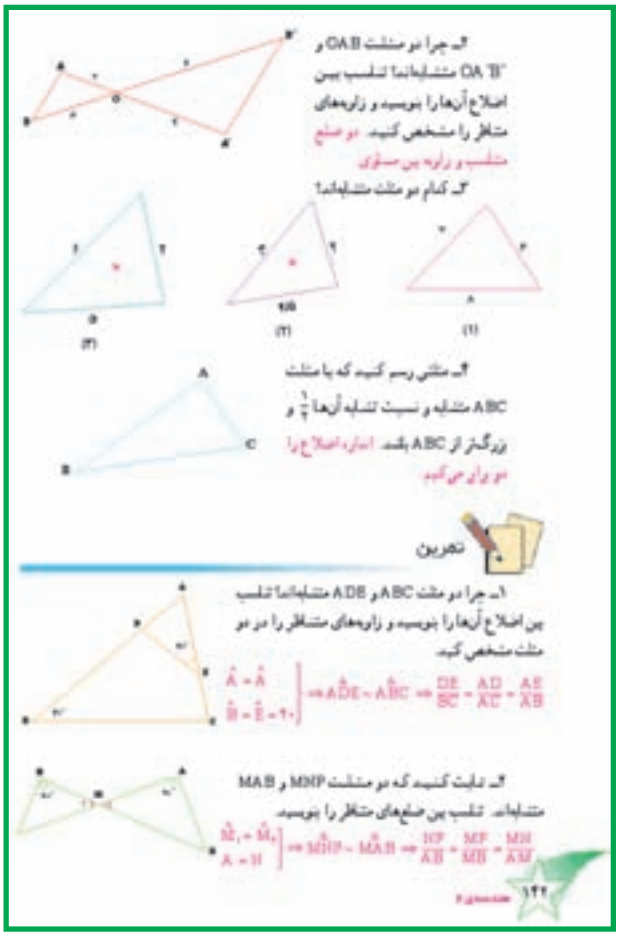
هدف کار در کلاس :

تمرین ۱ و ۳ با هدف استفاده از قوانین دوم و سوم برای تشخیص تشابه دو مثلث طرح شده است. تمرین دوم یک مسئله‌ی کامل تشابه است و دانش‌آموزان ابتدا باید دلیل تشابه دو مثلث را بیان کنند (به کمک یکی از روش‌های بیان شده) و سپس، رابطه‌ی تناسب بین اضلاع را بنویسند. تمرین چهارم یک مسئله‌ی کاربردی از مفاهیم تشابه است. در بخش تمرین نیز تمرین‌های ۱ تا ۱۰ مسائلی اثباتی است و دانش‌آموز باید به کمک زبان ریاضی دلیل تشابه مثلث‌ها را بنویسد. تمرین ۱۱ با هدف کاربرد روابط تشابه و پیدا کردن مجهولات، طرح شده است.

توصیه‌های آموزشی:

ــ از دانش‌آموزان بخواهید در حل مسائل تشابه با به‌کار





بستن راهبردهای حل مسئله مانند زیر مسئله‌ها، حل کردن مسائل به کمک مسئله‌ی ساده‌تر و ... سریع‌تر و ساده‌تر به جواب برسند.

ــ رابطه‌های نسبت تناسب مثل طرفین ــ وسطین را به دانش‌آموزان یادآوری کنید. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \rightarrow ad=bc$

ــ نحوه‌ی نوشتن راه‌حل ریاضی را با حل یک مثال تساوی مثلث یادآوری کنید.

ــ از دانش‌آموزان بخواهید با رسم یک شکل، نشان دهند که تنها متناسب بودن دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر، برای متشابه بودن کافی نیست.

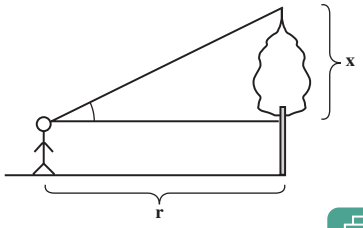
در تمرین ۶ و ۸ دانش‌آموزان باید از یک رابطه، حاصل‌ضرب یک تساوی نسبت را بیابند و به کمک آن، مثلث‌های موردنظر را پیدا کنند.

ــ از دانش‌آموزان بپرسید : چرا برابری دو زاویه کافی است و در مورد زاویه‌ی سوم تحقیقی صورت نمی‌گیرد؟

ــ هنگام حل کردن مسائل، از گچ رنگی استفاده کنید.

فعالیت موازی:

یک مثلث قائم‌الزاویه به ابعاد ۳۰cm و ۴۰cm (اضلاع زاویه‌ی قائمه) بسازید و به کمک آن سعی کنید در حیاط مدرسه، طول درختان یا اشیاء دیگر را اندازه بگیرید.

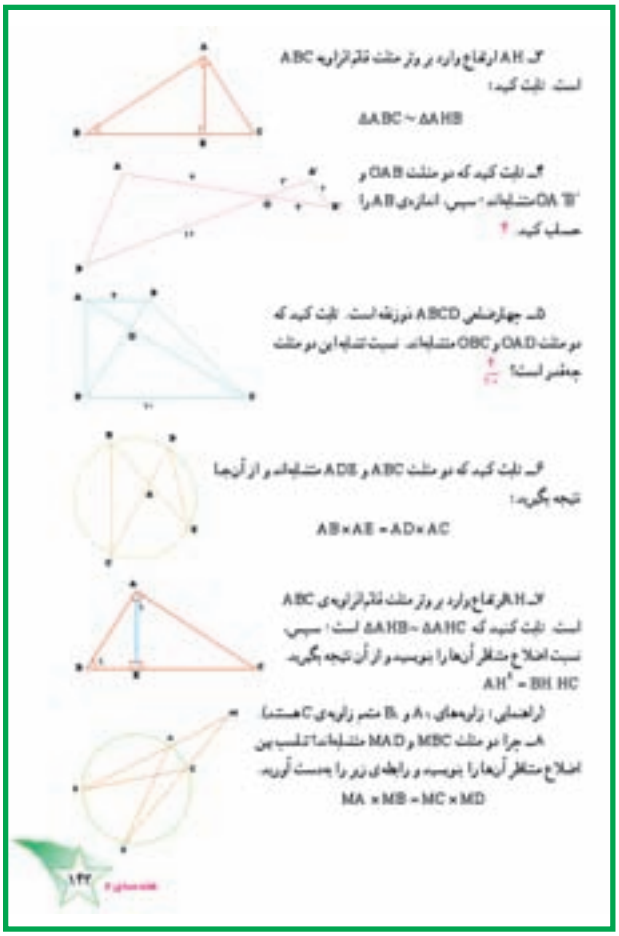


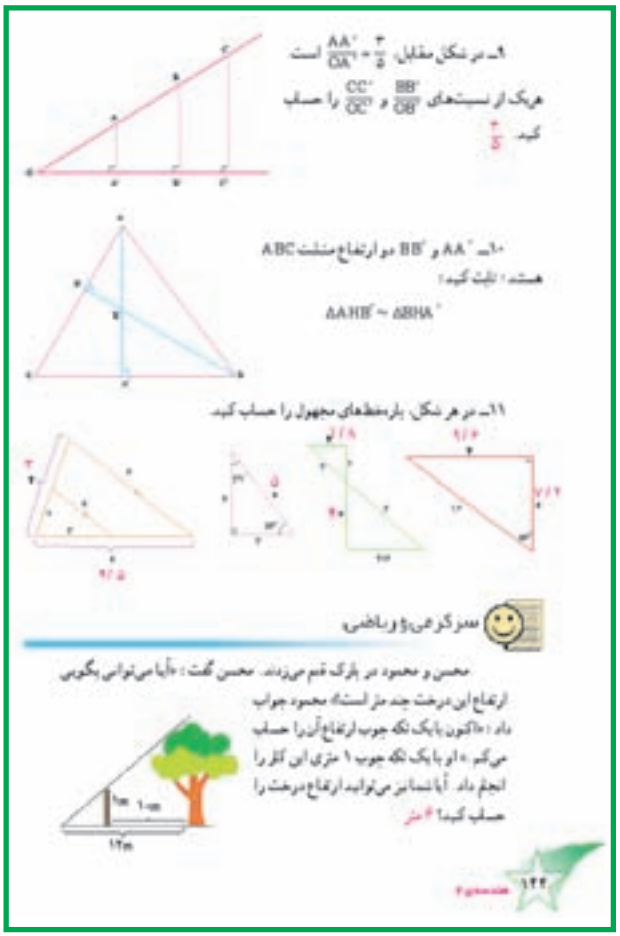
توسعه:

ــ پاسخ این سؤال‌ها را از دانش‌آموزان بخواهید :

الف) چرا نسبت طول درخت و سایه‌اش با نسبت طول خط‌کش و سایه‌اش یکسان است؟

ب) آیا می‌توان با تعدادی نخ و یک خط‌کش، طول یک درخت را در یک صبح تابستان اندازه گرفت؟



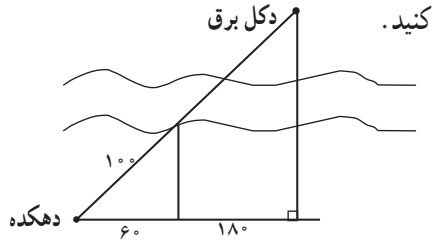


ـ خواص یک تناسب را در کلاس بررسی کنید.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{c\pm d}\rightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$$ و ...

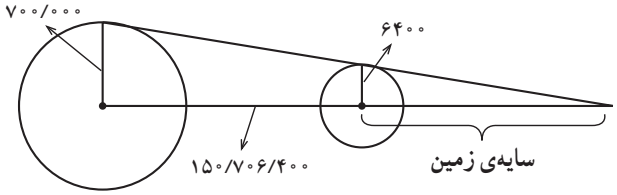
ـ مسئله‌ی زیر و مسائل مشابه برای طرح در کلاس و بحث گروهی در سیر توسعه مناسب‌اند :

دهکده‌ای در یک طرف رودخانه و دکل‌های انتقال نیرو در سوی دیگر رودخانه‌اند. با توجه به شکل، طول کابل موردنیاز را محاسبه کنید.

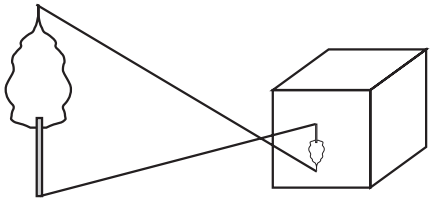


تلفیق با سایر دروس:

در نجوم، برخی از محاسبات به کمک تشابه و شبیه‌سازی انجام می‌شود. برای مثال، با اندازه‌های داده شده‌ی زیر می‌توان طول سایه‌ی زمین را محاسبه کرد.



در عکاسی نیز ازتشابه استفاده می‌شود. معمولاً تصویر بر روی فیلم به صورت کوچک و معکوس ثبت می‌شود.



فعّالیّت خارج از کلاس:

از دانش‌آموزان بخواهید که چند شکل متشابه را در حالت‌های مختلف، رسم کرده و به کمک رنگ‌آمیزی، اضلاع متناسب را علامت‌گذاری کنند. آن‌گاه حاصل کار خود را به دیوار کلاس نصب کنند.

حجم

موضوعات در یک نگاه

درس حجم در امتداد درس سال گذشته است. در بررسی حجم‌های هندسی، حجم‌های منشوری در کلاس دوم راهنمایی آموزش داده شده است. در این درس، ابتدا حجم‌های هرمی و مخروط ــ که نوعی هرم است ــ و سپس حجم کره، مساحت کل کره و رابطه‌ی محاسبه‌ی حجم و مساحت کل آموزش داده می‌شود. در پایان و در بین تمرین‌ها حجم و مساحت نیم‌کره نیز مطرح می‌گردد.

اهداف

در فرآیند آموزش این درس، انتظار می‌رود هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر برسد.

۱ــ انواع حجم‌های هندسی را تشخیص دهد.

۲ــ گسترده و حجم‌های هرمی را تشخیص دهد و رابطه‌ی محاسبه‌ی حجم را در حل مسائل به‌کار برد.

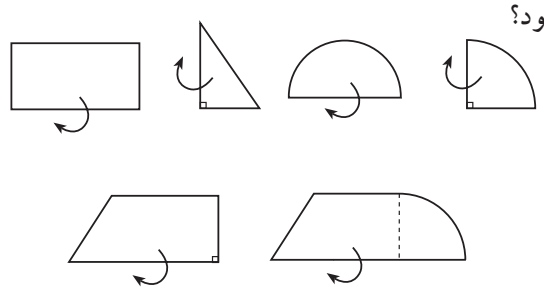
۳ــ درک کند که مخروط نوعی هرم است و رابطه‌ی محاسبه‌ی حجم را در حل مسائل به‌کار برد.

۴ــ شکل کره را تشخیص دهد و دستور محاسبه‌ی حجم و مساحت کل کره را در حل مسائل به‌کار برد.

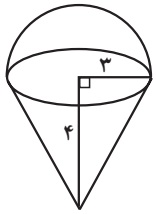
نمونه‌ی سؤال برای ارزش‌یابی

۱ــ اگر ارتفاع یک مخروط را ۳ برابر و شعاع قاعده‌ی آن را نصف کنیم، حجم مخروط جدید بیش‌تر می‌شود یا کمتر؟ چرا؟

۲ــ با دوران هرکدام از شکل‌های زیر، چه حجمی ایجاد می‌شود؟



۳ــ حجم شکل زیر را به‌دست آورید.



۴ــ حجم و مساحت نیم کره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر را به‌دست آورید.

یادداشت معلم

شناسنامه‌ی مبحث حجم

درس‌ها	صفحات	مفاهیم و محتوا	هدف‌ها	فعالیت‌ها	پیش‌بینی امکانات	واژگان
هرم	۱۴۵ ۱۴۶	حجم هرم	ــ با استفاده از گسترده‌ی هرم، آن را درست کند. ــ اجزاء یک هرم رابشناسد و انواع آن را تشخیص دهد. ــ دستور محاسبه‌ی حجم هرم را به کمک حجم منشوری درک کند. ــ دستور محاسبه‌ی حجم هرم را در حل مسائل به‌کار برد.	ــ مطالعه‌ی متن درمورد هرم و دستور محاسبه‌ی حجم ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین رابطه‌ی حجم هرم	هرم و منشور (صنایع آموزشی) گسترده‌ی هرم	هرم یال هرم وجه هرم قاعده‌ی هرم ارتفاع هرم رأس
مخروط	۱۴۷ ۱۴۸	حجم مخروط	ــ درک کند که مخروط، نوعی هرم است. ــدستور محاسبه‌ی حجم مخروط را به کمک استوانه و با آزمایش به‌دست آورد. ــ گسترده‌ی مخروط را بشناسد و به کمک آن، مخروط بسازد. ــ دستور محاسبه‌ی حجم مخروط را در حل مسائل به‌کار برد. ــ درک کند که مخروط از دوران مثلث قائم‌الزاویه به‌وجود می‌آید.	ــ مطالعه‌ی متن درس در مورد حجم مخروط ــ انجام دادن کار درکلاس برای تمرین رابطه‌ی حجم مخروط	مخروط و استوانه (صنایع آموزشی) گسترده مخروط	مخروط قاعده‌ی مخروط ارتفاع مخروط
کره	۱۴۸ ۱۴۹	حجم و مساحت کل کره	ــ درک کند که کره ازدوران دایره یا نیم‌دایره به‌وجود می‌آید. ــ دستورمحاسبه‌ی حجم و مساحت کل کره را در حل مسائل به‌کار برد.	ــ مطالعه‌ی متن درس در مورد کره ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین رابطه‌ی حجم و سطح کره	چند نمونه حجم کروی	کره مرکز کره شعاع کره مساحت کل کره نیم‌کره

مساحت و حجم

هندسه یا ژئومتری (géometri) در واقع یعنی اندازه‌گیری زمین». انسان از همان ابتدا برای کشاورزی، ساختن خانه‌ها و نیایشگاه‌ها به مرزبندی نوین و محاسبه‌ی مساحت قطعه‌های آن‌ها نیاز داشت. بیش از همه، در سرزمین «میان رود» (بین‌النهرین)، مصر، ایران، چین و هند در این زمینه، قاعده‌هایی پیدا شد. البته، این محاسبه‌ها اغلب تقریبی بوده است ؛ مردم سرزمین بابل می‌توانستند مساحت مستطیل، مثلث، متوازی‌الاضلاع و ذوزنقه را به‌دست آورند و مردم عیلام (در جنوب وجنوب‌غربی ایران) و مصر در ۱۷۰۰ سال پیش از میلاد، مساحت مستطیل را محاسبه کردند.

در ایلام، مساحت مثلث متساوی‌الساقین را نصف حاصل‌ضرب قاعده در یک ساق می‌دانستند. مصری‌ها برای محاسبه‌ی مساحت ذوزنقه،حاصل ضرب مجموع دو قاعده در یکی از ساق‌ها را نصف می‌کردند. در عیلام، بابل و مصر روش محاسبه‌ی مساحت یک چهارضلعی غیرمشخص این بود که نصف مجموع دو ضلع روبه‌رو را در نصف مجموع دو ضلع روبه‌روی دیگر ضرب می‌کردند.

محاسبه‌ی تقریبی مساحت‌ها، در زندگی مردمی که از آن‌ها نام بردیم، مشکلی به‌وجود نمی‌آورد ولی از آن‌جا که آن‌ها به دنبال استدلال نبودند، به تدریج دچار دشواری شدند. یونانیان باستان (از سده‌ی ششم پیش از میلاد تا سده‌های سوم و چهارم میلادی) که بیشتر به هندسه‌ی نظری توجه داشتند این کمبود را برطرف کردند. اقلیدس در سده‌ی سوم پیش از میلاد، با نوشتن کتاب «مقدمات»، توانست هندسه را با دقت استدلالی مطرح کند. «هه‌رون» که در اسکندریه زندگی می‌کرد، حتی مساحت مثلث را از روی طول سه ضلع آن به‌دست آورد. اگر S را مساحت مثلث و a، b و c را طول هریک از ضلع‌های آن و p را مقدار نصف محیط آن بگیریم، هه‌رون (سده‌ی اول پیش از میلاد) این رابطه را به‌دست آورد :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-d)}$$

برای محاسبه‌ی مساحت دایره و محیط آن، به عدد پی π نیازداریم. مردم سرزمین بابل، عدد پی را برابر ۳ و مصری‌ها آن را برابر ۳/۱۶ می‌گرفتند. مقدار دقیق این عدد را ارشمیدس در سده‌ی سوم پیش از میلاد به‌دست آورد. او عدد پی را این‌گونه محاسبه کرد.

$$۳\frac{۱۰}{۷۱} < \pi < ۳\frac{۱}{۷}$$

فیثاغورس عدد پی را باز هم دقیق‌تر کرد :

$$\pi=\frac{۳۷۷}{۱۲۰}=۳/۱۴۱۶$$

از ریاضی‌دانان ایرانی، خوارزمی در قرن سوم (سال شمسی) یا قرن چهارم (سال قمری)، برای عدد پی یکی از این سه مقدار را درنظر می‌گرفت :

$$\pi=\sqrt{۱۰}\ ;\ \pi=۳\frac{۱}{۷}\ ;\ \pi=\frac{۶۲۸۳۱}{۲۰۰۰}$$

عبید کاشانی عدد π را تا ۱۶ رقم بعد از ممیز محاسبه کرد. براهماگوپتا، عدد پی را برابر $\sqrt{۱۰}$ به حساب می‌آورد و فردلواویت، ریاضی‌دان فرانسوی سده‌ی شانزدهم، برای عدد π به‌دست آورد :

$$۳/۱۴۱۵۹۲۶۱۵۳۵ < \pi < ۳/۱۴۱۵۹۲۶۱۵۳۶$$

«رودُلف» اهل کُلن «آلمان»، عدد π را تا ۲۵ رقم بعد از اعشار محاسبه کرد.

لامبرت (۱۷۷۷ـ۱۷۲۸) ریاضی‌دان آلمانی در سال ۱۷۶۱ گنگ بودن عدد پی را ثابت کرد و ولز اندر (۱۸۳۲ـ۱۷۵۲) ثابت کرد که مجموعه عدد π هم، عددی گنگ است. سرانجام «لیندهان» ریاضی‌دان سده‌ی نوزدهم میلادی، غیرجبری بودن عدد π را ثابت کرد.

محاسبه‌ی حجم منشور، هرم و کره

نیاز به محاسبه و تنظیم حجم منشور و هرم، به زمانی دور می‌رسد. بابلی‌ها، این دستورها را برای محاسبه‌ی مقدار مصالحی که برای ساختمان‌ها به‌کار می‌رفت و نیز برای محاسبه‌ی گنجایش ظرف‌ها و حوضچه‌ها به‌کار می‌بردند. آن‌ها، در روش محاسبه‌ی خود، بسیار پیشرفت کرده بودند و می‌توانستند حجم مکعب

مستطیل و هرم ناقص را به درستی محاسبه کنند. البته هرم ناقصی که درنظر می‌گرفتند، قاعده‌های مربعی داشت. آن‌ها از رابطه‌ای استفاده می‌کردند که حجم هرم را به این رابطه می‌رسانید و معلوم نیست چگونه به این رابطه درست رسیده بودند:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ah)$$

که در آن، V حجم هرم ناقص، h ارتفاع آن و a و b طول ضلع‌های مربع‌هاست.

مصری‌ها، برای ساختن هرم‌های بزرگ خود ظرافت و هنرمندی ویژه‌ای داشته‌اند. آن‌ها هرم‌ها را با فرمان فرعون در اندازه‌های بزرگ می‌ساختند. برای نمونه، هرم «خئوپس» قاعده‌ای مربعی‌شکل به ضلع برابر ۲۳۳ متر و ارتفاعی برابر ۴۷ متر داشت. در این هرم، ۲۳۰۰۰۰۰ قطعه سنگ گرانیت به‌کار رفته که وزن هر یک از آن‌ها دو تن و نیم بوده است. کار ساختمان با کیفیتی بالا انجام گرفته است. قطعه‌های عظیم سنگ را صیقل می‌دادند و صاف می‌کردند و با دقت کامل به هم جفت می‌کردند. حجم هرم ناقص را با همان رابطه‌ی بابلی‌ها محاسبه می‌کردند.

چندوجهی‌های منتظم (چهاروجهی منتظم، هشت‌وجهی منتظم، مکعب، دوازده‌وجهی منتظم و بیست‌وجهی منتظم) را هواداران فیثاغورس کشف کردند و امروز آن‌ها را «پنج جسم اندرونی» می‌گویند. فیثاغورسیان، چهار چندوجهی نخستین را نشانه‌ی چهار عنصر، یعنی آتش، باد، خاک و آب می‌دانستند و به دلیل این که عنصر پنجمی وجود نداشت، چندوجهی منتظم پنجم (دوازده وجهی منتظم) را پنهان نگه داشتند. رسم چندوجهی‌های منتظم در دانش یونانیان باستان دیده نمی‌شود. اقلیدس درباره‌ی چندوجهی‌های منتظم در کتاب سیزدهم خود به تفصیل سخن گفته است.

مصری‌ها و بابلی‌های کهن به جسم‌های دوار ــ یعنی جسم‌هایی که از دوران یک شکل روی صفحه به‌دست می‌آیند ــ توجه داشتند. در پاپیروس مسکو که مربوط به ۱۹۰۰ سال پیش از میلاد است، روش محاسبه‌ی مساحت نیم‌کره، باعنوان «محاسبه‌ی زنبیل» آمده است.

در یونان باستان، تنها ارشمیدس بود که به محاسبه‌ی جسم‌های دوار پرداخت و از جمله ثابت کرد که «حجم کره، برابر است با چهاربرابر مساحت دایره‌ی عظیمه‌ی آن. حجم استوانه‌ای که ارتفاع آن برابر قطر قاعده باشد، یک برابر و نیم حجم کره‌ی محاط در آن است». شکل مربوط به این مسئله را بنابر وصیت خود ارشمیدس، روی سنگ آرامگاهش حک کردند.

تا آن‌جا که به اقلیدس و شاگردان او مربوط است، آن‌ها تنها نسبت حجم‌ها را محاسبه کردند، نه خود آن‌ها را.

□

هندسه هم مانند حساب، از کهن‌ترین بخش‌های دانش ریاضیات است و تاریخ پیدایش آن به سال‌های دور سده‌های گذشته برمی‌گردد. هندسه در دنیای کهن، جنبه‌ی کاربردی داشته است و این دوران خود را که طولانی‌ترین دوران پیشرفت آن نیز هست، در ایلام، بابل، مصر، چین و درواقع در همه‌ی سرزمین‌ها گذرانده است. همه‌ی قوم‌ها و ملت‌ها، برای اندازه‌گیری زمین‌های کشاورزی، در ساختن نخستین مفهوم‌های هندسی دخالت داشته‌اند.

در سده‌ی سوم پیش از میلاد، با «مقدمات» اقلیدس، هندسه‌ی نظری زاده شد که بر آگاهی‌های پیش از خود (چه پیش از دوران یونانی و چه اطلاعات هندسه‌دانان پیش از اقلیدس) تکیه داشت. اقلیدس سیزده کتاب نوشت که به نام کلی «مقدمات» مشهور است. کتاب اقلیدس تنها کتابی است که در طول بیش از دو هزارسال، هندسه را به دیگران آموخته است. حتماً امروز هم، هندسه‌ای که در دبیرستان آموخته می‌شود، هندسه‌ی اقلیدسی و بر اساس مقدمات اقلیدس است.

بیش از دو هزار سال، دانشمندان تصور می‌کردند که هندسه‌ای جز هندسه‌ی اقلیدسی وجود ندارد. براساس این تصور، ریاضی‌دانان گمان می‌کردند که می‌توانند، اصل پنجم اقلیدس را ــ که می‌گوید «از یک نقطه‌ی خارج یک خط راست، تنها یک خط راست می‌توان موازی با آن رسم کرد» ــ می‌توان از سایر اصل‌ها نتیجه گرفت ولی همه‌ی تلاش‌ها، برای اثبات اصل این موضوع، ناکام ماند.

ریاضی‌دانان ایرانی هم در این راه کوشیدند که از جمله‌ی مشهورترین آن‌ها «فضل خاتم نیریزی» (سده‌ی نهم میلادی) و

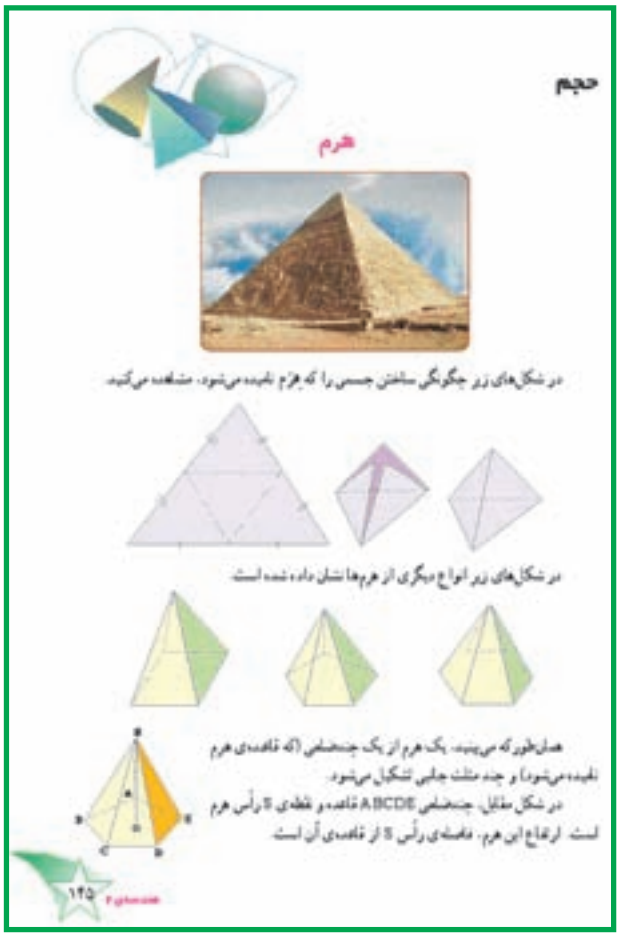
خیام نیشابوری (سده‌ی چهارم میلادی) است. ولی نتیجه این شد که اصل موضوع دیگری را به جای اصل موضوع اقلیدس قرار دادند. فضل نیریزی از اصلی استفاده کرده بود که «ماری رلژاندر» ریاضی‌دان فرانسوی (۱۸۳۳ـ۱۷۵۹ میلادی) هم، همان اشتباه را داشت. عمرخیام در کتاب خود که به این موضوع مربوط است، چهارضلعی‌های دو قائمه‌ی متساوی‌الساقین را مطرح می‌کند و از چهارضلعی‌هایی سخن می‌گوید که دو ضلع روبه‌روی آن‌ها باهم برابر و در ضمن بر قاعده عمود باشند. سپس، ثابت می‌کند که دو زاویه‌ی دیگر این چهارضلعی، با هم برابرند و با جانشین کردن اصل اقلیدس با اصل دیگری، حاده یا منفرجه‌بودن این دو زاویه را رد می‌کند.

طرح خیام به وسیله‌ی نصیرتوسی به کشورهای اروپایی می‌رود ؛ ازجمله «جودانی ساکری» ریاضی‌دان ایتالیایی (در سده‌ی هجدهم) با طرح همان چهارضلعی‌ها تلاش می‌کند اصل پنجم را ثابت کند، ولی به نتیجه‌ای نمی‌رسد. از آن‌جا که «گوس»، «بایای» و «لوباچوسکی» توانستند هندسه‌ی نااقلیدسی را بسازند، این چهارضلعی‌ها که راه را برای کشف هندسه‌ی نا اقلیدسی گشوده بودند، به «چهارضلعی‌های ساکری» مشهور شده‌اند، در حالی که به‌درستی باید آن‌ها را «چهارضلعی‌های خیام» نامید.

دانشمند هندسه‌دان روسی، نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی، در سال ۱۸۲۶، غیرقابل اثبات بودن اصل پنجم اقلیدس را ثابت کرد و به جای آن، این حکم را گذاشت : «از هر نقطه‌ی بیرون خط راست، دست‌کم دو خط راست می‌توان رسم کرد که خط راست مفروض را قطع نکند».

هندسه‌ی لباچوسکی یک دوره‌ی کامل را گذرانده و در فیزیک امروزی، کاربرد خود را به‌دست آورده است ؛ از جمله فضای نظریه‌های مکانیک امروز، بر اندیشه‌های لباچوسکی قرار دارد.

یادداشت معلم


حجم

هرم

در شکل‌های زیر چگونگی ساختن جسمی را که هرم نامیده می‌شود، مشاهده می‌کنید.

در شکل‌های زیر انواع دیگری از هرم‌ها نشان داده شده است.

همان‌طور که می‌بینید، یک هرم از یک چندضلعی (که قاعده‌ی هرم نامیده می‌شود) و چند مثلث جانبی تشکیل می‌شود.
در شکل مقابل، چندضلعی ABCDE قاعده و نقطه‌ی S رأس هرم است. ارتفاع این هرم، فاصله‌ی رأس S از قاعده‌ی آن است.

۱۴۵


شکل‌های بالا نشان می‌دهند که با سه تُرش، می‌توان یک مکعب را به سه هرم مربع‌القاعده‌ی متساوی‌القسم کرد؛ پس، حجم هر یک از این هرم‌ها یک‌سوم حجم مکعب است. مشاهده می‌کنید که قاعده‌ی هر یک از سه هرم یکی از وجه‌ها و ارتفاع آن یکی از یال‌های مکعب است و می‌دانید که

طول یال × مساحت یک وجه = حجم مکعب

بنابراین،

ارتفاع هرم × مساحت قاعده‌ی هرم × $\frac{1}{3}$ = حجم مکعب × $\frac{1}{3}$ = حجم هر یک از هرم‌های بالا

با انجام دادن آزمایش زیر، می‌توان نشان داد که این دستور برای هر نوع هرم درست است. دو ظرف به شکل‌های منشور و هرم که قاعده و ارتفاع مساوی داشته باشند، انتخاب می‌کنیم. ظرفی را که به شکل هرم است، از آب پُر می‌کنیم و در ظرف منشور شکل خالی می‌کنیم. مقدار آب $\frac{1}{3}$ گنجایش منشور می‌شود.

حجم منشور × $\frac{1}{3}$ = حجم هرم

پس، ارتفاع × مساحت قاعده × $\frac{1}{3}$ = حجم هرم

بطور کلی، حجم یک هرم برابر است با یک‌سوم حاصل‌ضرب مساحت قاعده‌ی آن در ارتفاع آن.

کار در کلاس

مساحت قاعده و ارتفاع هر هرم داده شده است. حجم آن‌ها را حساب کنید.

۱۴۶

هرم

ایجاد انگیزه کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید احجامی را که می‌شناسند، در کلاس نام ببرند و نمونه‌های طبیعی آن را معرفی کنند؛ مثلاً کره با مثال سیب، توپ و ...

شروع کنید:

اثبات رابطه‌های حجم در هرم و سایر احجام، کار ساده‌ای نیست. این موضوع را به صورت عمومی توضیح دهید. سپس، صفحات ۱۴۵ و ۱۴۶ را در کلاس بخوانید و توضیح دهید و از دانش‌آموزان بخواهید کار در کلاس صفحه‌ی ۱۴۶ را انجام دهند.

هدف کار در کلاس:

هدف اصلی، کاربرد فرمول حجم هرم در حالت‌های مختلف است.

توصیه‌های آموزشی:

ـ به دانش‌آموزان یادآوری کنید که ضریب $\frac{1}{3}$ فرمول را فراموش نکنند و قبل از ضرب کردن، حتماً امکان ساده شدن را بررسی کنند.

ـ از دانش‌آموزان بخواهید بگویند چهاروجهی چیست.

ـ وجه، یال، و رأس را معرفی کنید و در کلاس از دانش‌آموزان بخواهید هرکدام را در اشکال معرفی کنند.

ـ عدد داده شده در کار در کلاس، مساحت قاعده است. این موضوع شاید در شکل واضح نباشد.

فعّالیّت خارج از کلاس:

ـ از دانش‌آموزان بخواهید به کمک اشکال صفحه‌ی ۱۴۵، یک هرم مقوایی بسازند.

ـ از دانش‌آموزان بخواهید یک مکعب توپر را برش دهند؛

به گونه‌ای که سه هرم یکسان ساخته شود.

ــ از دانش‌آموزان بخواهید در مورد اجسام افلاطونی مطالبی پیدا کنند (در مجله‌ی برهان، مقاله‌ای در این باره به چاپ رسیده است).

تلفیق با سایر دروس:

ساختمان‌ها و بناهای تاریخی زیادی به شکل هرم وجود دارد که معروف‌ترین آن‌ها اهرام مصر است، بسیاری از کلیساها نیز به شکل هرم ساخته می‌شوند.

آیا در ایران چنین بناهایی وجود دارد؟

توسعه:

از دانش‌آموزان بپرسید : با جابه‌جا کردن رأس یک هرم، چه تغییری در حجم شکل به‌وجود می‌آید؟

آیا می‌توان با تغییر رأس هرم، حجم آن را ثابت نگه داشت؟ چگونه؟


مخروط

در شکل روبه‌رو، روش ساختن جسمی را که مخروط نامیده می‌شود، مشاهده می‌کنید.

می‌توان تصور کرد که یک مخروط از دوران مثلثی قائم‌الزاویه حول یک ضلع آن پدید می‌آید.

دستور محاسبه‌ی حجم مخروط هم مانند حجم هرم است.

درستی این مطلب را می‌توانیم با آزمایش روبه‌رو تحقیق کنیم : دو ظرف به شکل‌های استوانه و مخروط که قاعده و ارتفاع مساوی دارند انتخاب می‌کنیم. ظرف مخروط شکل را از آب پر کرده و در ظرف استوانه‌ای شکل خالی می‌کنیم. مقدار آب $\frac{1}{3}$ گنجایش ظرف استوانه‌ای شکل است.

حجم استوانه × $\frac{1}{3}$ = حجم مخروط

پس: ارتفاع × مساحت قاعده × $\frac{1}{3}$ = حجم مخروط

بطور کلی: حجم یک مخروط برابر است با یک سوم حاصل‌ضرب مساحت قاعده‌ی آن در ارتفاع آن.

کار در کلاس

ا. شعاع قاعده و ارتفاع هر مخروط داده شده است. حجم هر یک را حساب کنید.

۱۴۷

مخروط

ایجاد انگیزه کنید:

از بچه‌ها بخواهید با استفاده از مقوا و قیچی و چسب برای خودشان کلاه بسازند!

شروع کنید:

پس از بررسی هرم و یادآوری آن، شکل مخروط را به دانش‌آموزان معرفی کرده و مطالب صفحه‌ی ۱۴۷ را در کلاس بیان کنید. سپس از آن‌ها بخواهید کار در کلاس صفحات ۱۴۷ و ۱۴۸ را انجام دهند.

هدف کار در کلاس :

تمرین اول، استفاده از فرمول در محاسبه‌ی حجم مخروط است و تمرین دوم، به عنوان یک مسئله با هدف استفاده از مهارت حل مسئله طرح شده است.

توصیه‌های آموزشی:

ــ به دانش‌آموزان توصیه کنید که قبل از ضرب کردن، امکان ساده کردن را بررسی کنند.

ــ ضرب در عدد π می‌توان آخرین مرحله‌ی محاسبه باشد.

ــ عدد نوشته شده در تمرین اول شعاع دایره است نه مساحت قاعده.

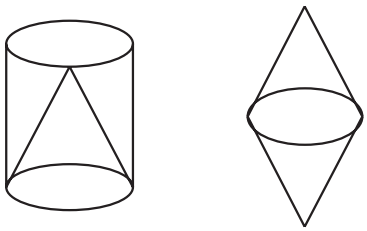
فعّالیّت خارج از کلاس:

از دانش‌آموزان بخواهید یک استوانه و یک مخروط با قاعده‌ی یکسان بسازند؛ به‌گونه‌ای که بتوان در داخل آن‌ها آب ریخت. سپس حجم این دو را مقایسه کنند.

توسعه:

ــ از دانش‌آموزان بخواهید یک برج مخروطی را درنظر بگیرند. از آن‌ها بپرسید: دیوارهای کدام طبقه کج‌تر است؟ شما کدام طبقه را برای زندگی انتخاب می‌کنید؟ در یک برج ۱۰۰ طبقه، اگر قیمت هر طبقه متناسب با سطح آن طبقه باشد، گران‌ترین طبقه کدام است و چه اختلافی با ارزان‌ترین طبقه دارد؟

ــ از دانش‌آموزان بخواهید حجم‌هایی بسازند یا رسم کنند که حجمی دوبرابر یک مخروط دارد.



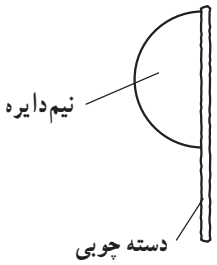
کره

ایجاد انگیزه کنید:

ــ به کمک آب و صابون درکلاس حباب بسازید.

ــ از دانش‌آموزان بخواهید مثال‌های عجیب و واقعی از کره بزنند.

ــ یک بادبزن به شکل روبه‌رو بسازید و آن را در کلاس به سرعت بچرخانید.



شروع کنید:

کره یک شکل شناخته شده برای دانش‌آموزان است امّا فرمول محاسبه‌ی حجم آن بسیار عجیب به‌نظر می‌رسد. مطالب صفحه‌ی ۱۴۸ و رابطه‌ی مساحت و حجم را در کلاس بیان کنید. سپس، از دانش‌آموزان بخواهید کار در کلاس صفحات ۱۴۸ و ۱۴۹ را انجام دهند.

هدف کار در کلاس:

ــ تمرین یک با هدف استفاده از فرمول‌های مساحت و حجم طراحی شده است. تمرین دوم و سوم نیز یک مسئله با هدف استفاده از مهارت حل مسئله و راهبردهای آن است.

دربخش تمرین، سؤال اول استفاده از فرمول مناسب را بررسی می‌کند و تمرین دوم و سوم علاوه بر استفاده از فرمول، به درک صحیح مسئله نیز نیازدارد.

ــ در تمرین سوم، دانش‌آموزان می‌توانند با یک استدلال منطقی نتیجه‌گیری مناسبی داشته باشند.

توصیه‌های آموزشی:

ــ به دانش‌آموزان یادآوری کنید که همواره محاسبه‌ی حجم از حاصل‌ضرب سه طول به‌دست می‌آید.

ــ قبل از ضرب کردن، امکان ساده کردن را بررسی کنند.

فعّالیّت خارج از کلاس:

از دانش‌آموزان بخواهید به کمک کاغذ و مقوا، کره درست کنند.

تلفیق با سایر دروس:

از دانش‌آموزان بپرسید : چرا حباب‌ها کروی هستند (جواب : چون فشار هوا در همه‌جای اطراف حباب یکسان است.)

تمرین

۱ـ شکل بعضی اجسام و اندازه‌های آن‌ها به‌صورت‌های زیر است؛ حجم هریک را حساب کنید.

۲ـ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های قائم ۳ و ۴ سانتی‌متر، حول ضلع ۴ سانتی‌متری دوران داده شده است. حجم مخروط حاصل را حساب کنید.

۳ـ اندازه‌های اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی یک مثلث قائم‌الزاویه ۵ و ۱۲ است. حجم حاصل از دوران این مثلث حول هریک از ضلع‌های زاویه‌ی قائمه آن را حساب کنید. از مقایسه‌ی آن‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل مسئله

یک چاه استوانه‌ای شکل به قطر ۲ متر و ارتفاع ۱۰ متر حفر شده است. خاک این چاه روی زمین به‌صورت یک مخروط با قاعده‌ی دایره‌ای به شعاع ۲ متر ریخته شده است. ارتفاع این مخروط را پیدا کنید. (وقتی خاک حاصل از حفر کردن زمین را بیرون می‌ریزند، حجم آن تقریباً ۱/۵ برابر می‌شود.)

توسعه:

از دانش‌آموزان بخواهید یک خاصیت مشترک برای نقاط روی محیط کره معرفی کنند. همین مسئله را در مورد استوانه نیز مطرح کنید.

یادداشت معلم

رسم ۶

این رسم برای بسیاری از دانش‌آموزان شاید آخرین رسم دوران تحصیل باشد که از این لحاظ قابل توجه است. با بیان این نکته در کلاس می‌توانید نوعی هیجان ایجاد کنید و دانش‌آموزان را به کمی تأمل بکشانید.

شروع کنید:

یکی از تفاوت‌های اصلی این رسم با رسم‌های گذشته، وجود مقیاس در آن است. کلیه‌ی اندازه‌های بیان شده، در واقع نصف اندازه‌های واقعی است. همین نکته شاید باعث سردرگمی دانش‌آموزان شود. از دانش‌آموزان بخواهید ابتدا با دو برابر کردن اندازه‌های موجود در شکل اول، اندازه‌های اضلاع باقی‌مانده را پیدا کنند (می‌توانند روی شکل پایین، اندازه‌های واقعی را بنویسند).

طریقه‌ی کشیدن رسم

ابتدا در وسط کاغذ، مربعی با اضلاع ۱۲ سانتی‌متر رسم کنید. سپس، در اضلاع افقی از هر طرف مشابه شکل ۳ سانتی‌متر جدا کرده و به وسط ضلع عمودی مربع وصل کنید. بعد از آن، با نقطه‌چین‌های منظم وسط به وسط اضلاع روبه‌رو را به هم وصل کنید. سپس، قطرهای مربع را رسم کرده ازمرکز به اندازه‌ی ۳ سانتی‌متر حرکت کنید و عمودی رسم کنید که خطوط نقطه‌چین را قطع کند. فاصله این محل برخورد تامرکز مربع شعاع دایره است؛ بنابراین، دایره را بکشید و مطابق شکل مربع را کامل کنید.

نکات مهم رسم

۱ــ استفاده‌ی صحیح از مقیاس بسیار اهمیت دارد. از دانش‌آموزان بخواهید درمورد مقدار زاویه‌ها اظهارنظر کنند که آیا زاویه‌ها هم دو برابر می‌شود.

۲ــ انجام دادن درست روند کشیدن رسم باعث دقت در رسم می‌شود و اندازه‌ها به همان مقدار پیش‌بینی شده به‌دست می‌آیند.

۳ــ یکسان بودن خطوط و تمیز بودن آن در این رسم هم مانند رسم‌های گذشته بسیار اهمیت دارد.

۴ــ یکسان بودن خط‌چین‌ها در زیبایی رسم بسیار تأثیرگذار است.

توسعه:

روش‌های دیگر رسم را در کلاس به بحث بگذارید.

یادداشت معلم

نکاتی درباره‌ی تمرین دوره‌ای ۲

هدف از تمرین‌های این قسمت، یادآوری بعضی از مطالب ترم اول و دوم است. دانش‌آموزان با انجام دادن این تمرین‌ها تاحدودی برای امتحان پایان سال آماده می‌شوند. هدف‌ها و توصیه‌های خاص بعضی از تمرینات در این قسمت آمده است و در انتها تمرین‌های تکمیلی مطرح شده‌اند.

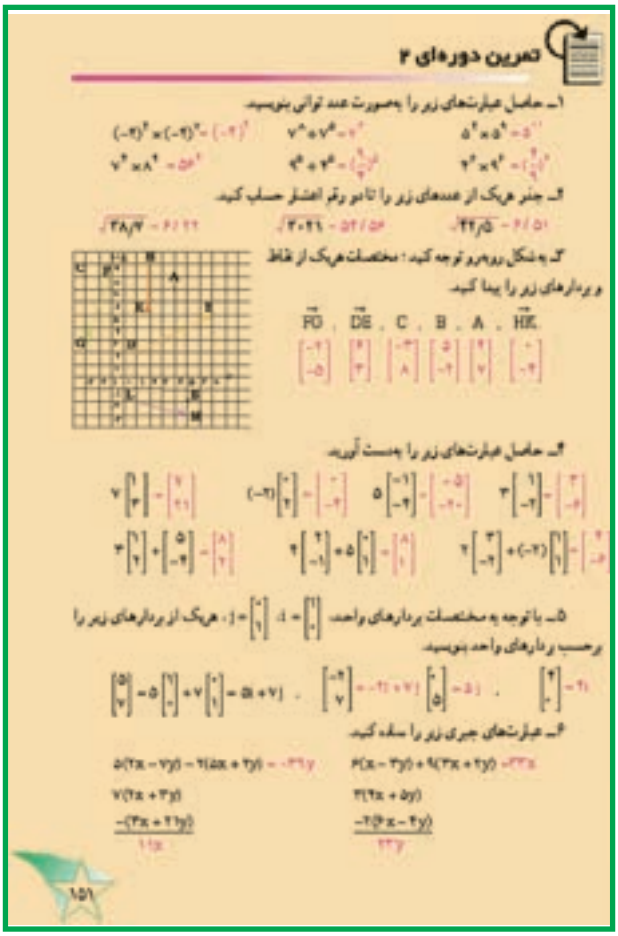
۱ــ در تمرین ۹، دانش‌آموزان با کلمات «و»، «یا» دربیان نقاط موردنظر تمرین آشنا می‌شوند. برای دانش‌آموزان در مورد استفاده از این دو نماد در ریاضی و درزندگی روزمره توضیح لازم را بدهید.

$(x=۰, y=۱)$ یا $(x=۰, y=۱) \equiv (y=۱)$ و $(x=۵$ یا $x=۰)$

$(x=۲, y=۳)$ یا $(x=۲, y=۲) \equiv (y=۲$ یا $y=۳)$ و $(x=۲)$

می‌توانید به تشابه این عمل و توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع در حساب اشاره کنید.

۲ــ درتمرین ۲۴ ممکن است بعضی از دانش‌آموزان در تشخیص زاویه‌ی قائمه دچار مشکل شوند. یادآوری و راهنمایی ضروری به‌نظر می‌رسد.


تمرین دوره‌ای ۲

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت عدد توانی بنویسید.

$(-۲)^۲ \times (-۲)^۳ = (-۲)^۵$ $\quad ۷^۸ \div ۷^۶ = ۷^۲$ $\quad ۵^۴ \times ۵^۴ = ۵^{۸}$

$۷^۴ \times ۸^۴ = (۵۶)^۴$ $\quad ۴^۵ \div ۳^۵ = (\frac{۴}{۳})^۵$ $\quad ۲^۴ \times ۹^۴ = (\frac{۲}{۹})^۴$

۲ــ جذر هریک از عددهای زیر را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

$\sqrt{۲۸/۴} = ۵/۳۲$ $\quad \sqrt{۲۰۲۶} = ۴۵/۰۵$ $\quad \sqrt{۲۲/۵} = ۴/۷۴$

۳ــ به شکل روبه‌رو توجه کنید: مختصات هریک از نقاط و بردارهای زیر را پیدا کنید.

$\overrightarrow{HK}$, A , B , C , $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FG}$

$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۹ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۷ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ۵ \\ -۹ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -۳ \\ ۸ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -۲ \\ -۵ \end{bmatrix}$

۴ــ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

$۳\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۶ \end{bmatrix}$ $\quad ۵\begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ \\ -۱۰ \end{bmatrix}$ $\quad (-۲)\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۴ \end{bmatrix}$ $\quad ۷\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۴ \\ ۲۱ \end{bmatrix}$

$۲\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} + (-۲)\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۴ \end{bmatrix}$ $\quad ۲\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} + ۵\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ $\quad ۳\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۵ \\ -۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۷ \end{bmatrix}$

۵ــ با توجه به مختصات بردارهای واحد $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = i$ ، $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = j$ ، هریک از بردارهای زیر را برحسب بردارهای واحد بنویسید.

$\begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۴i$, $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix} = ۵j$, $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۷ \end{bmatrix} = -۲i + ۷j$, $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۷ \end{bmatrix} = ۵i + ۷j$

۶ــ عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$۴(x-۳y) + ۹(۳x+۲y) = ۳۳x$ $\quad ۵(۲x-۷y) - ۲(۵x+۳y) = -۳۶y$

$۳(۶x+۵y)$ $\quad ۷(۲x+۳y)$

$-۲(۵x-۴y)$ $\quad -(۳x+۲۱y)$

$۳۳y$ $\quad ۱۱x$

۱۵۱

تمرین‌های تکمیلی دوره‌ای ۲

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $\dfrac{۱۰^۸ \times ۷^۶}{۱۰^۵ \times ۷^۳}$

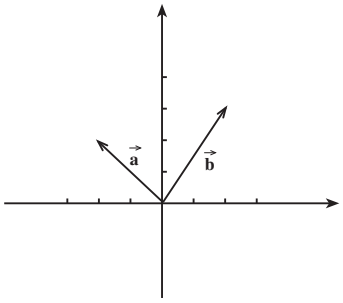
۲) $\dfrac{۲۰^۷ \times ۵^۸}{۲^{۱۵}}$

۳) $۸^۶ \times ۱۶^۴ \times ۲^{۱۰} =$

۴) $\dfrac{۲^۴ \times ۳^۴}{۲^۵ \times ۳^۵}$

۵) $(۰/۵)^۸ \times (\frac{۵}{۱۰})^۳ \times (\frac{۱}{۲})^۲$

۲ــ با توجه به شکل، برای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ جمع متناظر و برای جمع دو بردار نیز جمع متناظر بنویسید.

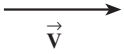


۳ــ با توجه به بردار $\vec{v}$ بردارهای $۲\vec{v}$ و $\frac{۱}{۲}\vec{v}$ و $-\vec{v}$ و $-۳\vec{v}$ را رسم کنید.

۴ــ با روش ترسیم $۳\vec{w}+(-۲\vec{v})$ را به‌دست آورید (به دو روش)

الف) به روش مثلث

ب) به روش متوازی‌الاضلاع

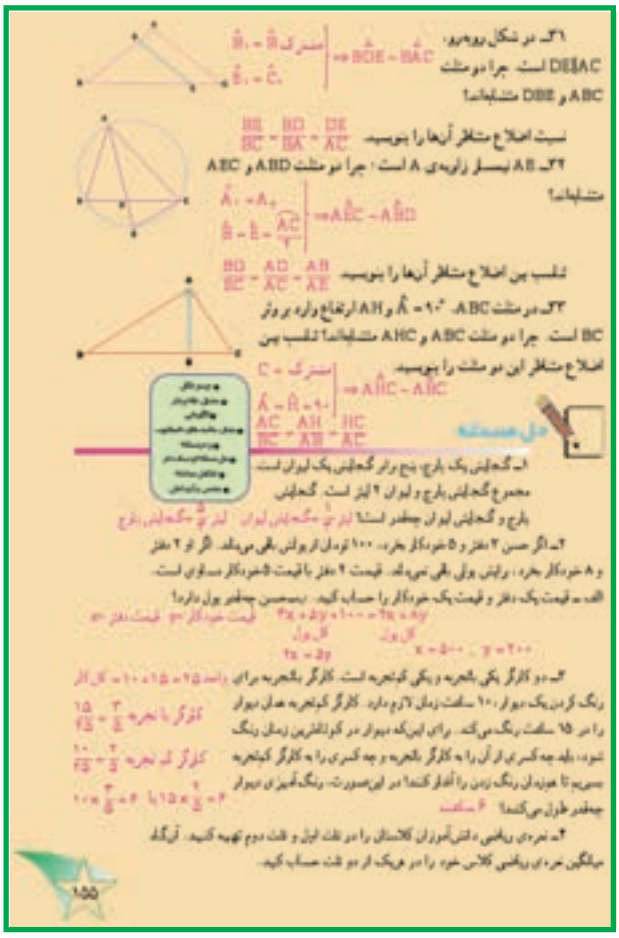


۵ ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $-۸(x+y-۴)-۲(۳x-y+۵)$

۲) $\frac{۲x-۱}{۸}-\frac{۵x-۶}{۴}$

۳) $۳x-۲x(x-۱)$



۴) $(2x-1)^2-3(x+1)^2$

۶ ــ معادله‌ی خطی را که از دو نقطه‌ی $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ می‌گذرد، بنویسید.

۷ــ نقطه‌ی A روی محور طول‌ها و روی خط $y=2x+1$ قرار دارد. خصوصیات A چیست؟

۸ ــ محل برخورد دو خط $x+y=5$ و $2x-y=3$ را به‌دست آورید.

۹ــ مقدار x را چنان بیابید که نقطه‌ی $\begin{bmatrix}2x-5\\3x-6\end{bmatrix}$ روی محور طول‌ها باشد.

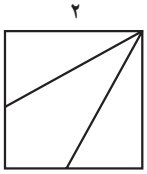
۱۰ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $(-2\frac{5}{6}+3\frac{7}{8}):\left(-3\frac{1}{2}-(-\frac{2}{3})\right)$

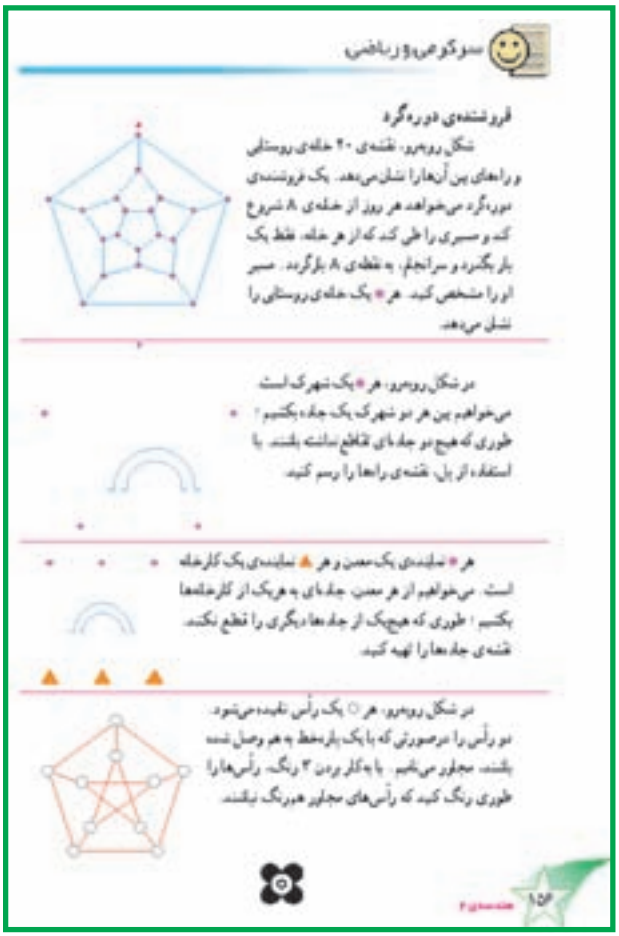
۲) $-2/85-(-0/7)+(-3)$

۳) $10-9/018+0/2$

۴) $\dfrac{-\frac{5}{6}-(-\frac{2}{3})}{\frac{5}{8}+(-\frac{5}{6})}$



۱۱ــ در مربعی به ضلع ۲، مجموع فاصله‌های یک رأس از وسط‌های ضلع‌های مربع را حساب کنید.



سرگرمی و ریاضی

فروشنده‌ی دوره‌گرد

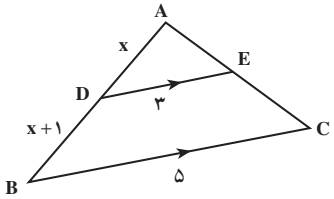
شکل روبه‌رو، نقشه‌ی ۲۰ خانه‌ی روستایی و راه‌های بین آن‌ها را نشان می‌دهد. یک فروشنده‌ی دوره‌گرد می‌خواهد هر روز از خانه‌ی A شروع کند و مسیری را طی کند که از هر خانه، فقط یک بار بگذرد و سرانجام، به نقطه‌ی A برگردد. مسیر او را مشخص کنید. هر ● یک خانه‌ی روستایی را نشان می‌دهد.

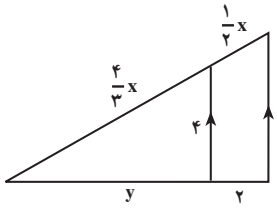
در شکل روبه‌رو، هر ● یک شهرک است. می‌خواهیم بین هر دو شهرک یک جاده بکشیم؛ طوری که هیچ دو جاده‌ای تقاطع نداشته باشند. با استفاده از پاک‌کن، نقشه‌ی راه‌ها را رسم کنید.

هر ● نماینده‌ی یک معدن و هر ▲ نماینده‌ی یک کارخانه است. می‌خواهیم از هر معدن، جاده‌ای به هر یک از کارخانه‌ها بکشیم؛ طوری که هیچ‌یک از جاده‌ها دیگری را قطع نکند. نقشه‌ی جاده‌ها را تهیه کنید.

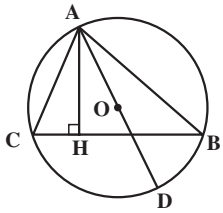
در شکل روبه‌رو، هر ○ یک رأس نامیده می‌شود. دو رأس را درصورتی که با یک پاره‌خط به هم وصل شده باشند، مجاور می‌نامیم. با به‌کار بردن ۳ رنگ، رأس‌ها را طوری رنگ کنید که رأس‌های مجاور هم‌رنگ نباشند.

۱۲ــ مقدار x و y را به‌دست آورید.

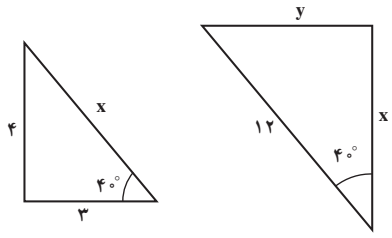




۱۳ــ چرا دو مثلث ACH و ABD مشابه‌اند؟ تناسب بین اضلاع متناظر را بنویسید.



۱۴ــ در شکل زیر، علت تشابه دو مثلث را بیان کنید و مقادیر مجهول را به‌دست آورید.



۱۵ــ یک دایره رسم کنید و آن را به ده قسمت مساوی تقسیم کنید. یک ۱۰ضلعی متنظم رسم کنید و اندازه‌ی دو زاویه‌ی آن را به‌دست آورید (روش کار را توضیح دهید). مجموع زوایای ۱۰ ضلعی را حساب کنید.

معلّمان محترم و اولیای گرامی دانش آموزان و صاحب نظران می توانند نظر اصلاحی خود را درباره ی مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران، صندوق پستی ۳۶۳ ۱۵۸۵۵ - گروه درسی مربوط و یا پست الکترونیکی talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی